

2 Fundamentos de Resistencia de Materiales

2.1 Introducción

La Resistencia de Materiales y, por extensión, la Mecánica de Estructuras pueden considerarse como aquella parte de la Mecánica de Sólidos que resulta de aplicar la Teoría de la Elasticidad a un tipo restringido de problemas que se plantean en el día a día de la Ingeniería Estructural para posibilitar su resolución de forma analítica. Esta categoría de problemas viene definida, fundamentalmente, por:

- *La restricción en la definición del problema elástico.* Esta restricción afecta a la geometría de los elementos estructurales, a sus condiciones de sustentación y vinculación y al tipo de acciones consideradas. Así, la Resistencia de Materiales se aplica a piezas prismáticas (vigas, columnas, barras, ejes, etc.) que están apoyadas, articuladas o empotradas y sometidas a la acción de fuerzas puntuales o repartidas, descensos de apoyos, cargas térmicas, etc.
- *La adopción de ciertas hipótesis fundamentales.* Estas hipótesis permiten, por un lado, definir un problema lineal y, por otro, abordar un problema inicialmente tridimensional (las piezas tienen longitud, altura y anchura) como un “ensamblaje” de problemas básicamente unidimensionales (las piezas se representan como líneas).

Se presentan en este Capítulo, en forma breve, los fundamentos de las dos disciplinas mencionadas. Se introducen, primero, conceptos elementales como el de pieza, estructura, apoyo, enlace, etc., y después otros de importancia fundamental como los de esfuerzos sobre una sección, estructuras isostáticas e hiperestáticas, leyes de esfuerzos, etc. En la última Sección se introduce la problemática asociada a la resolución de estructuras hiperestáticas; para ello, se discuten los requisitos de equilibrio y compatibilidad de la solución y se plantean, en función de éstos, las bases de los métodos de solución de estructuras hiperestáticas.

2.2 Objetivo de la Resistencia de Materiales

La Resistencia de Materiales, como parte integrante de la Mecánica de Estructuras, tiene como objetivo fundamental determinar la respuesta de las estructuras cuando éstas se ven sometidas a las diferentes acciones que deben soportar durante su construcción y vida útil.

Por “respuesta estructural” se entiende, básicamente, la determinación de los estados de tensión y deformación a los que la estructura va a estar sometida por efecto de los diferentes estados de carga que se consideran. La determinación de los estados de tensión es necesaria para comprobar la satisfacción de los criterios de *resistencia* que establecen las correspondientes normativas y los usos de buena práctica, de cara a garantizar la seguridad de las estructuras. Por su parte, la determinación de los estados de deformación suele ser necesaria para satisfacer los criterios de *rigidez*, que están a menudo ligados a requisitos de *funcionalidad* de las estructuras.

Por tanto, la Resistencia de Materiales pretende establecer las condiciones de *resistencia* y *rigidez* de las estructuras analizadas. Ambos aspectos se abordan en los dos tipos de problemas fundamentales que se plantean en la práctica ingenieril: el *dimensionamiento* y la *verificación* de estructuras.

El proceso de construcción de una estructura empieza por la *concepción* de ésta. En esta fase se determina su tipología y se identifican las acciones que actuarán sobre ella. Esta identificación previa se hace de forma aproximada, ya que los valores reales de multitud de acciones dependen de la forma y dimensiones definitivas de la estructura. En ese momento entra en juego la Resistencia de Materiales para evaluar la respuesta estructural del correspondiente “prediseño estructural”. En función de los resultados obtenidos, se procede al *dimensionamiento* de los elementos estructurales, es decir, a dar valores concretos a las dimensiones de éstos. Después, se pasa a la fase de *redefinición* del proyecto, en la cual se introducen las modificaciones necesarias para que se satisfagan los requisitos necesarios. En esta fase se pueden modificar o ratificar las diversas decisiones tomadas en la fase previa. En cualquier caso, se redefinen y

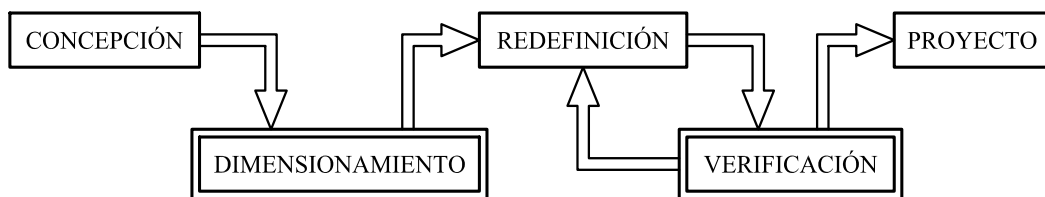


Fig. 2.1: La Resistencia de Materiales en el Análisis de Estructuras

concretan la tipología estructural y las acciones a considerar (peso propio, cargas vivas, etc.). Se pasa entonces a la *verificación* del modelo estructural resultante. Si esta comprobación *a posteriori* del diseño estructural es satisfactoria, se elabora el *proyecto definitivo*; si no lo es, es necesario volver a la fase de redefinición. Se procede, pues, de forma iterativa hasta que se satisfacen adecuadamente todos los requisitos necesarios.

El proceso descrito se muestra de forma esquemática en la Figura 2.1, donde se indica el papel que la Resistencia de Materiales desempeña en él.

2.3 Concepto de pieza y estructura

Se llama *pieza prismática, viga o barra* al cuerpo sólido engendrado por un área plana S que se mueve en el espacio, de manera que su centro de gravedad G recorre una línea dada l y su plano se mantiene constantemente normal a dicha línea. A la línea l se le denomina *directriz, línea media o eje de la pieza* y a las diversas posiciones del área S se les llama *secciones rectas o secciones normales* de la pieza (ver Figura 2.2a).

La directriz de la pieza puede ser una curva alabeada, plana o recta, dando lugar a *piezas alabeadas* (viga en hélice), *piezas planas* (arcos, vigas balcón) o *piezas rectas* (ménsulas, columnas, etc.). La sección de la pieza puede ser constante o variable a lo largo de la pieza, dando lugar a *piezas de sección constante o variable*, respectivamente.

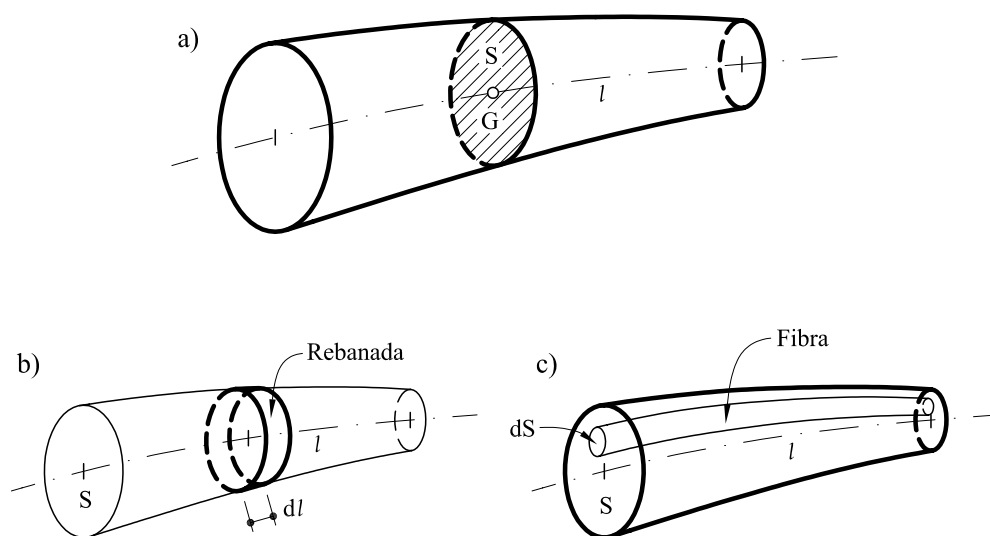


Fig. 2.2: Concepto de: (a) pieza prismática, (b) rebanada y (c) fibra

Se llama *rebanada* al elemento diferencial de pieza contenido entre dos secciones rectas infinitamente próximas (ver Figura 2.2b). Así, se puede considerar a la viga como un sólido generado por una *sucesión* de rebanadas diferenciales. Se llama *fibra* al elemento diferencial de volumen generado por un elemento diferencial del área plana S en el movimiento que genera la pieza prismática (ver Figura 2.2c). Por tanto, se puede considerar a la viga como un sólido formado por un *haz* de fibras diferenciales. La rebanada y la fibra son los elementos diferenciales básicos de estudio en la Resistencia de Materiales.

Se llama *pieza de plano medio* a aquella pieza plana en la que la sección recta es simétrica respecto a un plano que contiene a la directriz de la pieza y que está sometida a cargas contenidas en dicho plano medio. Se llama *pieza de cilindro medio* a aquella pieza plana en la que la sección recta es simétrica respecto a un plano perpendicular al que contiene a la directriz de la pieza y que está sometida a cargas perpendiculares al plano de la directriz.

Se llama *estructura de barras* al sistema mecánico formado por el ensamblaje de piezas prismáticas. Se habla de *estructura plana* cuando las directrices de todas las piezas que forman la estructura están contenidas en un mismo plano, y de *estructura espacial* en caso contrario. Se llama *estructura de plano medio* a la estructura plana formada por piezas de plano medio, y que están sometidas a cargas contenidas en dicho plano medio. Se llama *emparrillado plano* a la estructura plana formada por piezas de cilindro medio, y que están sometidas a cargas perpendiculares a su plano medio.

En este Libro se tratarán siempre estructuras de barras y, fundamentalmente, estructuras de barras de plano medio.

2.4 Principios de la Resistencia de Materiales

La Resistencia de Materiales es una disciplina que se basa en tres principios o hipótesis fundamentales: el Principio de rigidez, el Principio de superposición y el Principio de Saint-Venant. La validez de los resultados obtenidos mediante esta teoría depende, básicamente, del grado de satisfacción de estos principios en el caso concreto en que se aplique.

2.4.1 Principio de rigidez

El Principio de rigidez es una consecuencia directa de la hipótesis de pequeños movimientos aplicada al análisis de estructuras y establece que

“las ecuaciones de equilibrio se pueden formular sobre la geometría indeformada, es decir, sin considerar los movimientos provocados por el sistema de cargas.”

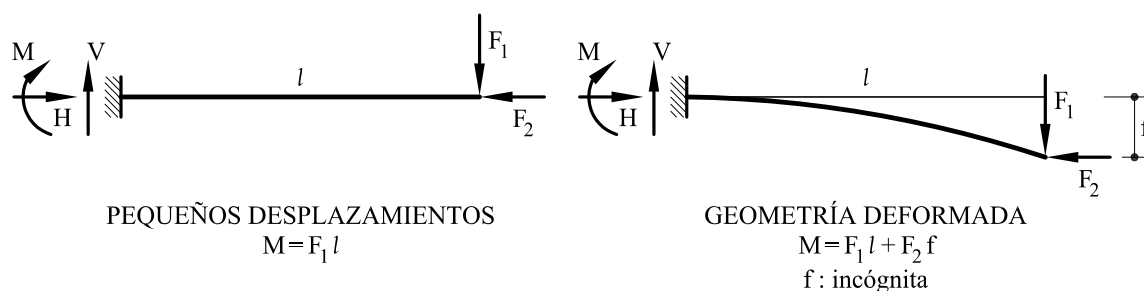


Fig. 2.3: Implicación del Principio de rigidez

Esta hipótesis implica que los movimientos de la estructura debidos al sistema de cargas sean pequeños: los desplazamientos, comparados con las dimensiones de la estructura, y los giros (en radianes), comparados con la unidad. Si esta condición no se cumple, las ecuaciones de equilibrio deben formularse en la geometría deformada, y el problema deja de ser lineal para transformarse en un problema *geoméricamente* no lineal.

En la Figura 2.3 se ilustra la utilidad del Principio de rigidez. Bajo la hipótesis de pequeños movimientos (izquierda), las reacciones en el empotramiento sólo dependen de la geometría inicial y de las cargas; sin ella (derecha), las reacciones dependen de la deformación de la estructura, y ésta es desconocida *a priori*.

2.4.2 Principio de superposición

Como ya se indicó en el Capítulo anterior, si es válida la hipótesis de pequeños desplazamientos y se cumple, además, la ley de Hooke, entonces es admisible que el problema es lineal. La resolución de un problema estructural lineal es mucho más sencilla que la de uno no lineal; además de otras dificultades de tipo práctico, *en un problema no lineal no existe, en general, garantía de que la solución exista y sea única*.

Además, si el problema es lineal puede aplicarse el Principio de superposición. Éste establece que

“los efectos que un sistema de fuerzas origina sobre una estructura son iguales a la suma de los efectos que originan cada una de las fuerzas del sistema actuando por separado”.

Una consecuencia inmediata del citado principio es que el estado final (tensional y deformacional) de una estructura sometida a un sistema de fuerzas no depende del orden de aplicación de dichas fuerzas. Esto permite, por ejemplo, analizar el caso de una sollicitación compleja descomponiéndola en casos más simples de estudiar. Es posible,

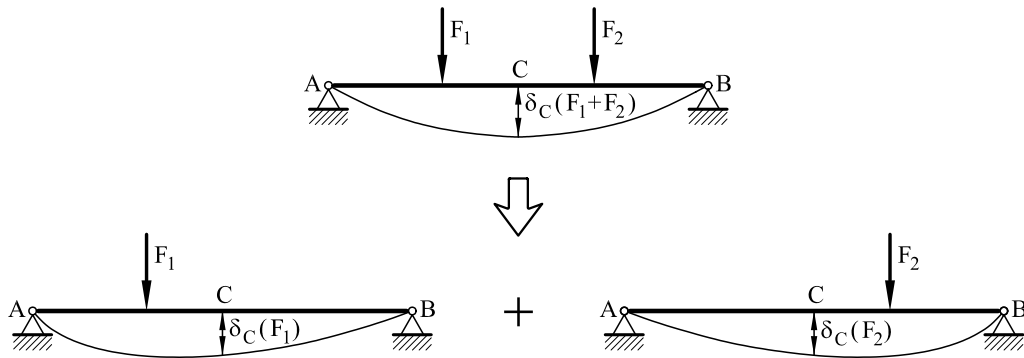


Fig. 2.4: Implicación del Principio de superposición

asimismo, la definición y el análisis de estados de carga de interés como combinación de estados de carga previamente definidos y analizados. Ambas posibilidades son utilizadas frecuentemente en Resistencia de Materiales.

Así, por ejemplo, en la Figura 2.4 se muestra una viga biapoyada sobre la que actúa un sistema de carga consistente en dos fuerzas puntuales; este sistema puede descomponerse en los dos sistemas más simples de la parte inferior de la Figura. El principio de superposición implica que las reacciones, movimientos, tensiones y deformaciones que provoca sobre la estructura el estado de cargas original es igual a la suma de las reacciones, movimientos, tensiones y deformaciones que provocan los estados en los que éste se descompone.

