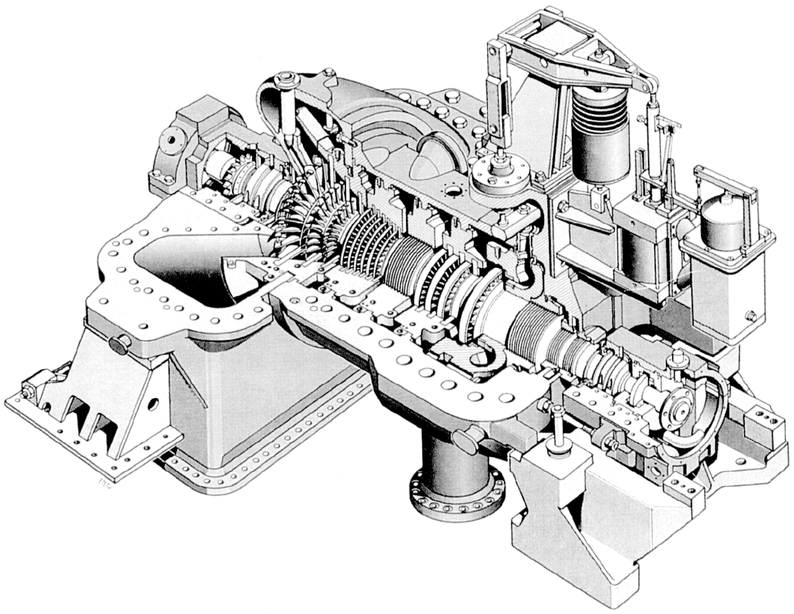
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ENERGÉTICA

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

TURBINAS DE VAPOR



Pedro Fernández Díez

I.- PARÁMETROS DE DISEÑO
DE LAS TURBINAS DE FLUJO AXIAL

I.1.- INTRODUCCIÓN

Para estudiar las turbinas de flujo axial, se puede suponer que las condiciones de funcionamiento se concentran en el radio medio de los álabes; si la relación entre la altura del álabe y el radio medio es baja, el análisis proporciona una aproximación razonable al flujo real, ***análisis bidimensional***, mientras que si la relación es alta, como sucede en los últimos escalonamientos de una turbina de condensación, es necesario otro tipo de estudio más sofisticado.

Se puede suponer que las componentes radiales de la velocidad son nulas y que el flujo es invariable a lo largo de la dirección circunferencial, (no hay interferencias o variaciones del flujo de álabe a álabe), por lo que la circulación Γ= Cte.

Un escalonamiento de una turbina axial está formado por una corona de álabes guías o toberas, (corona del estator), y una corona de álabes móviles, (corona del rotor).

En la teoría bidimensional de las turbomáquinas se puede suponer que la velocidad axial o velocidad meridiana $\vec{c}_m$ es constante a lo largo del escalonamiento, es decir:

$$\vec{c}_m = \vec{c}_{0m} = \vec{c}_{1m} = \vec{c}_{2m}$$

y si Ω_0, Ω_1 y Ω_2, son las correspondientes secciones de paso, aplicando la ecuación de continuidad se tiene:

$$\rho_1\ \Omega_1 = \rho_2\ \Omega_2 = \rho_3\ \Omega_3$$

y como se trata de un proceso de expansión, la densidad del vapor disminuye y la sección de paso entre álabes aumenta.

I.2.- TRIÁNGULOS DE VELOCIDADES Y PARÁMETROS

El triángulo de velocidades a la entrada se obtiene a partir de $\vec{u}$ y $\vec{c}_1$.

El triángulo de velocidades a la salida se obtiene:

a) Para las ***turbinas de acción***, a partir de la elección de un coeficiente de reducción de velocidad $\psi = w_2/w_1$ $\quad w_2 < w_1$

b) Para las ***turbinas de reacción:*** $\psi = w_2/w_{2t}$ $\quad w_2 > w_1$

La altura de la sección de salida del álabe fija la relación, c_{1m}/c_{2m}.

En las ***turbinas de acción,*** la altura del álabe se determina teniendo en cuenta el interés que presenta una reducción del ángulo β_2 y la centrifugación de la vena en los álabes de perfil constante. La elección del perfil del álabe se realiza a partir de los valores de los ángulos obtenidos, teniendo en cuenta que:

a) Los álabes guía del distribuidor, cuando forman parte de los diafragmas de los escalonamientos de acción, deben resistir el empuje aplicado sobre ellos.

b) Los álabes de la corona móvil deben resistir los esfuerzos centrífugos, la flexión producida por la acción tangencial del vapor y la fatiga debida a las vibraciones.