2.4.3 Principio de Saint-Venant

El Principio de Saint-Venant puede considerarse la verdadera piedra angular sobre la que se edifica la Resistencia de Materiales, ya que establece que

“en una pieza prismática, las tensiones que actúan sobre una sección recta, alejada de los puntos de aplicación de un sistema de cargas, sólo dependen de la fuerza y del momento resultantes de las fuerzas situadas a un lado de la sección considerada”.

Esta hipótesis implica que los efectos locales (fuerzas concentradas, apoyos, variaciones de sección) sólo afectan a una zona localizada a uno y otro lado de las secciones en que se producen. La forma precisa en que se aplican las cargas o los dispositivos empleados para aplicarlas, así como la disposición constructiva concreta de los aparatos de apoyo, sólo afectan al estado tensional de esta zona localizada, de una longitud aproximadamente igual al canto de la pieza. El estudio tensional de las zonas afectadas por los efectos locales es complejo y debe hacerse mediante la Teoría de la Elasticidad.

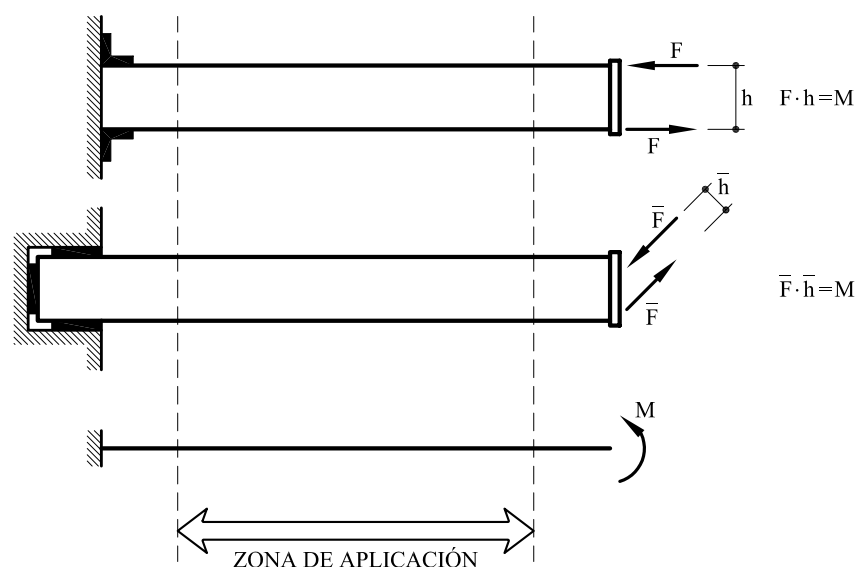


Fig. 2.5: Ilustración del Principio de Saint-Venant

En la Sección 2.5 se define el concepto de *esfuerzos sobre una sección*, precisamente, como las componentes de la fuerza y del momento resultantes de las fuerzas situadas a un lado de la sección. El cálculo de esfuerzos juega un papel fundamental en la Teoría de Resistencia de Materiales y Cálculo de Estructuras, ya que, según el Principio de Saint-Venant, las tensiones en una sección sólo dependen del valor de éstos.

En la Figura 2.5 se muestran dos ejemplos de voladizos con momento aplicado en sus extremos libres. En el primer caso, el empotramiento se consigue apoyando la viga contra el soporte y coartando el giro mediante sendos angulares soldados a ambos; el momento en el extremo es la resultante de un par fuerzas horizontales. En el segundo caso, el empotramiento se consigue encastrando adecuadamente la viga en el soporte; el momento en el extremo es la resultante de un par fuerzas inclinadas respecto al eje de la viga. En ambas situaciones, el momento resultante de las fuerzas actuantes es idéntico, mientras que la resultante de fuerzas es nula.

A pesar de que las materializaciones de las condiciones de empotramiento y de los momentos aplicados son diferentes, su idealización a efectos de cálculo es idéntica, tal como se muestra en la Figura 2.5. Según el Principio de Saint-Venant, las tensiones que aparecen en las zonas centrales de las piezas dependen, exclusivamente, del momento resultante de las fuerzas actuantes; las zonas extremas, por el contrario, se ven afectadas por los efectos locales, y la determinación de su estado tensional requerirá consideraciones más cuidadosas.

En la práctica ingenieril, el estudio del estado tensional de un elemento estructural suele hacerse suponiendo que el Principio de Saint-Venant es aplicable a la totalidad de las secciones analizadas. El dimensionamiento de las piezas suele hacerse en función de los resultados así obtenidos. *A posteriori*, se adoptan las disposiciones constructivas necesarias para reducir o soportar de forma adecuada los efectos locales en las zonas en las que los resultados calculados en esta forma no son aplicables.

2.4.4 Restricciones geométricas

Para que los principios fundamentales enunciados se cumplan y los resultados de la Resistencia de Materiales sean válidos, las piezas deben cumplir ciertas condiciones:

- *Geometría de la directriz.* En piezas de directriz curva, los radios de curvatura de ésta deben ser grandes en relación al canto de las piezas. Si esta relación es suficientemente pequeña, los efectos de la curvatura pueden llegar a despreciarse en el análisis del comportamiento de las rebanadas y utilizar las expresiones obtenidas para piezas de directriz recta.
- *Geometría de las secciones:*
 - *Dimensiones.* Las dimensiones transversales de las piezas, canto y ancho, deben ser pequeñas en relación a su longitud. Esto es necesario para que se cumplan el principio de Saint-Venant y las hipótesis de deformación de las secciones que se utilizan habitualmente. Por otro lado, las características geométricas de las secciones rectas deben asegurar que las piezas tengan la rigidez necesaria para que los movimientos sean pequeños. En general, son admisibles las relaciones *canto/luz* (h/l) siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{h}{l} &= \frac{1}{10} \text{ a } \frac{1}{12} && \text{para piezas rectas de hormigón armado} \\ \frac{h}{l} &= \frac{1}{15} \text{ a } \frac{1}{25} && \text{para piezas rectas de hormigón pretensado} \\ \frac{h}{l} &= \frac{1}{20} \text{ a } \frac{1}{35} && \text{para piezas rectas de acero laminado} \\ \frac{h}{l} &= \frac{1}{40} \text{ a } \frac{1}{100} && \text{para arcos} \end{aligned}$$

- *Variación.* En piezas de sección variable, la variación de las dimensiones transversales debe ser gradual y lenta. Las variaciones bruscas en las características geométricas de las secciones producen efectos locales que invalidan el principio de Saint-Venant.

2.5 Definición de esfuerzos en una sección

Dada una viga sometida a la acción de un sistema de cargas exteriores, supondremos que una sección recta cualquiera, S , divide la pieza en dos partes, (A) y (B) , situadas cada una a un lado de la sección considerada, tal como se muestra en la Figura 2.6.

El sistema de fuerzas (acciones y reacciones) que actúan sobre la viga debe estar en equilibrio estático. Si llamamos \vec{F}_A al sistema de fuerzas que actúa sobre la parte (A) de la pieza y \vec{F}_B al sistema de fuerzas que actúa sobre la parte (B) , por equilibrio de la viga debe ser:

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = 0 \quad (2.1)$$

Asimismo, tomando momentos respecto al centro de gravedad G de la sección S , debe cumplirse:

$$\vec{M}_{F_A}^G + \vec{M}_{F_B}^G = 0 \quad (2.2)$$

Consideremos ahora, por separado, el equilibrio de las dos partes de la pieza (A) y (B) . Para que tal equilibrio exista, es necesario suponer que existen unas fuerzas de interacción que ambas partes se ejercen entre sí, a través de la superficie S . Así, la parte (B) ejercerá sobre la parte (A) unas fuerzas que podemos reducir a una resultante \vec{R}_A y un momento resultante, respecto a G , \vec{M}_A^G . De forma análoga, la parte (A) ejerce sobre la parte (B) una fuerza resultante \vec{R}_B y un momento resultante \vec{M}_B^G .

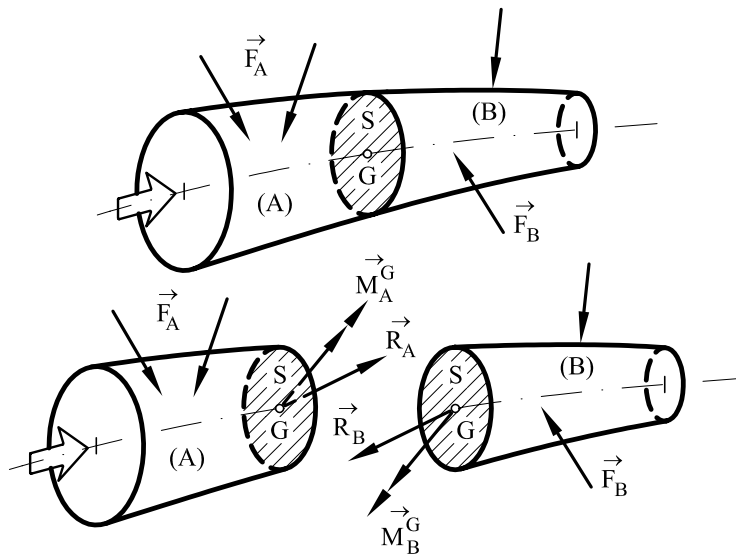


Fig. 2.6: Fuerza y momento resultantes en una sección

Por equilibrio de la parte (A) debe ser:

$$\begin{aligned}\vec{F}_A + \vec{R}_A &= 0 \\ \vec{M}_{F_A}^G + \vec{M}_A^G &= 0\end{aligned}\quad (2.3)$$

Por equilibrio de la parte (B) debe ser:

$$\begin{aligned}\vec{F}_B + \vec{R}_B &= 0 \\ \vec{M}_{F_B}^G + \vec{M}_B^G &= 0\end{aligned}\quad (2.4)$$

Sumando las ecuaciones (2.3) y (2.4) y teniendo en cuenta el equilibrio global (ecuaciones (2.1) y (2.2)), se tiene:

$$(\vec{F}_A + \vec{F}_B) + \vec{R}_A + \vec{R}_B = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{R}_A = -\vec{R}_B \quad (2.5a)$$

$$(\vec{M}_{F_A}^G + \vec{M}_{F_B}^G) + \vec{M}_A^G + \vec{M}_B^G = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_A^G = -\vec{M}_B^G \quad (2.5b)$$

Por lo tanto, las acciones que una parte ejerce sobre la otra son iguales y de sentido contrario.

Llamando por simplicidad: $\vec{R} = \vec{R}_A = -\vec{R}_B$ y $\vec{M} = \vec{M}_A^G = -\vec{M}_B^G$, se tendrá también que:

$$\left. \begin{aligned}\vec{R} &= -\vec{F}_A = \vec{F}_B \\ \vec{M} &= -\vec{M}_{F_A}^G = \vec{M}_{F_B}^G\end{aligned}\right\} \quad (2.6)$$

Cuando la fuerza resultante \vec{R} y el momento resultante \vec{M} se calculan en la forma $\vec{R} = \vec{F}_B$ y $\vec{M} = \vec{M}_{F_B}^G$, es decir, teniendo en cuenta las fuerzas que actúan “por delante” de S (en la parte B), el cálculo se llama *frontal*. Cuando \vec{R} y \vec{M} se calculan en la forma $\vec{R} = -\vec{F}_A$ y $\vec{M} = -\vec{M}_{F_A}^G$, es decir, teniendo en cuenta las fuerzas que actúan “por detrás” de S (en la parte A), el cálculo se llama *dorsal*. Es evidente que ambos procedimientos conducen a resultados idénticos.

Definimos el triedro cartesiano dextrógiro xyz , con origen en el centro de gravedad G de la sección S , en el que el eje x es normal a la sección S , orientada de (A) a (B) y tangente a la directriz de la viga, y los ejes (y, z) son los ejes principales de inercia de la sección S (ver Figura 2.7). Proyectando la fuerza resultante \vec{R} sobre estos ejes se define como:

$$\left. \begin{aligned}\text{Esfuerzo Axil } N \\ \text{Esfuerzo Cortante } T_y \\ \text{Esfuerzo Cortante } T_z\end{aligned}\right\} \text{ a la proyección de } \vec{R} \text{ según el eje } \left\{ \begin{aligned}x \\ y \\ z\end{aligned}\right.$$

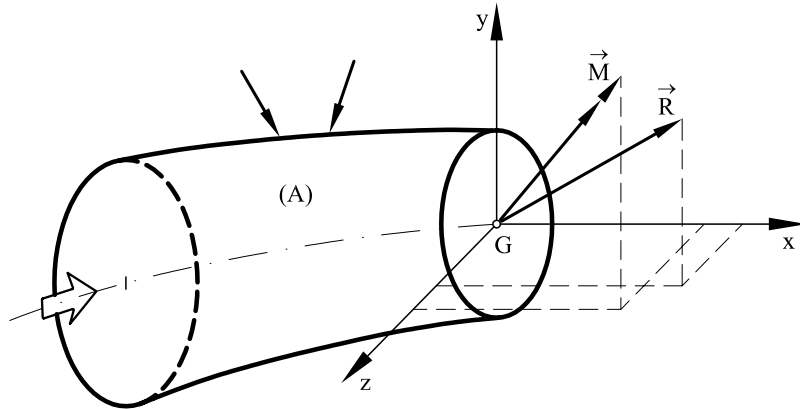


Fig. 2.7: Definición de esfuerzos en una sección

Análogamente, proyectando el momento resultante \vec{M} sobre los ejes, se define como:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Momento Torsor } M_t \\ \text{Momento Flector } M_y \\ \text{Momento Flector } M_z \end{array} \right\} \text{ a la proyección de } \vec{M} \text{ según el eje } \left\{ \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right.$$

2.6 Relación entre esfuerzos y tensiones

Las resultantes \vec{R} y \vec{M} , y sus respectivas componentes, es decir, los esfuerzos en la sección, son las resultantes estáticas de las *tensiones* que actúan sobre la sección S . Tal como se definió en el Capítulo anterior, dichas tensiones son las fuerzas de interacción que una parte de la viga ejerce sobre la otra, definidas por unidad de superficie de la sección S .

Así, tal como se muestra en la Figura 2.8, sobre un diferencial de área dS , de la sección S , actuará una tensión \vec{t} , que puede descomponerse en una tensión normal σ_x , según el eje x , y una tensión tangencial τ sobre la sección S . La tensión tangencial puede descomponerse, a su vez, en sus componentes cartesianas según los ejes (y , z), dando las tensiones τ_{xy}, τ_{xz} , respectivamente.