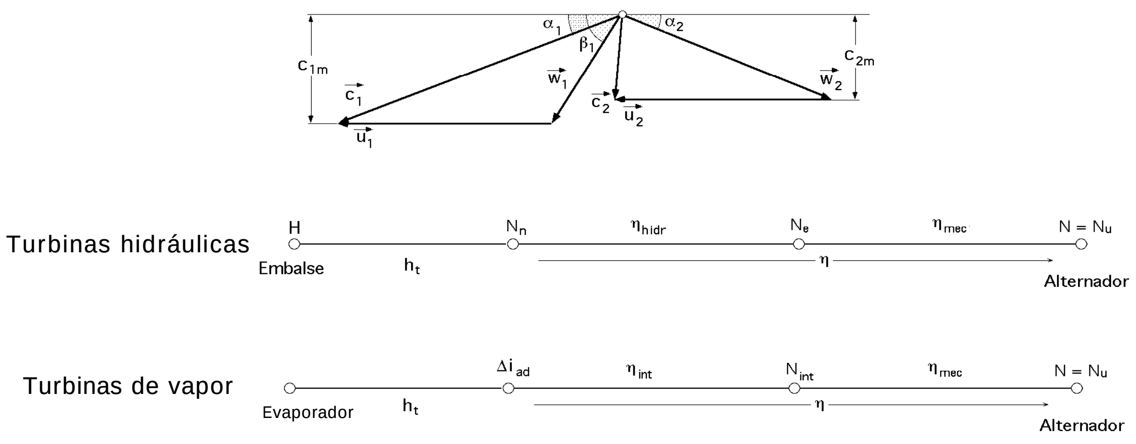


Fig I.1.-Triángulos de velocidades y esquema de rendimientos

Para definir la forma de los triángulos de velocidades, en el supuesto de velocidad axial c_m = Cte, se necesitan tres parámetros:

a) El coeficiente de presión o de carga Ψ *que expresa la capacidad de realizar un trabajo* T_{int} *por unidad de masa, (trabajo interno), desarrollado por el escalonamiento, que se define en la forma:*

$$\Psi = \frac{T_{int}}{u^2/g} = \left| \begin{array}{c} \text{Teorema de Euler para las turbomáquinas} \\ T_{int} = \frac{u}{g}\,(c_{1u} + c_{2u}) = \left\{ \frac{c_{1m}}{\text{tg}\,\alpha_1} = c_1 \,\text{sen}\,\alpha_1 \right\} = \\ = \frac{u}{g}\, c_{1m}(\text{cotg}\,\alpha_1 + \text{cotg}\,\alpha_2) \end{array} \right| = \frac{c_{1m}(\text{cotg}\,\alpha_1 + \text{cotg}\,\alpha_2)}{u}$$

El signo (+) de la ecuación de Euler es debido a que en los triángulos de velocidades las componentes tangenciales $\vec{c}_{1u}$ y $\vec{c}_{2u}$ tienen sentidos contrarios.

b) El coeficiente de caudal o de flujo Φ *está relacionado con el tamaño de la máquina para un gasto másico G dado, y se define en la forma:*

$$\Phi = \frac{c_m}{u}$$

c) El grado de reacción σ *es la relación entre el salto entálpico en el rotor (corona móvil) y el salto entálpico total de la máquina, en la forma:*

$$\sigma = \frac{i_1 - i_2}{i_0 - i_B}$$

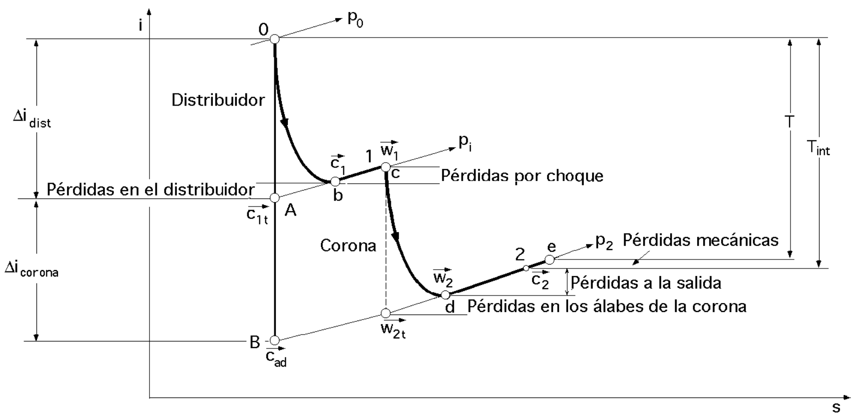


Fig I.2.- Saltos entálpicos en el rotor y en el estator

Salto entálpico en la corona móvil:

$$i_1 - i_2 = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2\,g} = \frac{(w_{2m}^2 + w_{2u}^2) - (w_{1m}^2 + w_{1u}^2)}{2\,g} = \left| \begin{array}{c} \text{Flujo axial} \\ w_{2m} = w_{1m} \end{array} \right| = \frac{w_{2u}^2 - w_{1u}^2}{2\,g}$$