Para que \vec{R} y \vec{M} formen un sistema equivalente al sistema de fuerzas internas diferenciales $\vec{t}dS$, deben cumplirse las siguientes relaciones vectoriales:

$$\vec{R} = \int_S \vec{t}dS \quad \vec{M} = \int_S \vec{r} \times \vec{t}dS \quad (2.7)$$

donde \vec{r} es el vector de posición de dS respecto al centro de gravedad de la sección, con componentes $\vec{r}(0, y, z)$.

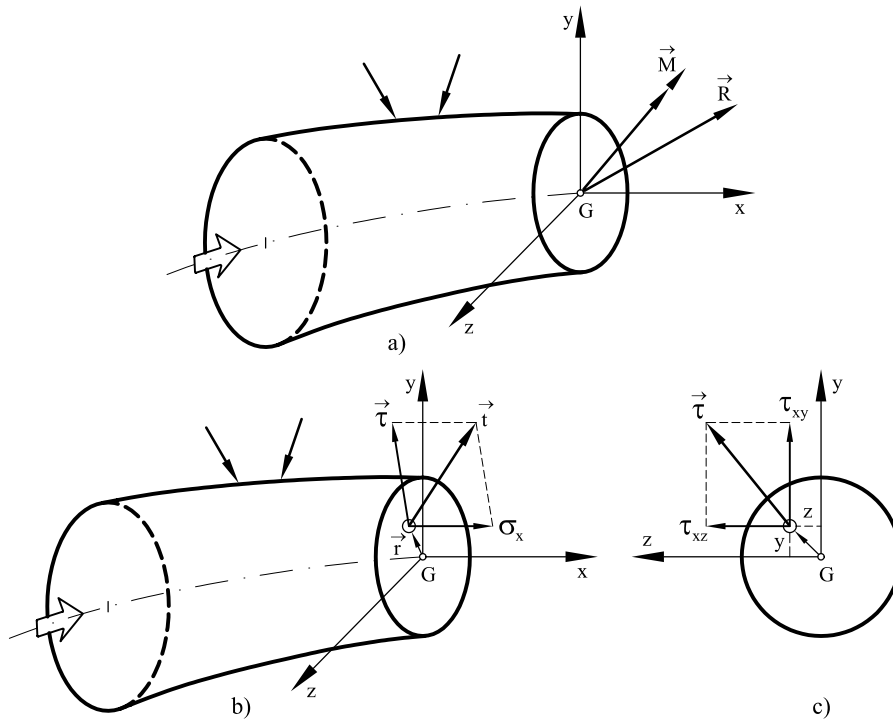


Fig. 2.8: Relación entre esfuerzos y tensiones

Las anteriores relaciones vectoriales se pueden descomponer en las correspondientes ecuaciones escalares. Así, la ecuación 2.7a se descompone en:

$$N = \int_S \sigma_x dS \quad ; \quad T_y = \int_S \tau_{xy} dS \quad ; \quad T_z = \int_S \tau_{xz} dS \quad (2.8)$$

Análogamente, la ecuación 2.7b se descompone en:

$$M_t = \int_S (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dS \quad ; \quad M_y = \int_S \sigma_x z dS \quad ; \quad M_z = - \int_S \sigma_x y dS \quad (2.9)$$

Estas ecuaciones muestran la relación entre los esfuerzos y las tensiones actuantes en una sección y serán empleadas a menudo en los Capítulos posteriores.

La Figura 2.9 muestra el convenio de signos utilizado para las componentes de tensión y de momento. Las tensiones sobre la sección son positivas si tienen el sentido de los correspondientes semiejes positivos. Los momentos son positivos si, adoptando el criterio de la mano derecha, el sentido de los vectores momento es positivo.

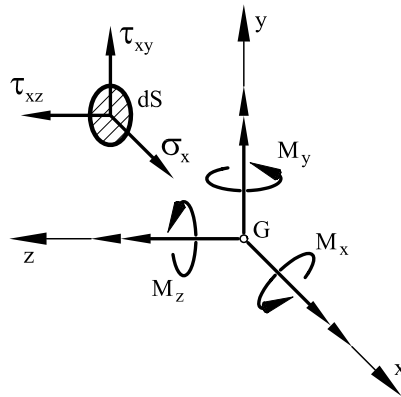


Fig. 2.9: Convenio de signos de tensiones y momentos

2.7 Esfuerzos en piezas de plano medio

Consideremos una pieza de plano medio tal como la que se muestra en la Figura 2.10. Llamaremos XY al plano medio que, recordemos, contiene a la directriz, es plano de simetría de las secciones rectas y contiene también a las cargas que actúan sobre la pieza.

El triedro de referencia xyz local de una sección genérica se define de la forma siguiente. El eje x es tangente a la directriz de la pieza en el centro de gravedad de

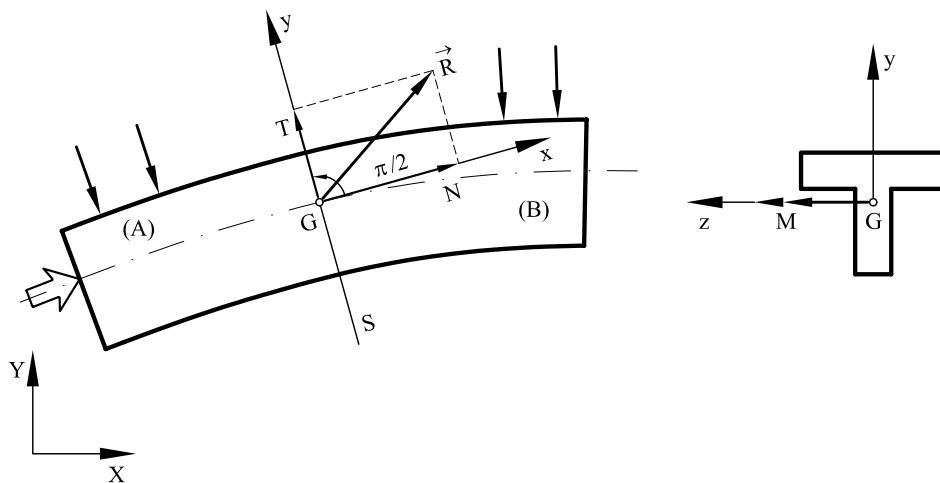


Fig. 2.10: Esfuerzos en piezas de plano medio

la sección G , y orientado según el sentido positivo de recorrido de la directriz. El eje y está también en el plano medio que, por simetría, es plano principal de inercia, y es normal al eje x , formando con éste un ángulo de $\pi/2$ radianes (antihorario). El eje z es normal a los ejes (x, y) y de sentido tal que el triedro (x, y, z) es dextrógiro. Así, el plano XY coincide con el plano xy , y el eje z es perpendicular a éste.

Al actuar las fuerzas exteriores sólo en el plano XY , la resultante \vec{R} de las fuerzas que actúan a uno u otro lado de la sección está contenida en dicho plano, y se descompone en un esfuerzo axial N (según el eje x) y un esfuerzo cortante T (según el eje y). Por simetría respecto al plano medio, T_z es nulo. Por el mismo motivo, el momento resultante \vec{M} de las fuerzas que actúan a uno u otro lado de la sección es perpendicular al plano XY y se llama momento flector M a su única componente según el eje z . Las otras dos componentes M_t y M_y son nulas por simetría respecto al plano medio.

Al referirnos a los esfuerzos en piezas de plano medio adoptaremos el siguiente convenio de signos, que se muestra en la Figura 2.11:

- El esfuerzo axial N es positivo si es de tracción (según el sentido positivo del eje x en la cara frontal) y negativo si es de compresión.
- El esfuerzo cortante T es positivo si hace girar la rebanada en sentido antihorario (según el sentido positivo del eje y en la cara frontal), y negativo en caso contrario.
- El momento flector M es positivo si es antihorario sobre la cara frontal (según el sentido positivo del eje z en la cara frontal), y negativo en caso contrario.

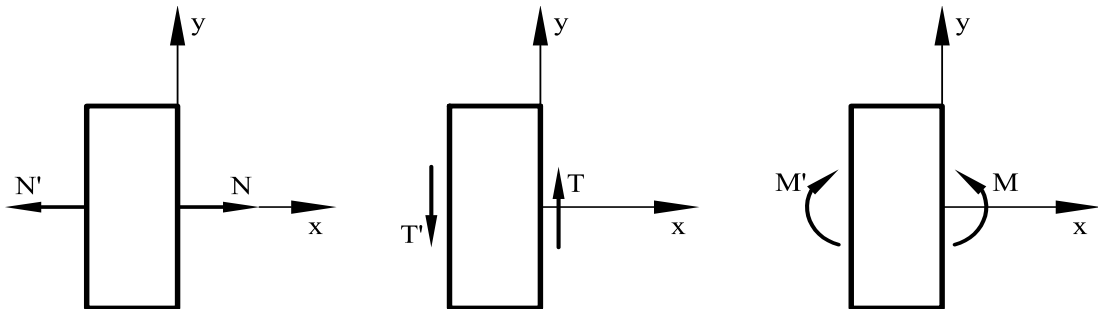


Fig. 2.11: Convenio de signos para esfuerzos en piezas de plano medio

2.8 Ecuaciones de equilibrio en piezas rectas

Consideremos el equilibrio de una rebanada diferencial de una pieza recta *de plano medio*, sobre la que actúan unas fuerzas repartidas por unidad de longitud, de componentes (p_x, p_y) según los ejes coordenados, aplicadas en la directriz de dicha rebanada. Tal como se muestra en la Figura 2.12, se tiene:

a) por equilibrio de fuerzas según el eje x :

$$-N + p_x dx + (N + dN) = 0 \quad \Rightarrow \quad p_x = -\frac{dN}{dx} \quad (2.10)$$

b) por equilibrio de fuerzas según el eje y :

$$-T_y + p_y dx + (T_y + dT_y) = 0 \quad \Rightarrow \quad p_y = -\frac{dT_y}{dx} \quad (2.11)$$

c) por equilibrio de momentos respecto al centro de gravedad de la cara frontal, y despreciando el término de segundo orden debido a las fuerzas repartidas:

$$-M_z + T_y dx + (M_z + dM_z) - p_y \frac{dx^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_y = -\frac{dM_z}{dx} \quad (2.12)$$

Estas ecuaciones establecen relaciones diferenciales entre la ley de cargas y las leyes de esfuerzos de una viga recta de plano medio. En casos sencillos, estas relaciones pueden integrarse directamente para calcular las leyes de esfuerzos. En casos más complejos, estas relaciones sirven de ayuda para calcular o dibujar dichas leyes.

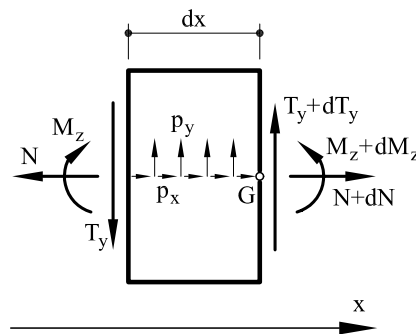


Fig. 2.12: Acciones sobre una rebanada de pieza recta

La generalización de las ecuaciones diferenciales de equilibrio de la rebanada para una viga de directriz recta general (no de plano medio), sometida a unas fuerzas repartidas por unidad de longitud de componentes (p_x, p_y, p_z) según el triedro local de referencia se pueden obtener de forma análoga, y son:

$$\begin{aligned} p_x &= -\frac{dN}{dx} & p_y &= -\frac{dT_y}{dx} & p_z &= -\frac{dT_z}{dx} \\ T_y &= -\frac{dM_z}{dx} & T_z &= +\frac{dM_y}{dx} \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.9 Apoyos y enlaces en estructuras de plano medio

2.9.1 Apoyos

Se llama *apoyo* a todo dispositivo destinado a unir una estructura al medio de sustentación. Los apoyos cumplen la doble función de impedir o limitar los movimientos de las estructuras y de transmitir las cargas que éstas soportan al medio de sustentación.

Se describen, a continuación, los tipos de apoyo más usuales en estructuras de plano medio. Dado que una sección de una pieza de plano medio tiene tres grados de libertad, dos traslaciones independientes en el plano medio y un giro perpendicular a éste, existen varios tipos de apoyo, según coarten uno, dos o los tres grados de libertad de la sección de apoyo. Por cada grado de libertad coartado, el apoyo transmite a la estructura una *reacción* que impide el movimiento. Estas reacciones son, naturalmente, iguales y de sentidos opuestos a las fuerzas que la estructura transmite al medio de sustentación.

(a) Apoyo simple o articulado móvil

Este tipo de apoyo sólo coarta el movimiento de la sección de apoyo en una dirección, permitiendo la traslación en la dirección perpendicular y el giro de la sección de apoyo (Figura 2.13). La reacción que produce es una fuerza perpendicular a la dirección de rodadura, o sea, al movimiento permitido. Asociada a un apoyo simple se introduce, por tanto, una sola incógnita, el módulo de la reacción, ya que su posición y dirección son conocidas.

(b) Apoyo fijo o articulación

Este tipo de apoyo impide totalmente el movimiento de traslación de la sección de apoyo, pero permite el giro (Figura 2.14). La reacción que produce es una fuerza de dirección y módulo desconocidos. Se introducen, pues, dos incógnitas: las componentes de la reacción respecto a dos ejes perpendiculares cualesquiera.

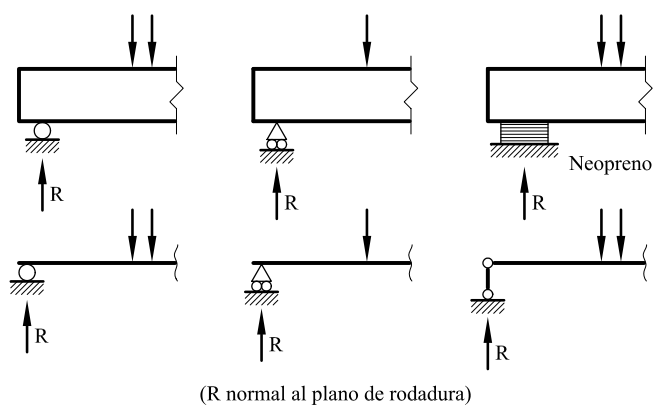


Fig. 2.13: Apoyo simple o móvil

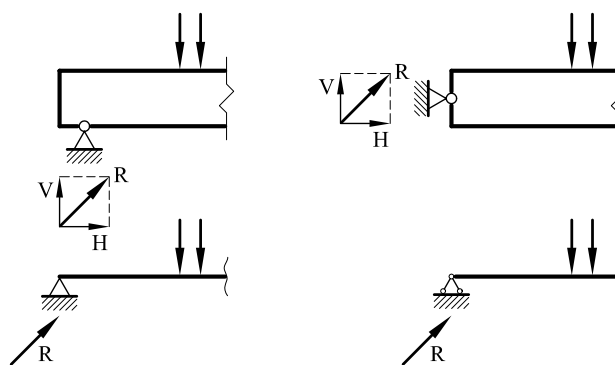


Fig. 2.14: Apoyo fijo o articulación

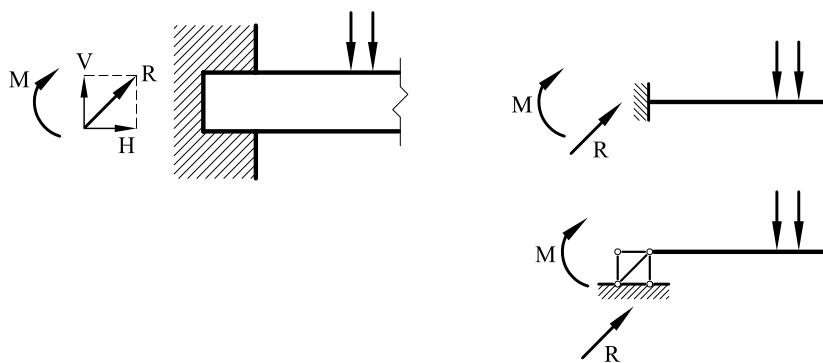


Fig. 2.15: Empotramiento

(c) Empotramiento

Este tipo de apoyo impide todo movimiento de la sección de apoyo, tanto de traslación como de giro (Figura 2.15). La reacción que se produce es una fuerza de posición, dirección y módulo desconocidos. Se introducen, pues, tres incógnitas: dos componentes de la reacción y el momento sobre la sección de apoyo.

2.9.2 Enlaces

Se llama *enlace* o *nudo* a todo dispositivo destinado a unir entre sí las diferentes piezas que forman una estructura. Los enlaces cumplen la doble función de impedir o limitar los movimientos *relativos* de unas piezas respecto a otras, y de transmitir las cargas que unas soportan a las demás. Por cada grado de libertad coartado a la sección de enlace, éste transmite a las piezas concurrentes una reacción interna. Estas reacciones son iguales y de sentidos opuestos en las dos piezas que se unen en la sección de enlace. Se describen, a continuación, los tipos de enlaces más usuales en estructuras de plano medio.

(a) Enlace deslizante

Este tipo de enlace sólo coarta el movimiento relativo en una dirección, permitiendo la traslación en la dirección perpendicular y el giro de la sección de enlace (Figura 2.16). La reacción que produce es un par de fuerzas, iguales y opuestas, perpendiculares al movimiento permitido. Se introduce, por tanto, una sola incógnita: el módulo de las reacciones.

(b) Articulación o nudo articulado

Este tipo de enlace impide totalmente la traslación relativa de la sección de enlace, pero permite el giro relativo de la misma (Figura 2.17). La reacción que produce es un par de fuerzas de dirección y módulo desconocidos. En una articulación interna se introducen, pues, dos incógnitas: las componentes de la reacción respecto a dos ejes perpendiculares cualesquiera. El momento flector es necesariamente nulo en una articulación.

(c) Empotramiento o nudo rígido

Este tipo de enlace impide todo movimiento de la sección de enlace, tanto de traslación como de giro (Figura 2.18). La reacción que produce es un par de fuerzas de posición, dirección y módulo desconocidos. En un nudo rígido se introducen, por tanto, tres incógnitas: dos componentes de la reacción y el momento de la sección de enlace.

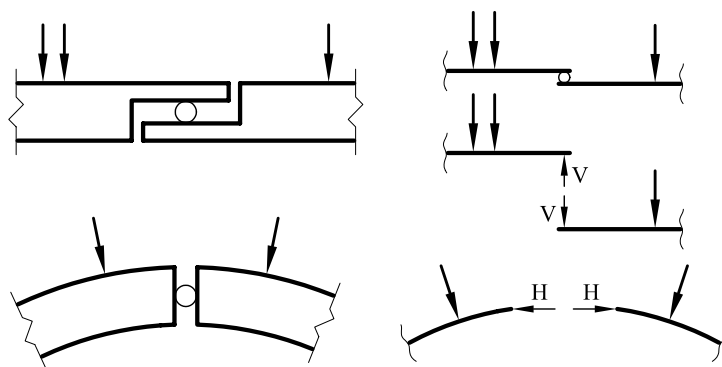


Fig. 2.16: Enlace deslizable

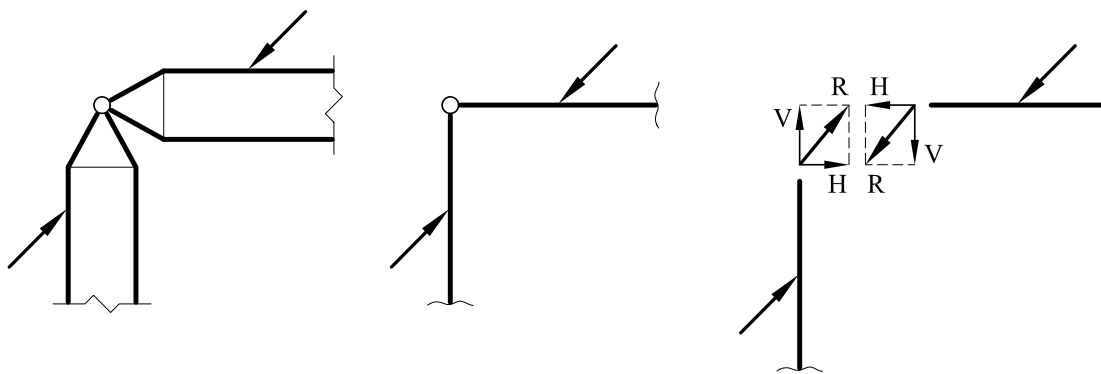


Fig. 2.17: Articulación interna o nudo articulado

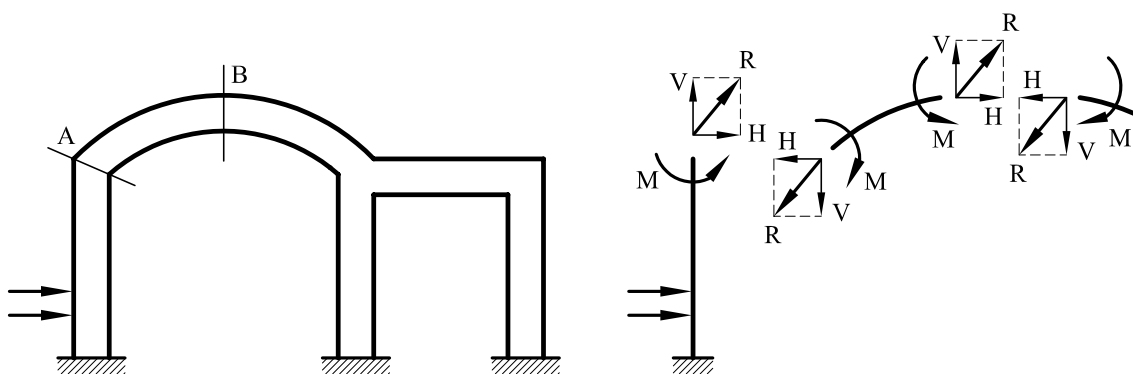


Fig. 2.18: Empotramiento o nudo rígido

Los apoyos y enlaces considerados para estructuras de plano medio pueden fácilmente generalizarse para estructuras espaciales. En este caso, el número de grados de libertad de la sección es seis (tres traslaciones y tres rotaciones), y por tanto, el número de tipos de apoyos y enlaces posibles es mucho mayor.

2.10 Estructuras isostáticas e hiperestáticas

Las fuerzas (acciones y reacciones) que actúan sobre una estructura deben estar en equilibrio estático. Esto significa que deben formar un sistema de fuerzas de resultante nula y de momento resultante nulo; por tanto, deben cumplir las ecuaciones que se conocen con el nombre de *ecuaciones de la estática*, que, en forma vectorial, pueden escribirse como:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad (2.14a)$$

$$\sum_i \vec{M}_i^o = 0 \quad (2.14b)$$

donde \vec{F}_i representa a cada una de las fuerzas que actúan sobre la estructura, \vec{M}_i^o representa el momento de cada una de las fuerzas respecto de un punto arbitrario O y el símbolo \sum_i representa la suma sobre todas las fuerzas i .

En el caso de estructuras planas cargadas en su plano, las anteriores ecuaciones vectoriales se reducen a tres ecuaciones escalares de la forma:

$$\sum_i (F_x)_i = 0 \quad ; \quad \sum_i (F_y)_i = 0 \quad ; \quad \sum_i (M_z)_i^o = 0 \quad (2.15)$$

donde los ejes x e y están sobre el plano de la estructura y el eje z es perpendicular a éstos.

Pero la condición de equilibrio estático, y las correspondientes ecuaciones que lo expresan matemáticamente no son sólo aplicables a la estructura considerada en su conjunto, sino que debe satisfacerse también para cada parte integrante de ella, siempre que se consideren de forma explícita las fuerzas y momentos que el resto de la estructura ejerce sobre la parte considerada. En particular, las piezas que forman una estructura de barras deben estar en equilibrio, siempre que se consideren las fuerzas y momentos de extremo de barra que la estructura ejerce sobre las piezas. Análogamente, los nudos de la estructura deben estar en equilibrio bajo la acción de las fuerzas y momentos que actúan en los extremos de las barras que concurren en ellos.

En Mecánica de Estructuras se llama *resolver* una estructura a calcular el valor de los esfuerzos que actúan sobre cada una de las secciones de todas las piezas que componen la estructura. Cuando este cálculo puede realizarse íntegramente utilizando sólo las

ecuaciones de la estática, la estructura se llama *isostática* o *estáticamente determinada*. En caso contrario, se le llama *hiperestática* o *estáticamente indeterminada*.

En la Figura 2.19 se muestran dos ejemplos de estructuras isostáticas. En ambos casos, las incógnitas que implican las reacciones exteriores y los esfuerzos que actúan sobre una sección cualquiera de la estructura pueden hallarse utilizando sólo las ecuaciones (2.15). Por el contrario, en la Figura 2.20 se muestran dos ejemplos de estructuras hiperestáticas. En ambos casos, las incógnitas que implican las reacciones exteriores no pueden determinarse utilizando sólo las ecuaciones (2.15), ya que su número es superior que el de ecuaciones.

Las estructuras formadas por varias piezas pueden ser estáticamente indeterminadas, a pesar de que la totalidad de las reacciones exteriores puedan determinarse por consideraciones de equilibrio. Es decir, que aunque se conozcan las reacciones exteriores es imposible determinar los esfuerzos en todas las secciones. A estas estructuras se les llama *internamente hiperestáticas* y para poder resolverlas hay que suprimir enlaces internos y sustituirlos por sus reacciones internas equivalentes.

Así, en la Figura 2.21a se muestran dos ejemplos de estructuras que, si bien son externamente isostáticas, son, sin embargo, internamente hiperestáticas. Las dos estructuras de la Figura 2.21b son hiperestáticas tanto externa como internamente.

Es, por tanto, necesario definir el grado de hiperestatismo de una estructura con independencia de si el origen de éste es la indeterminación de las reacciones en los apoyos o en los enlaces internos. De una forma general, se define el *grado de hiperestatismo* de una estructura como la diferencia:

$$h = n - p e \quad (2.16)$$

donde n es el número de reacciones (externas o internas) que hay que conocer para poder determinar los esfuerzos actuantes en cualquier sección de la estructura, e es el número de ecuaciones de la estática y p es el número de partes en que queda dividida la estructura al hacer los cortes necesarios para poder determinar los esfuerzos. Cada una de las partes resultantes al dividir la estructura debe ser isostática, y debe, por tanto, satisfacer independientemente las ecuaciones de equilibrio estático.

Una vez calculado el valor h , para

$$\begin{aligned} h = 0 & \quad \text{la estructura es isotática,} \\ h > 0 & \quad \text{la estructura es hiperestática de grado } h, \\ h < 0 & \quad \text{la estructura es un mecanismo de grado } h. \end{aligned}$$

En el Capítulo 1 del Libro 2 de esta obra se trata de nuevo el tema de la determinación del grado de hiperestatismo de las estructuras y se presentan algunos ejemplos ilustrativos.

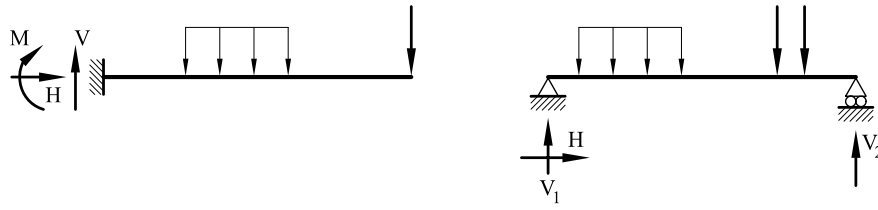


Fig. 2.19: Estructuras isostáticas

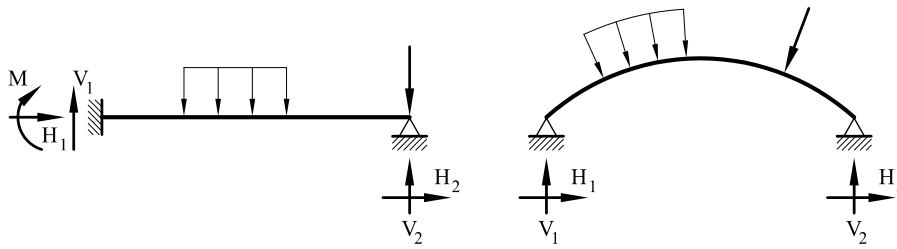


Fig. 2.20: Estructuras hiperestáticas

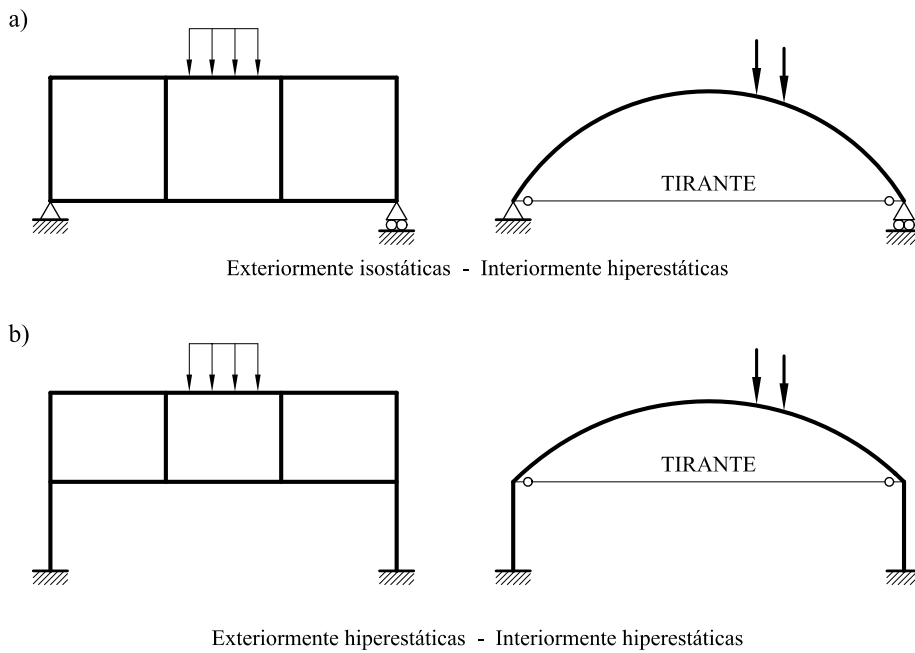


Fig. 2.21: Concepto de hiperestatismo interno

2.11 Leyes de esfuerzos

En las estructuras isotáticas es posible calcular la fuerza y momento resultantes, \vec{R} y \vec{M} , sobre una sección S cualquiera de la estructura utilizando únicamente las ecuaciones de equilibrio estático. De acuerdo con lo expuesto en la Sección 2.5, se definen los *esfuerzos* sobre la sección como las proyecciones de estas resultantes sobre un triedro cartesiano dextrógiro xyz , con origen en el centro de gravedad G de la sección S , en el que el eje x es normal a la sección S y tangente a la directriz de la viga, y los ejes (y, z) son los ejes principales de inercia de la sección S .