Salto adiabático teórico total:

$$i_0 - i_B = \frac{u\,(c_{1u} + c_{2u})}{g}$$

$$\sigma = \frac{\dfrac{w_{2u}^2 - w_{1u}^2}{2\,g}}{\dfrac{u\,(c_{1u} + c_{2u})}{g}} = \frac{w_{2u}^2 - w_{1u}^2}{2\,u\,(c_{1u} + c_{2u})} = \frac{(w_{2u} + w_{1u})\,(w_{2u} - w_{1u})}{2\,u\,(c_{1u} + c_{2u})} = \left| \begin{array}{l} w_{1u} = c_{1u} - u \\ w_{2u} = c_{2u} + u \\ w_{1u} + w_{2u} = c_{1u} + c_{2u} \\ w_{2u} - w_{1u} = c_{2u} - c_{1u} + 2\,u \end{array} \right| =$$

$$= \frac{w_{2u} - w_{1u}}{2\,u} = \frac{c_{2u} - c_{1u} + 2\,u}{2\,u}$$

que se pueden poner en función de los diversos ángulos que participan en el cálculo de la turbina, en las formas:

$$\sigma = \frac{w_{2u} - w_{1u}}{2\,u} = \left| \begin{array}{l} w_{1u} = c_{1u} - u = \left\{ \dfrac{c_{1m}}{c_{1u}} = \operatorname{tg} \alpha_1 \right\} = c_{1m} \operatorname{cotg} \alpha_1 - u \\ w_{2u} = c_{2u} + u = \left\{ \dfrac{c_{2m}}{c_{2u}} = \operatorname{tg} \alpha_2 \right\} = c_{2m} \operatorname{cotg} \alpha_2 + u \end{array} \right| =$$

$$= \frac{c_{2m} \operatorname{cotg} \alpha_2 - c_{1m} \operatorname{cotg} \alpha_1 + 2\,u}{2\,u} = 1 + \frac{c_{1m}}{2\,u} (\operatorname{cotg} \alpha_2 - \operatorname{cotg} \alpha_1) = 1 + \frac{\Phi}{2} (\operatorname{cotg} \alpha_2 - \operatorname{cotg} \alpha_1)$$

$$\sigma = \frac{w_{2u} - w_{1u}}{2\,u} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{w_{1m}}{w_{1u}} = \operatorname{tg} \beta_1 \\ \dfrac{w_{2m}}{w_{2u}} = \operatorname{tg} \beta_2 \end{array} \right| = \frac{w_{2m} \operatorname{cotg} \beta_2 - w_{1m} \operatorname{cotg} \beta_1}{2\,u} = |\, w_{1m} = w_{2m} = c_{1m} = c_{2m} \,| =$$

$$= \frac{c_{1m}}{2\,u} (\operatorname{cotg} \beta_2 - \operatorname{cotg} \beta_1)$$

$$\sigma = \frac{w_{2u} - w_{1u}}{2\,u} = \frac{w_{2m} \operatorname{cotg} \beta_2 - (c_{1m} \operatorname{cotg} \alpha_1 - u)}{2\,u} = \frac{1}{2} + \frac{c_{1m}}{2\,u} (\operatorname{cotg} \beta_2 - \operatorname{cotg} \alpha_1)$$

Otras relaciones entre estos parámetros son:

$$\Psi = \frac{T_{int}}{u^2/g} = \frac{c_{1m}}{u} (\operatorname{cotg} \alpha_1 + \operatorname{cotg} \alpha_2) = \left| \Phi = \frac{c_m}{u} \right| = \Phi (\operatorname{cotg} \alpha_1 + \operatorname{cotg} \alpha_2)$$

que junto con:

$$\sigma = 1 + \frac{\Phi}{2} (\operatorname{cotg} \alpha_2 - \operatorname{cotg} \alpha_1)$$

conforman un sistema de dos ecuaciones, de la forma:

$$\left. \begin{array}{l} \Psi = \Phi (\operatorname{cotg} \alpha_1 + \operatorname{cotg} \alpha_2) \\ \sigma = 1 + \dfrac{\Phi}{2} (\operatorname{cotg} \alpha_2 - \operatorname{cotg} \alpha_1) \end{array} \right\}$$