Así, proyectando la fuerza resultante \vec{R} sobre los ejes (x, y, z) , se definen el esfuerzo axil N , el esfuerzo cortante T_y y el esfuerzo cortante T_z , respectivamente. Análogamente, proyectando el momento resultante \vec{M} sobre los ejes (x, y, z) , se definen el momento torsor M_t , el momento flector M_y y el momento flector M_z , respectivamente.

Si la pieza prismática es de plano medio, se pueden tomar los ejes locales de referencia (x, y, z) en todas las secciones de tal manera que el plano medio de la pieza contenga a los ejes x e y , ya que es un plano de simetría de éstas. En estas condiciones, las componentes de \vec{R} y \vec{M} se reducen al esfuerzo axil N , el esfuerzo cortante T_y y el momento flector M_z , exclusivamente.

Se llama *leyes de esfuerzos* o *diagramas de esfuerzos* a la representación gráfica de la variación de dichos esfuerzos a lo largo de las piezas de la estructura. Esta representación permite determinar, para cada pieza, las secciones de ésta en las que los esfuerzos alcanzan sus valores máximos. Esta es una información imprescindible para el dimensionamiento de las piezas o, una vez dimensionadas, para la comprobación *a posteriori* de que se cumplen los criterios de resistencia.

En una estructura isostática la determinación de las leyes de esfuerzos sigue los pasos siguientes:

1. determinación de las reacciones exteriores,
2. determinación de la variación de los diferentes esfuerzos en cada pieza,
3. determinación de los valores máximos de los esfuerzos, a nivel de pieza y estructura.

Las relaciones diferenciales entre las leyes de cargas aplicadas y los esfuerzos obtenidos en la Sección 2.8 son de gran utilidad a la hora de definir la forma que tienen las leyes de esfuerzos en cada barra.

A continuación, se desarrollan algunos ejemplos para piezas rectas y estructuras de plano medio. Se mantendrá la convención de signos adoptada al definir el equilibrio de la rebanada de la pieza prismática recta (Sección 2.8).

Ejemplo 2.10.1

Calcular y dibujar las leyes de esfuerzos de la viga ABC de la Figura 2.22 sometida a la acción de la carga p uniformemente repartida en el tramo BC .

Cálculo de las reacciones

Teniendo en cuenta las condiciones de equilibrio de la estática (suma de fuerzas verticales igual cero y suma de momentos respecto al apoyo A igual a cero, respectivamente), puede escribirse:

$$V_A + V_C = p \frac{l}{2} \quad ; \quad V_C l = p \frac{l}{2} \frac{3l}{4}$$

Por tanto, las reacciones en los apoyos A y C son :

$$V_A = \frac{1}{8} pl \quad ; \quad V_C = \frac{3}{8} pl$$

Ley de momentos flectores

La ley de momentos flectores se obtiene calculando, para una sección dada, el momento resultante en la sección de las fuerzas aplicadas a un lado de la misma. En el tramo AB , para una sección a una distancia x del apoyo A , y calculando dorsalmente, se tiene:

$$M(x) = V_A x = \frac{1}{8} plx$$

o sea, una ley lineal a lo largo del tramo AB , con un máximo en la sección $x = l/2$, de valor $M_B = pl^2/16$. En el tramo BC , para una sección a una distancia x del apoyo A , y calculando dorsalmente, puede escribirse:

$$M(x) = V_A x - \frac{p}{2} \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 = \frac{pl}{8} \left[-\frac{4x^2}{l} + 5x - l\right]$$

En este caso, la ley de variación del momento flector es parabólica y la distancia a la que se produce el valor máximo se obtiene derivando respecto a la variable x e igualando a cero:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{pl}{8} \left[-\frac{8x}{l} + 5\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5l}{8}$$

y se tiene:

$$M_{\max} = M\left(x = \frac{5l}{8}\right) = \frac{9}{128} pl^2$$

Obsérvese que la ley de flectores es continua en el punto B , y también lo es su derivada.

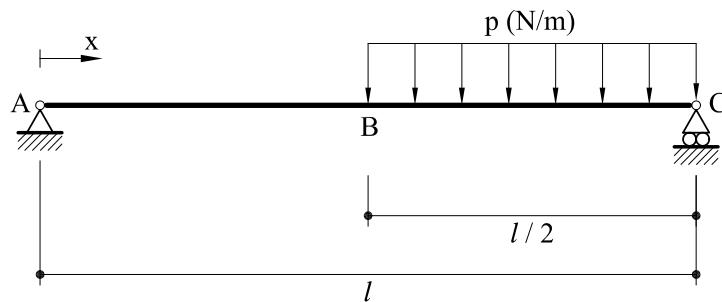


Fig. 2.22: Estructura del Ejemplo 2.10.1

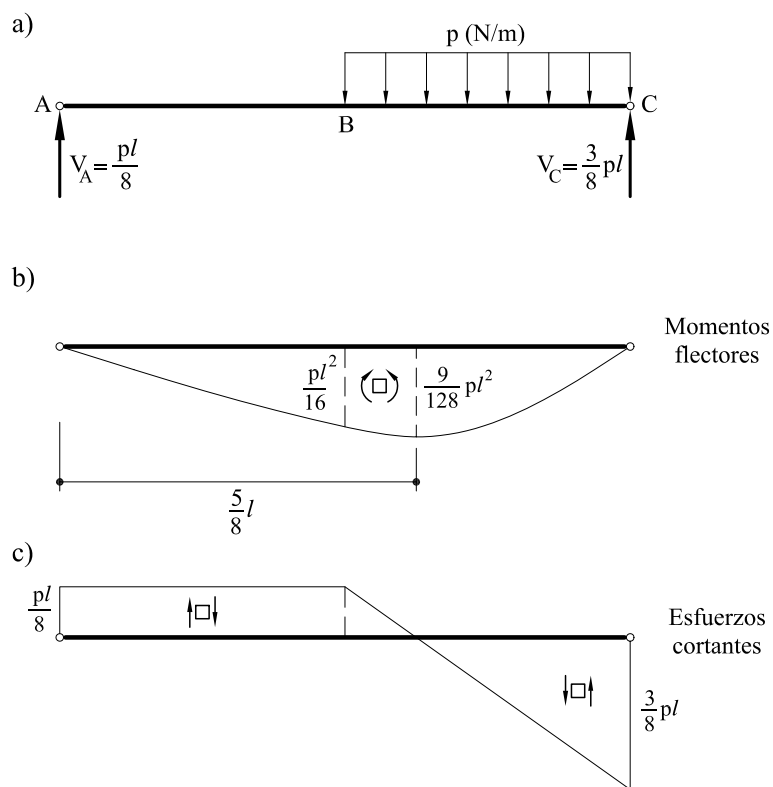


Fig. 2.23: Leyes de esfuerzos del Ejemplo 2.10.1

Ley de esfuerzos cortantes

Calculemos la resultante \vec{R} en una sección cualquiera de la viga sumando las fuerzas aplicadas a un lado de la sección. En este caso la resultante tiene como única componente el esfuerzo cortante T_y y, por lo tanto, los axiles son nulos en toda la pieza.

En el tramo AB , calculando dorsalmente, se tiene que la ley de variación es constante de valor igual a la reacción V_A . En el tramo BC , en una sección situada a una distancia x del apoyo A , y calculando dorsalmente, la proyección de \vec{R} sobre la sección es igual a la suma de la reacción V_A más la resultante de la carga repartida comprendida entre la sección B y la sección considerada; por tanto, la ley de esfuerzo cortante es lineal. Se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Tramo } AB & : & T_y &= V_A & &= -\frac{1}{8}pl \\ \text{Tramo } BC & : & T_y &= V_A + p\left(x - \frac{l}{2}\right) & &= -\frac{5}{8}pl + px \end{aligned}$$

En las Figuras 2.23a, b y c se representan las reacciones, diagramas de momentos flectores y de esfuerzos cortantes, respectivamente. Se observa que a una variación constante del cortante le corresponde una variación lineal del flector, y que a una variación lineal del cortante le corresponde una variación parabólica del flector.

Ejemplo 2.10.2

La viga $ABCDE$ de la Figura 2.24 está sometida a una carga puntual P de 200 kN en la sección B y a una carga uniformemente repartida p de 20 kN /m en el tramo CE . Calcular y dibujar las leyes de esfuerzos.

Cálculo de reacciones

Aplicando las condiciones de equilibrio (suma nula de fuerzas verticales, suma nula de momentos respecto al punto A y momento flector nulo en las rótulas B y D), y trabajando en kN y m, pueden escribirse las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} V_A + V_C + V_E &= 400 \\ M_A + 10V_C + 20V_E &= 4.000 \\ M_A - 5V_A &= 0 \\ 5V_E - 250 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones, se obtienen los valores de las reacciones en el empotramiento A y en los apoyos C y E :

$$\begin{aligned} V_A &= 100 \text{ kN} & V_C &= 250 \text{ kN} \\ M_A &= 500 \text{ kN} \cdot \text{m} & V_E &= 50 \text{ kN} \end{aligned}$$

Ley de momentos flectores

En el tramo AB , cortando la estructura a una distancia x del apoyo A y calculando el momento flector dorsalmente se obtiene:

$$M(x) = -M_A + V_A x = -500 + 100x$$

que es una ley lineal. Para $x = 5$ m se tiene $M_B = 0$, como corresponde a una rótula. En el tramo BC se tiene:

$$M(x) = -M_A + V_A x - 200(x - 5) = 500 - 100x$$

que es también una ley lineal. Para $x = 10$ m se tiene el momento en el apoyo C , $M_C = -500$ kN·m. En el tramo CE , se tiene que:

$$\begin{aligned} M(x) &= 500 - 100x + V_C (x - 10) - \frac{p}{2}(x - 10)^2 \\ &= -3.000 + 350x - 10x^2 \end{aligned}$$

que es una ley parabólica, con su valor máximo situado a una distancia x_{\max} del apoyo A que puede determinarse igualando a cero la derivada de la ley de momentos respecto a la variable x . En este caso, $x_{\max} = 17,5$ m y el valor del momento correspondiente es $M_{\max}(x = x_{\max}) = 62,5$ kN·m.

Ley de esfuerzos cortantes

Calculando la resultante de las fuerzas situadas a un lado de la sección y determinando la componente paralela a la misma se obtiene la variación del esfuerzo cortante en cada tramo de la estructura. En el tramo AB , y calculando dorsalmente, dicha resultante es constante e igual a V_A :

$$T_y = V_A = -100 \text{ kN}$$

En el tramo BC , la resultante de las fuerzas a un lado de la sección es también un valor constante, igual a la suma de la reacción V_A más la fuerza aplicada en B :

$$T_y = V_A + 200 = 100 \text{ kN}$$

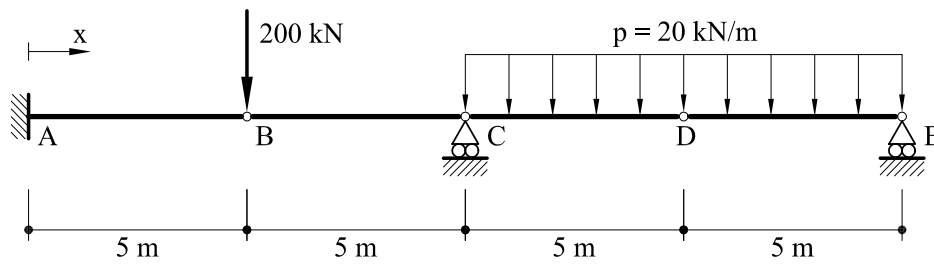


Fig. 2.24: Estructura del Ejemplo 2.10.2

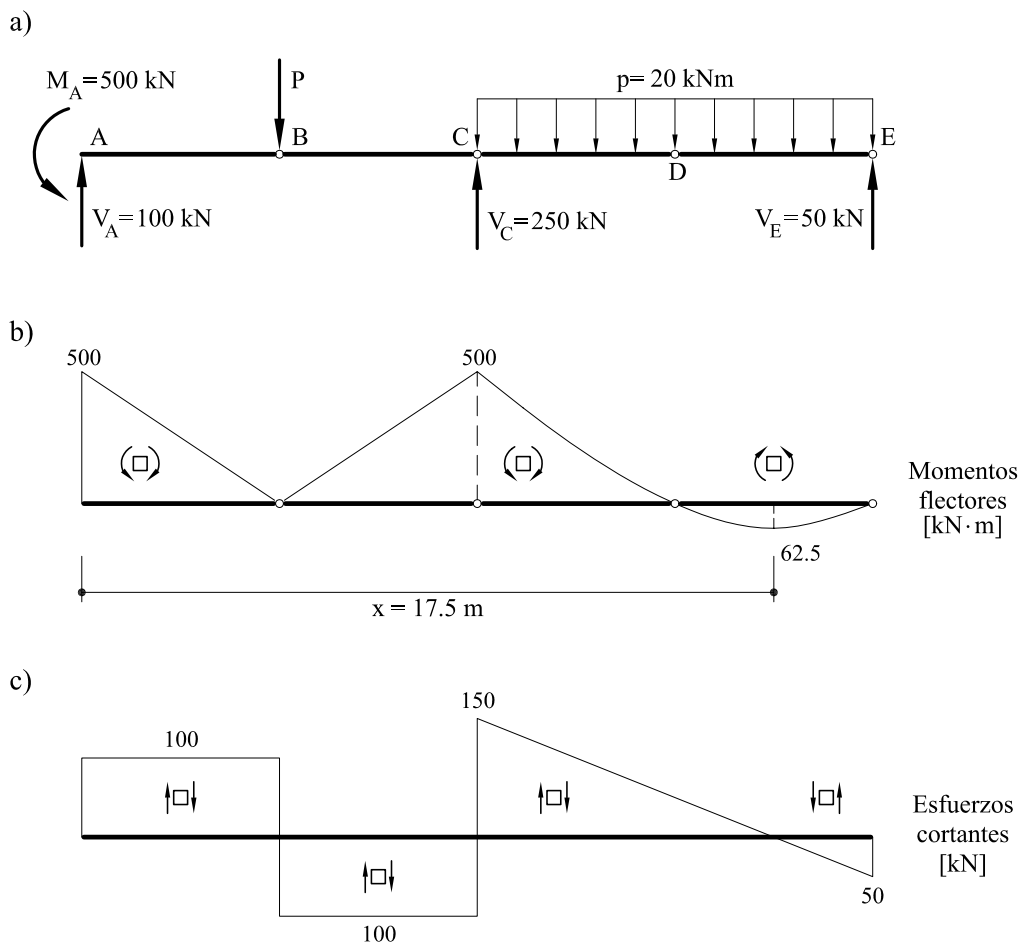


Fig. 2.25: Leyes de esfuerzos del Ejemplo 2.10.2

Por último, en el tramo CE y siguiendo el mismo procedimiento se obtiene:

$$T_y = 100 - 250 + 20(x - 10) = -350 + 20x$$

que es una ley lineal. Nótese que en cada tramo la ley de esfuerzos cortantes coincide con la derivada de la ley de momentos flectores respecto a la variable x (cambiada de signo), tal como exige el equilibrio de la rebanada.

En las Figuras 2.25a, b y c se representan las reacciones y las leyes de esfuerzos de la viga ABC .

Ejemplo 2.10.3

La estructura $ABCD$ de la Figura 2.26 está empotrada en la sección A y sometida a una carga vertical p de 30 kN/m, uniformemente repartida sobre el eje de la viga CBD , inclinada un ángulo α respecto a la horizontal. Calcular y dibujar las leyes de esfuerzos.

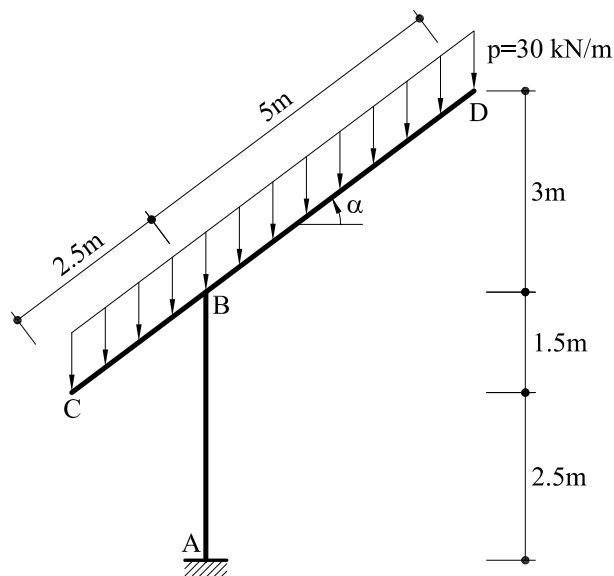


Fig. 2.26: Estructura del Ejemplo 2.10.3

Cálculo de reacciones

Partiendo de las ecuaciones de equilibrio se calculan en primer lugar las reacciones externas. Imponiendo que la suma de fuerzas verticales y la suma de momentos en el empotramiento A sean cero, se tiene:

$$\begin{aligned} R_A &= 30 \cdot 7,5 && = 225 \text{ kN} \\ M_A &= 225 \cdot (5 - 3,75) \cos \alpha = 225 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

donde α es el ángulo de inclinación de las barras BC y BD .

Ley de momentos flectores

Calculando dorsalmente se tiene que la ley de momentos flectores en el pilar AB es constante y de valor $M_A = 225 \text{ kN} \cdot \text{m}$. En la viga CB , para una sección a una distancia s del extremo C (ver Figura 2.27b), se tiene:

$$M(x) = -30 s \frac{x}{2} = -15 s x = -15 \frac{x^2}{\cos \alpha}$$

La ley de flectores es parabólica y para $x = 2 \text{ m}$ se obtiene $M_B = -75 \text{ kN} \cdot \text{m}$, valor del momento flector en la sección B del tramo CB . Análogamente, en la viga BD , para una sección a una distancia s_1 del extremo D (ver Figura 2.27b) se obtiene:

$$M(x_1) = -30 s_1 \frac{x_1}{2} = -15 s_1 x_1 = -15 \frac{x_1^2}{\cos \alpha}$$

ley parabólica que para $x_1 = 4 \text{ m}$ toma el valor del momento flector en la sección B del tramo BD , $M_B = -300 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

Ley de esfuerzos cortantes

Calculando dorsalmente se tiene que la ley de esfuerzo cortante en el pilar AB es cero. Nótese que la ley de momentos flectores en el pilar AB es constante y, en consecuencia, su derivada primera es nula.

En los tramos CB y BD se tiene, proyectando la resultante de fuerzas sobre el plano de la sección:

$$\begin{aligned} T_{CB} &= 30 s \cos \alpha && = 30x \\ T_{BD} &= (30 s - 225) \cos \alpha = 30x - 225 \cos \alpha \end{aligned}$$

Ambas leyes son lineales, como corresponde a una variación parabólica del flector.

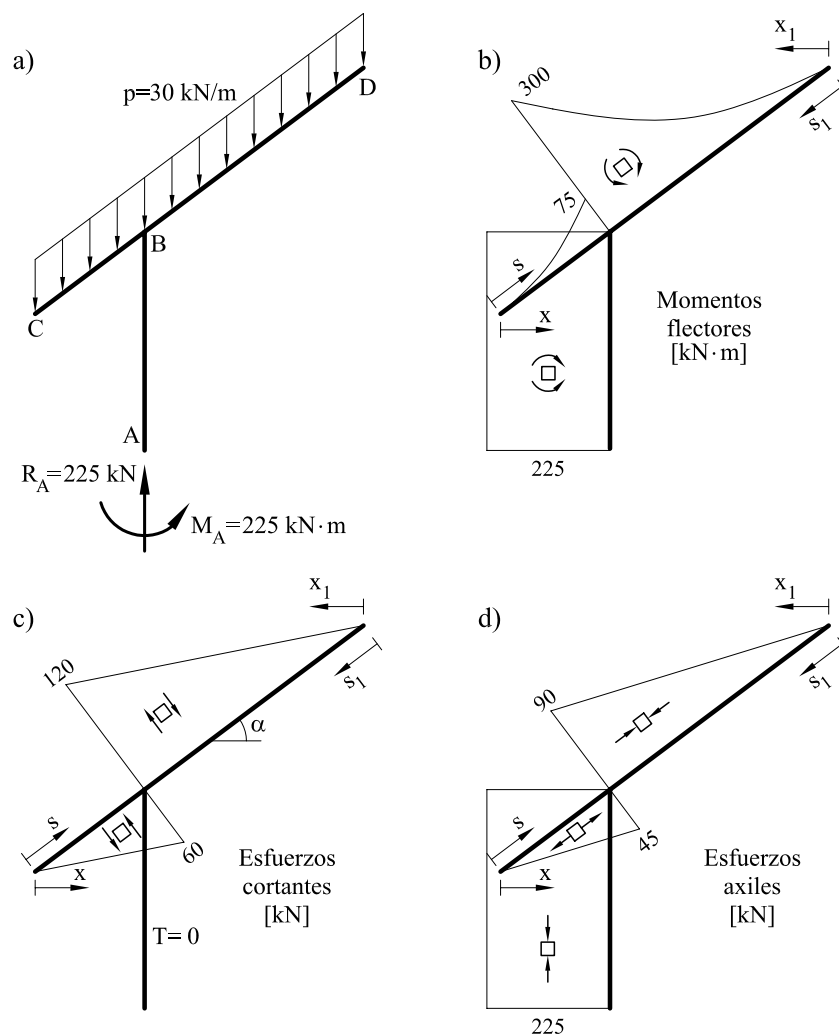


Fig. 2.27: Leyes de esfuerzos del Ejemplo 2.10.3

Ley de esfuerzos axiales

Calculando dorsalmente se tiene que la ley de esfuerzo axial en el pilar AB es de compresión, constante y de valor $N = 225 \text{ kN}$.

En los tramos CB y BD la ley de axiales se obtiene proyectando la resultante de fuerzas sobre la normal al plano de la sección. Se tiene:

$$N_{CB} = 30 s \sin \alpha$$

$$N_{BD} = (30 s - 225) \sin \alpha$$

Ambas leyes son lineales, como corresponde a una carga uniforme. Obsérvese que, sobre cada sección, la composición vectorial de los correspondientes esfuerzos cortante y axil es igual a la resultante de fuerzas \vec{R} sobre la sección, que es una fuerza vertical.

En las Figura 2.27 se representan las reacciones y las leyes de esfuerzos de la estructura.

Ejemplo 2.10.4

El pórtico de la Figura 2.28 está sometido a una carga p de 20 kN/m, uniformemente distribuida según la proyección horizontal del dintel BC , y a dos fuerzas concentradas horizontales de 30 kN que actúan en las secciones E y F (estas fuerzas puntuales representan un cable postesado anclado en los nudos E y F). Calcular y dibujar las leyes de esfuerzos.

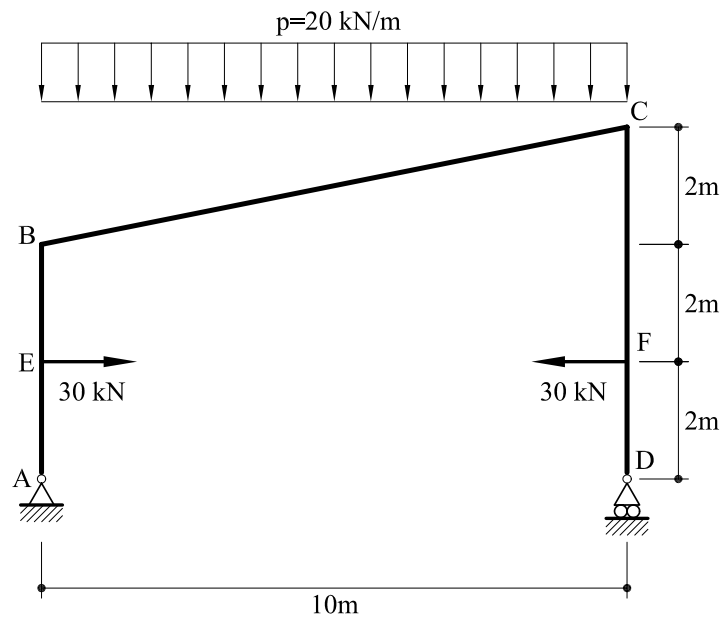


Fig. 2.28: Estructura del Ejemplo 2.10.4

Cálculo de reacciones

Se calculan en primer lugar las reacciones en los apoyos utilizando las condiciones de equilibrio. Se obtiene que la reacción horizontal H_A es nula y:

$$\begin{aligned} V_A + V_D &= 200 \\ 10V_D &= 20 \cdot 10 \cdot 5 \end{aligned}$$

y, por lo tanto:

$$V_A = 100 \text{ kN} \quad ; \quad V_D = 100 \text{ kN}$$

Ley de momentos flectores

En los tramos AE y DF de ambos pilares la ley de momentos flectores es nula. Continuando con el pilar AB , a partir de la sección E , y calculando dorsalmente, se obtiene:

$$M(s) = -30s$$

siendo s la distancia desde E . Es una ley de variación lineal que para $s = 2$ m proporciona el valor del momento flector en la sección B , $M_B = -60$ kN·m.

Análogamente, en el pilar DC se obtiene:

$$M(s_1) = -30s_1$$

siendo s_1 la distancia desde F . Es una ley de variación lineal que en la sección C ($s_1 = 4$ m) toma el valor $M_C = -120$ kN·m.

En el dintel BC , para una sección a una distancia x de la sección B , se tiene

$$M(x) = V_A x - 30 \left(2 + \frac{2}{10} x \right) - x^2 = -60 + 94x - 10x^2$$

que es una ley parabólica, con su valor máximo situado a una distancia x_{\max} de la sección B , que puede determinarse igualando a cero la derivada de la ley de momentos respecto a la variable x . En este caso, $x_{\max} = 4,7$ m y el valor del momento correspondiente es $M_{\max}(x = x_{\max}) = 160,9$ kN·m.

Ley de esfuerzos cortantes

El esfuerzo cortante en el primer tramo AE del pilar AB es nulo. A partir de la sección E el valor del esfuerzo cortante coincide con la fuerza horizontal aplicada en dicha sección. Por tanto, la ley es constante y de valor:

$$T_{AB} = 30 \text{ kN}$$

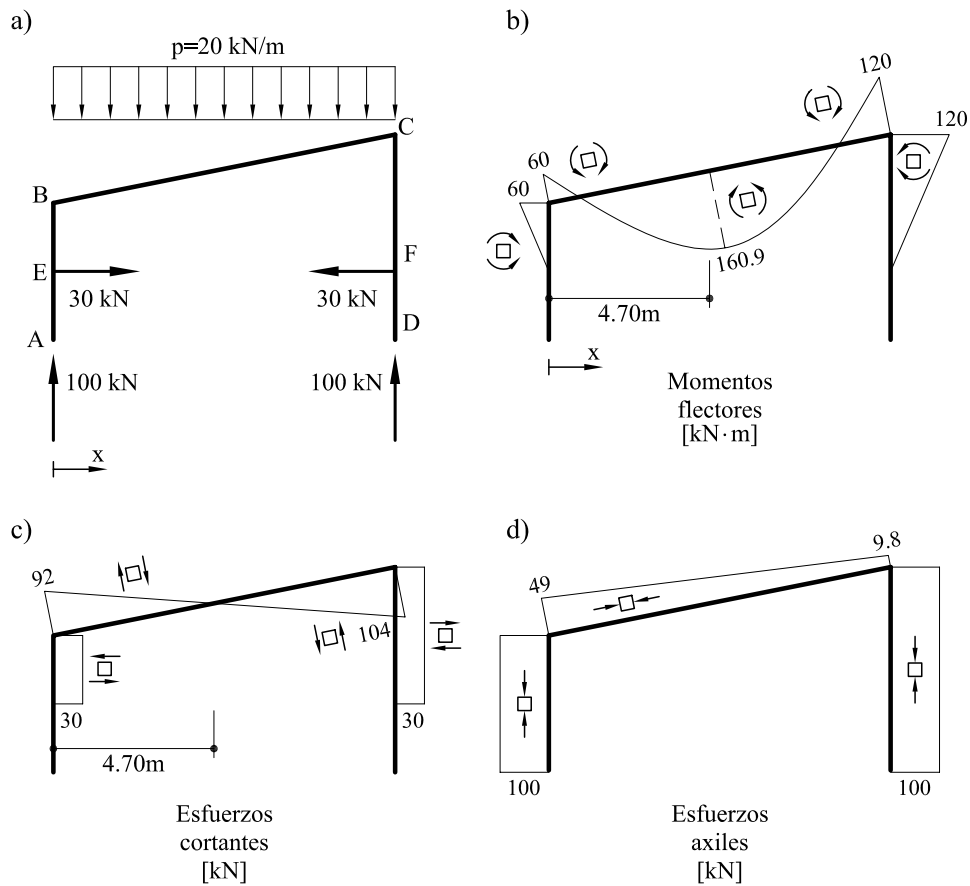


Fig. 2.29: Leyes de esfuerzos del Ejemplo 2.10.4

Análogamente, en el pilar DC se tiene un valor de cortante nulo hasta la sección F . En el tramo de pilar FC la ley de esfuerzo cortante es constante, de valor coincidente con el valor de la fuerza horizontal aplicada en F :

$$T_{DC} = 30 \text{ kN}$$

En el tramo BC , para una sección situada a una distancia x del extremo B la proyección de la resultante de las fuerzas sobre el plano de la sección es igual a:

$$T_{BC} = (-V_A + 20x) \cos \alpha + 30 \sin \alpha$$

que es una ley lineal, de valor $T_B = -92,17 \text{ kN}$ para la sección B ($x = 0$). Nótese que para $x = 4,7 \text{ m}$ el valor del esfuerzo cortante es cero, como corresponde a la sección de máximo momento en el tramo BC .

Ley de esfuerzos axiales

En los pilares AB y CD los axiles son de compresión, constantes y de valor igual a las reacciones verticales en los respectivos apoyos. Por tanto,

$$N_{AB} = N_{CD} = 100 \text{ kN}$$

En el tramo BC , calculando dorsalmente, se tiene

$$N_{BC} = (-100 + 20x) \sin \alpha - 30 \cos \alpha$$

que es una ley lineal, con los valores extremos $N_B = -49 \text{ kN}$ y $N_C = -9.8 \text{ kN}$ para las secciones B y C , respectivamente.

En las Figura 2.29 se representan las reacciones y las leyes de esfuerzos de la estructura.

Ejemplo 2.10.5

Calcular y dibujar las leyes de esfuerzos para la estructura de la Figura 2.30, sometida a una fuerza horizontal F actuando en la sección D .

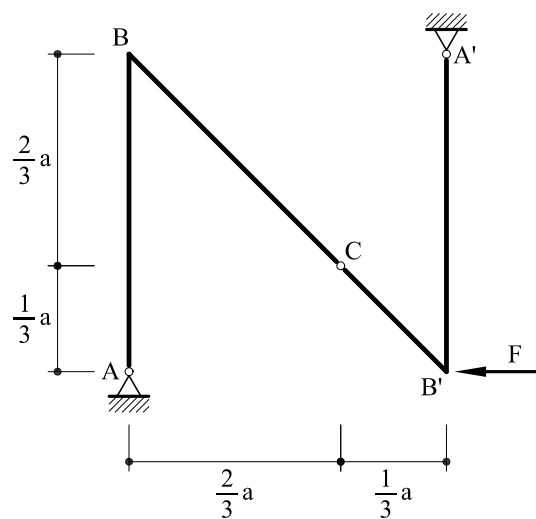


Fig. 2.30: Estructura del Ejemplo 2.10.5

Cálculo de reacciones

Se calculan en primer lugar las reacciones en los apoyos utilizando las condiciones de equilibrio y la condición de momento flector nulo en la rótula C . Se tiene (ver Figura 2.31a):

$$\begin{aligned} H_A - H_{A'} - F &= 0 \\ V_A - V_{A'} &= 0 \\ V_{A'} \frac{a}{3} + F \frac{a}{3} - H_{A'} \frac{2a}{3} &= 0 \\ V_A \frac{2a}{3} - H_A \frac{a}{3} &= 0 \end{aligned}$$

de donde:

$$V_A = V_{A'} = F \quad H_A = 2F \quad H_{A'} = F$$

Ley de momentos flectores

En el pilar AB , para una sección situada a una distancia y del apoyo A , se tiene

$$M_{AB} = -H_A y = -2Fy$$

ley de momento flector lineal, que para $y = a$, proporciona el valor del momento flector en la sección B , $M_B = -2Fa$. En el pilar $B'A'$, para una sección situada a una distancia $(a - y)$ de la sección A' se tiene

$$M_{B'A'} = H_{A'} (a - y) = F(a - y)$$

ley de momentos lineal con valor máximo $M_{B'} = Fa$. En el tramo BB' , para una sección situada a una distancia x, y del apoyo A , puede escribirse

$$M_{BB'} = -H_A y + V_A x = F(x - 2y)$$

ley de momento flector lineal, con valores extremos $M_B = -2Fa$ y $M_{B'} = Fa$.

Ley de esfuerzos cortantes

Al ser lineales las leyes de flectores en todas las barras, los cortantes son uniformes en cada una de ellas. En los pilares se tiene

$$\begin{aligned} T_{AB} &= H_{A'} = 2F \\ T_{B'A'} &= H_{A'} = F \end{aligned}$$

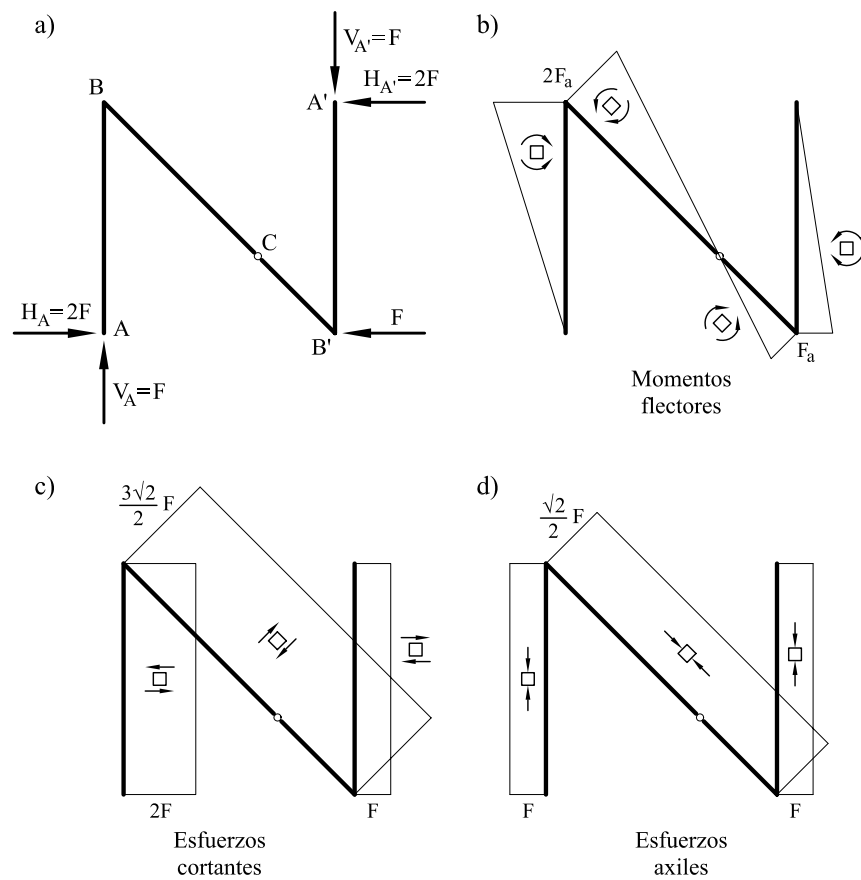


Fig. 2.31: Leyes de esfuerzos del Ejemplo 2.10.5

valores coincidentes con las reacciones horizontales. En la barra BB' se tiene

$$T_{BB'} = \frac{\sqrt{2}}{2} (V_A + H_A) = -\frac{3}{\sqrt{2}}F$$

Ley de esfuerzos axiales

Procediendo de manera similar al apartado anterior, se halla la componente de R normal a las secciones, y se obtienen los valores del esfuerzo axial, constantes en cada pieza.:

$$N_{AB} = -F \quad ; \quad N_{BB'} = -\frac{\sqrt{2}}{2}F \quad ; \quad N_{B'A'} = -F$$

En las Figura 2.31 se representan las reacciones y las leyes de esfuerzos de la estructura.

Ejemplo 2.10.6

El pórtico isostático de la Figura 2.32 está sometido a una carga p de 20 kN/m, uniformemente distribuida en el dintel BD . Calcular y dibujar las leyes de esfuerzos.

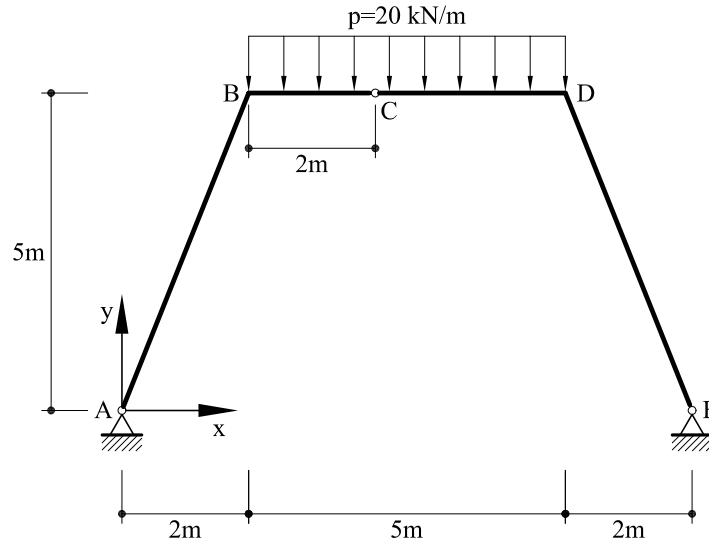


Fig. 2.32: Estructura del Ejemplo 2.10.6

Cálculo de reacciones

Se calculan en primer lugar las reacciones en los apoyos utilizando las ecuaciones de equilibrio y la condición de que el momento flector en la rótula sea nulo. Se tiene:

$$\begin{aligned} H_A &= H_E \\ V_A + V_E &= 20 \cdot 5 \\ 9V_A &= 20 \cdot 5 \cdot 4,5 \\ 4V_A - 5H_A - 20 \cdot 2 \cdot 1 &= 0 \end{aligned}$$

y, por tanto, las reacciones son:

$$V_A = 50 \text{ kN} \quad ; \quad V_E = 50 \text{ kN} \quad ; \quad H_A = H_E = 32 \text{ kN}$$

Obsérvese que las reacciones son simétricas, a pesar de la posición asimétrica de la rótula.

Ley de momentos flectores

En una sección genérica del tramo AB , utilizando los ejes de referencia (x, y) de la Figura 2.32 y calculando de forma dorsal, se tiene:

$$\begin{aligned} M_{AB} &= V_A x - H_A y \\ &= 50 x - 32 y \end{aligned}$$

ley lineal con valor máximo $M_B = -60$ kN·m. En el tramo DE , procediendo ahora frontalmente, se obtiene también una ley lineal, simétrica respecto al eje vertical que pasa por el centro del dintel:

$$\begin{aligned} M_{DE} &= V_E (9 - x) - H_E y \\ &= 50 (9 - x) - 32 y \end{aligned}$$

En el dintel BD , trabajando dorsalmente, se puede escribir:

$$\begin{aligned} M_{BD} &= V_A x - H_A y - \frac{p}{2}(x - 2)^2 \\ &= 50 x - 32 \cdot 5 - \frac{20}{2}(x - 2)^2 = -10 x^2 + 90 x - 200 \end{aligned}$$

que es una ley parabólica que se anula en la rótula y tiene valores máximos en los extremos $M_B = M_D = -60$ kN·m. El valor del flector en el centro es de 2,5 kN·m.

Obsérvese que, dada la simetría de las cargas y reacciones, los flectores en la estructura son simétricos respecto al eje vertical central.

Ley de esfuerzos cortantes

En los pilares AB y DE los cortantes son constantes, ya que la ley de flectores en ellos es lineal. Su valor se obtiene proyectando sobre la sección las componentes de la reacción en A y E , respectivamente:

$$\begin{aligned} T_{AB} &= -V_A \cos \alpha + H_A \sin \alpha = 11 \text{ kN} \\ T_{DE} &= -V_E \cos \alpha + H_E \sin \alpha = 11 \text{ kN} \end{aligned}$$

donde α es el ángulo de inclinación de las barras. En el tramo BD , calculando dorsalmente, se tiene

$$\begin{aligned} T_{BD} &= -V_A + p (x - 2) \\ &= -50 + 20 (x - 2) \end{aligned}$$

que es una ley lineal con valores extremos $T_B = -V_A$ y $T_D = V_E$, y de valor nulo en el centro del dintel, por simetría.

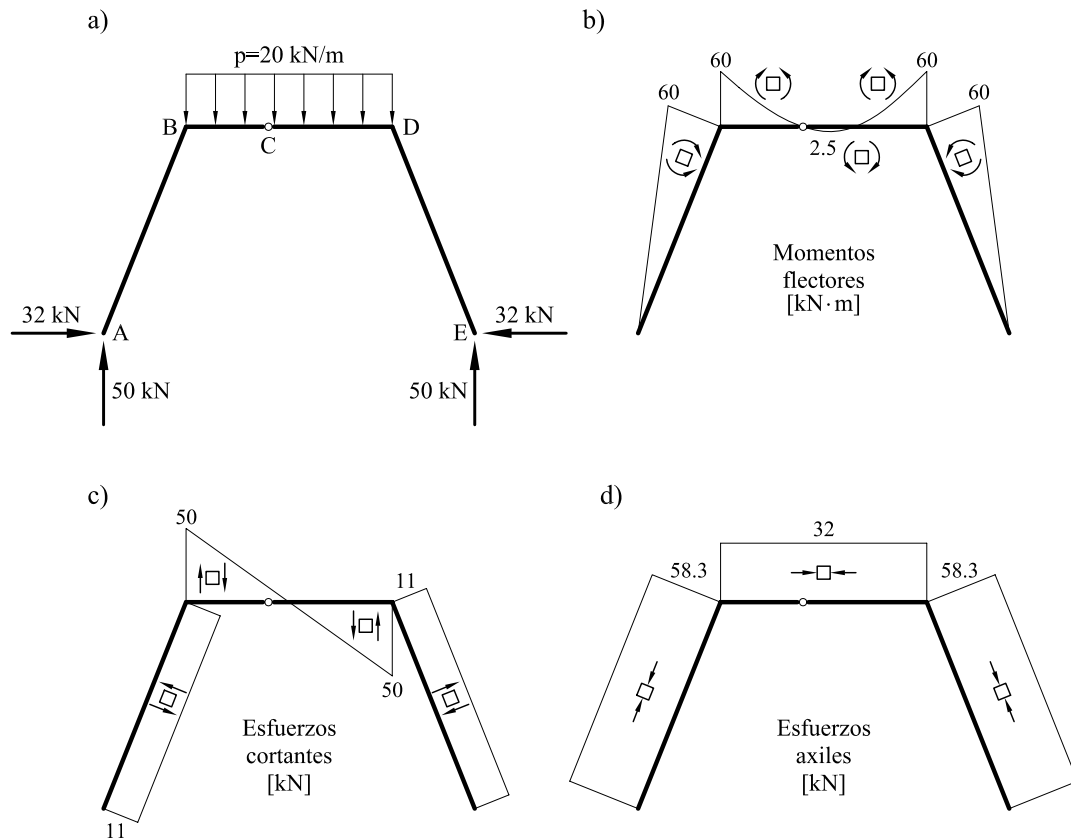


Fig. 2.33: Leyes de esfuerzos del Ejemplo 2.10.6

Ley de esfuerzos axiales

Procediendo de manera similar, se calculan los axiales en cada barra. Sobre los soportes, basta con proyectar sobre sus direcciones respectivas las reacciones horizontales y verticales de los apoyos correspondientes. En el dintel se sigue el mismo procedimiento, ya que la proyección de la carga lateral sobre la barra es nula.

Se obtienen así las leyes de esfuerzos axiales

$$N_{AB} = N_{DE} = -(V_A \sin \alpha + H_A \cos \alpha) = -58,3 \text{ kN}$$

$$N_{BD} = -H_A = -32 \text{ kN}$$

Se observa que son leyes constantes en cada tramo y, además, son simétricas.

En las Figura 2.33 se representan las reacciones y las leyes de esfuerzos de la estructura.

2.12 Resolución de estructuras hiperestáticas

Como ya se ha definido en la Sección 2.10, una estructura es hiperestática cuando el número de reacciones exteriores y/o de fuerzas internas desconocidas es mayor que el número de ecuaciones de equilibrio estático que se pueden imponer. Las ecuaciones adicionales necesarias para completar el planteamiento del problema hiperestático se encuentran considerando la deformación de la estructura, e imponiendo las necesarias condiciones de compatibilidad de movimientos. Combinando estas ecuaciones con las de equilibrio se resuelve *simultáneamente* el problema de determinar las fuerzas y los movimientos de la estructura.

Hay dos métodos básicos para obtener las ecuaciones adicionales: el *método de compatibilidad* (también llamado *método de las fuerzas* y *método de flexibilidad*) y el *método de equilibrio* (también llamado *método de los movimientos* y *método de rigidez*). El método de compatibilidad se basa en tomar a las fuerzas estáticamente indeterminadas como incógnitas del problema e imponer ecuaciones adicionales de compatibilidad de movimientos. El método de equilibrio se basa en tomar como incógnitas los movimientos de forma que cumplan las condiciones de compatibilidad e imponer ecuaciones de equilibrio para resolverlos. Ambos métodos se tratan en detalle en el Libro 2 de esta obra. En este apartado se describen sucintamente ambos métodos aplicados a la resolución de una estructura sencilla, pero estáticamente indeterminada.

2.12.1 Método de compatibilidad

El *método de compatibilidad* toma las fuerzas como incógnitas del problema. Las ecuaciones de equilibrio se escriben en función de las fuerzas aplicadas y de las reacciones. En un estructura hiperestática, el número de reacciones o fuerzas internas desconocidas excede el número de ecuaciones independientes de equilibrio en un número que, como hemos visto, se llama *grado de hiperestatismo*. Se selecciona un conjunto de fuerzas incógnita *redundantes* (reacciones o internas), se liberan las condiciones de apoyo o de enlace correspondientes, y se suponen las fuerzas redundantes actuando sobre la estructura *como si ésta fuese isostática (estructura isostática base)*. Se escribe entonces una *ecuación de compatibilidad* por cada punto donde se ha liberado un apoyo o enlace; esta ecuación debe imponer que los movimientos de la estructura “liberada” sean idénticos a los de la estructura original. Estas ecuaciones se expresan en función de las incógnitas hiperestáticas, con lo que se obtiene un sistema de ecuaciones lineales simultáneas cuya resolución permite determinar aquéllas.

En el Libro 2 de esta obra volveremos a plantear este método con más detalle, así como a estudiar su aplicación a estructuras articuladas hiperestáticas, vigas simples,

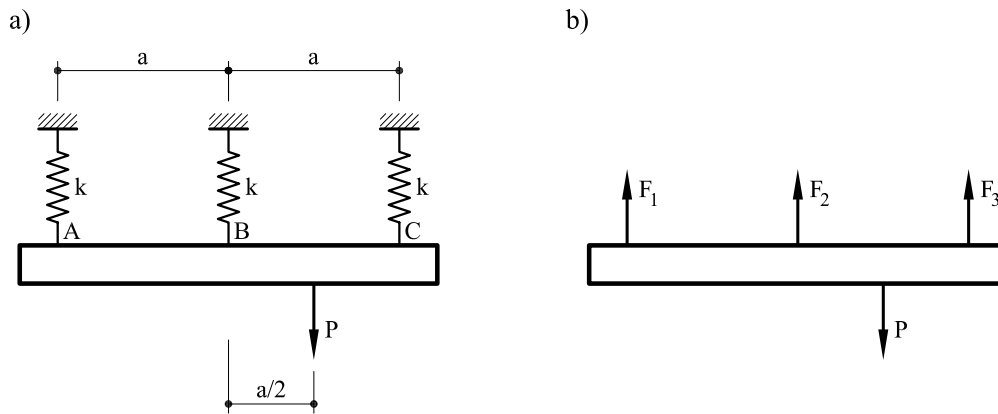


Fig. 2.34: Ejemplo de estructura hiperestática

vigas continuas y estructuras reticuladas de plano medio. Veamos ahora la aplicación de este método a través de un ejemplo sencillo.

La estructura de la Figura 2.34 está formada por tres muelles lineales de idéntica rigidez k que soportan una placa rígida. Se pretende determinar la fuerza que soporta cada muelle si sobre la placa actúa una fuerza P excéntrica como la dibujada.

Llamemos F_1, F_2 y F_3 a las fuerzas que soporta cada uno de los muelles. Las dos ecuaciones de equilibrio estático aplicables son:

$$\sum F_y = F_1 + F_2 + F_3 - P = 0 \quad (2.17a)$$

y

$$\sum M_A = aF_2 + 2aF_3 - \frac{3a}{2}P = 0 \quad (2.17b)$$

En este problema se tienen tres incógnitas y sólo dos ecuaciones, o sea que el problema es una vez hiperestático. Se elige como fuerza redundante F_2 . En función de ésta, las ecuaciones de equilibrio se pueden reescribir como:

$$F_1 + F_3 = P - F_2 \quad (2.18a)$$

$$2F_3 = \frac{3P}{2} - F_2 \quad (2.18b)$$

La ecuación adicional necesaria para resolver el problema se obtiene tomando en cuenta los movimientos de la estructura. Así, el desplazamiento vertical del punto B en la placa rígida debe ser igual al alargamiento del muelle 2.

Los dos problemas estáticamente determinados que se deben resolver se muestran en la Figura 2.35.

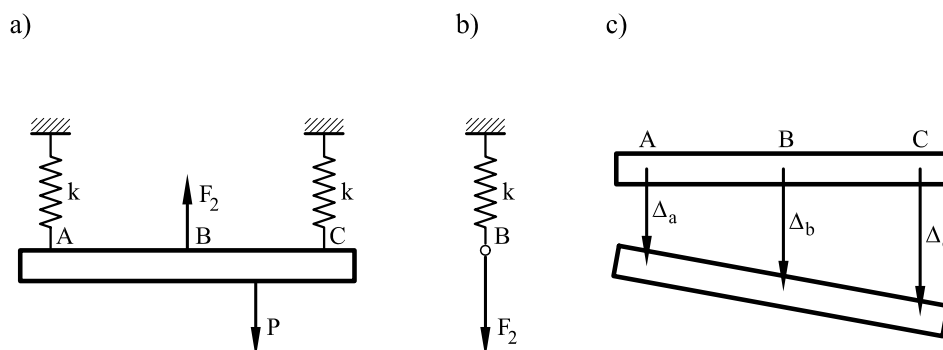


Fig. 2.35: Planteamiento del método de compatibilidad

Para el primer problema, indicado en la Figura 2.35a, despejamos de las ecuaciones de equilibrio F_1 y F_3 en función de la redundante F_2 y se obtiene:

$$F_1 = \frac{P}{4} - \frac{F_2}{2} \qquad F_3 = \frac{3P}{4} - \frac{F_2}{2} \qquad (2.19)$$

Usando las relaciones fuerza-desplazamiento en los muelles 1 y 3 es posible calcular sus alargamientos y, por consiguiente, los desplazamientos verticales de los puntos A y C como

$$\Delta_A = \frac{F_1}{k} = \frac{P}{4k} - \frac{F_2}{2k} \qquad (2.20a)$$

$$\Delta_C = \frac{F_3}{k} = \frac{3P}{4k} - \frac{F_2}{2k} \qquad (2.20b)$$

Como la placa horizontal es rígida, es posible expresar el desplazamiento del punto B en función de los desplazamientos en A y en C , como se muestra en la Figura 2.35c. El desplazamiento en B es claramente el valor medio de los desplazamientos en A y en C , esto es,

$$\Delta_B = \frac{\Delta_A + \Delta_C}{2} = \frac{P}{2k} - \frac{F_2}{2k} \qquad (2.21)$$

El segundo problema estáticamente determinado se muestra en la Figura 2.35b. Si la estructura debe quedar bien ajustada al recombinar los dos problemas estáticamente determinados, el desplazamiento en B en el primer problema debe ser igual al alargamiento del elemento central en el segundo problema, o sea

$$\Delta_B = F_2/k \qquad (2.22)$$

Igualando las expresiones obtenidas para Δ_B en los dos problemas, (2.21) y (2.22), se tiene

$$\frac{P}{2k} - \frac{F_2}{2k} = \frac{F_2}{k} \qquad (2.23)$$

de donde se obtiene el valor de la incógnita hiperestática $F_2 = P/3$. F_1 y F_3 se pueden entonces determinar con las ecuaciones 2.19 como

$$F_1 = \frac{P}{12} \quad ; \quad F_3 = \frac{7P}{12} \quad (2.24)$$

Estas fuerzas verifican las ecuaciones de equilibrio originales. El alargamiento de cada elemento se puede determinar muy fácilmente con la fórmula

$$\Delta_i = \frac{F_i}{k} \quad (2.25)$$

Obsérvese que la elección de la fuerza F_2 como redundante es arbitraria. El problema puede resolverse de manera análoga tomando cualquiera de las otras dos fuerzas como incógnita hiperestática. Obsérvese que se ha resuelto el problema mediante la imposición de *una sola ecuación de compatibilidad*, ya que el problema es *una vez hiperestático*.

2.12.2 Método de equilibrio

El *método de equilibrio* toma los movimientos como incógnitas del problema, expresados de tal forma que se respeten las condiciones de compatibilidad entre los distintos elementos. A continuación se escriben las ecuaciones de equilibrio en función de los movimientos *independientes*, para lo cual se utilizan las relaciones fuerza–desplazamiento de los elementos individuales. Por este procedimiento se obtiene un sistema de ecuaciones lineales simultáneas cuya resolución permite determinar los movimientos independientes incógnita. A partir de éstos se pueden determinar las fuerzas en los elementos volviendo a usar las relaciones fuerza–desplazamiento.

En el Libro 2 de esta obra volveremos a plantear este método con más detalle, así como a estudiar su aplicación a estructuras articuladas hiperestáticas, vigas continuas y estructuras reticuladas de plano medio. A manera de ejemplo, veamos ahora cómo resolver la estructura hiperestática de la Figura 2.34 aplicando el método de los movimientos.

Consideremos los movimientos de la estructura que se muestran en la Figura 2.35c. Aunque en la Figura se indican tres desplazamientos distintos, Δ_A , Δ_B y Δ_C , sólo dos de ellos son independientes debido a que la placa horizontal se mueve como cuerpo rígido. Para que se cumpla la condición de compatibilidad impuesta por el hecho de que la placa es rígida, debe ser

$$\Delta_B = \frac{\Delta_A + \Delta_C}{2} \quad (2.26)$$

Por otra parte, las relaciones fuerza-desplazamiento para los tres muelles son

$$F_1 = k\Delta_A \quad F_2 = k\Delta_B \quad F_3 = k\Delta_C \quad (2.27)$$

Por último, se tienen las ecuaciones de equilibrio aplicables al problema son

$$F_1 + F_2 + F_3 = P \quad (2.28a)$$

$$F_2 + 2F_3 = \frac{3P}{2} \quad (2.28b)$$

Sustituyendo en estas ecuaciones las relaciones (2.27) y eliminando Δ_B según (2.26), quedan en la forma

$$k\Delta_A + k\left(\frac{\Delta_A + \Delta_C}{2}\right) + k\Delta_C = P \quad (2.29a)$$

$$k\left(\frac{\Delta_A + \Delta_C}{2}\right) + 2k\Delta_C = \frac{3P}{2} \quad (2.29b)$$

operando, queda un sistema de la forma

$$\Delta_A + \Delta_C = \frac{2P}{3k} \quad (2.30a)$$

$$\Delta_A + 5\Delta_C = \frac{3P}{k} \quad (2.30b)$$

Este sistema de ecuaciones se resuelve para obtener

$$\Delta_C = \frac{7P}{12k} \quad \Delta_A = \frac{P}{12k} \quad (2.31)$$

con $\Delta_B = 4P/12k$. Usando ahora las relaciones (2.27), se pueden calcular las fuerzas en los muelles como

$$F_1 = k\Delta_A = \frac{P}{12} \quad F_2 = k\Delta_B = \frac{4P}{12} \quad F_3 = k\Delta_C = \frac{7P}{12} \quad (2.32)$$

Obsérvese que se ha resuelto el problema mediante la imposición de *dos ecuaciones de equilibrio*, ya que el problema tiene *dos desplazamientos independientes*. Obsérvese también que los resultados obtenidos son, naturalmente, idénticos a los obtenidos con el método de compatibilidad.