Sumándolas y restándolas se obtiene:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \operatorname{cotg} \alpha_2 = \dfrac{\Psi}{\Phi} + \dfrac{2\,(\sigma - 1)}{\Phi} \quad ; \quad \operatorname{cotg} \alpha_2 = \dfrac{\Psi + 2\,(\sigma - 1)}{2\,\Phi} \\ 2 \operatorname{cotg} \alpha_1 = \dfrac{\Psi}{\Phi} - \dfrac{2\,(\sigma - 1)}{\Phi} \quad ; \quad \operatorname{cotg} \alpha_1 = \dfrac{\Psi - 2\,(\sigma - 1)}{2\,\Phi} \end{array} \right\} \qquad \Psi = 2\,(\sigma - 1) + 2\,\Phi \operatorname{cotg} \alpha_1$$

A su vez:

$$c_{1u} + c_{2u} = w_{1u} + w_{2u} = c_{1m} (\operatorname{cotg} \alpha_2 + \operatorname{cotg} \alpha_1) = c_{1m} (\operatorname{cotg} \beta_2 + \operatorname{cotg} \beta_1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Psi = \dfrac{c_m}{u} (\operatorname{cotg} \beta_2 + \operatorname{cotg} \beta_1) \\ \sigma = \dfrac{\Phi}{2} (\operatorname{cotg} \beta_2 - \operatorname{cotg} \beta_1) \end{array} \right\} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{cotg} \beta_2 + \operatorname{cotg} \beta_1 = \dfrac{u\,\Psi}{c_m} = \dfrac{\Psi}{\Phi} \\ \operatorname{cotg} \beta_2 - \operatorname{cotg} \beta_1 = \dfrac{2\,\sigma}{\Phi} \end{array} \right.$$

$$\text{cotg}\,\beta_1 = \frac{\Psi - 2\sigma}{2\Phi} = \text{cotg}\,\alpha_1 - \frac{u}{c_m}$$

$$\text{cotg}\,\beta_2 = \frac{\Psi + 2\sigma}{2\Phi} = \text{cotg}\,\alpha_2 + \frac{u}{c_m}$$

quedando definida con estos parámetros la forma de los triángulos de velocidades.

Para que además quede definido el tamaño, es necesario añadir otra magnitud que puede ser el salto entálpico total del escalonamiento Δi o la velocidad tangencial del álabe $\vec{u}$.

I.3.- DISEÑO BÁSICO DE LOS ESCALONAMIENTOS DE TURBINAS AXIALES

Los diseños básicos de los escalonamientos de turbinas axiales pueden ser:

Grado de reacción cero

Grado de reacción 0,5

Velocidad de salida axial y grado de reacción cualquiera.

Sin embargo no hay que limitarse a emplear sólo estos diseños básicos, por cuanto en el diseño tridimensional empleado para álabes con relación (raiz-cabeza) baja, y álabes torsionados, la reacción puede variar a lo largo del álabe.

GRADO DE REACCIÓN $\sigma = 0$ (Escalonamiento de acción).- De la definición de grado de reacción y de las expresiones desarrolladas para $\sigma = 0$ se tiene:

$$\sigma = 0 \qquad i_1 = i_2 \qquad \begin{cases} w_2 = w_1 & \text{(sin rozamiento)} \\ w_2 = \psi\, w_1 & \text{(con rozamiento)} \end{cases}$$

$$\sigma = \frac{c_{1m}}{2u}(\text{cotg}\,\beta_2 - \text{cotg}\,\beta_1) = 0 \qquad \beta_2 = \beta_1,\ \text{álabes simétricos}$$

$$\Psi = 2(\sigma - 1) + 2\Phi\,\text{cotg}\,\alpha_1 = 2(\Phi\,\text{cotg}\,\alpha_1 - 1) = 2\Phi\,\text{cotg}\,\beta_2 = 2\Phi\,\text{cotg}\,\frac{\varepsilon}{2}$$

siempre que $c_{2m} = Cte$, con excepción de algún caso especial, como el escalonamiento de regulación de las turbinas de vapor.

En las turbinas de vapor de acción de pequeña y media potencia, el salto entálpico asignado al primer escalonamiento de acción resulta excesivo, por lo que se sustituye por un doble escalonamiento Curtis que permite la admisión parcial; ***a esta corona Curtis se la conoce como corona de regulación***, ya que en ella se verifica la regulación cuantitativa de la turbina.

Si el flujo es isentrópico la presión se mantiene constante en el rotor y el escalonamiento de reacción cero se corresponde con un escalonamiento de presión constante en el rotor, que se conoce como ***escalonamiento de acción***. ***Los escalonamientos de p = Cte en el rotor con flujo no isentrópico, tienen reacción negativa, es decir, disminuye la velocidad relativa en el rotor.***

$$\text{Para,} \begin{cases} \Phi = 0\ ;\ \Psi = -2 \\ \Psi = 0\ ;\ \Phi\,\text{cotg}\,\alpha_1 = 1\ ;\ \Phi = \text{tg}\,\alpha_1 \end{cases}$$

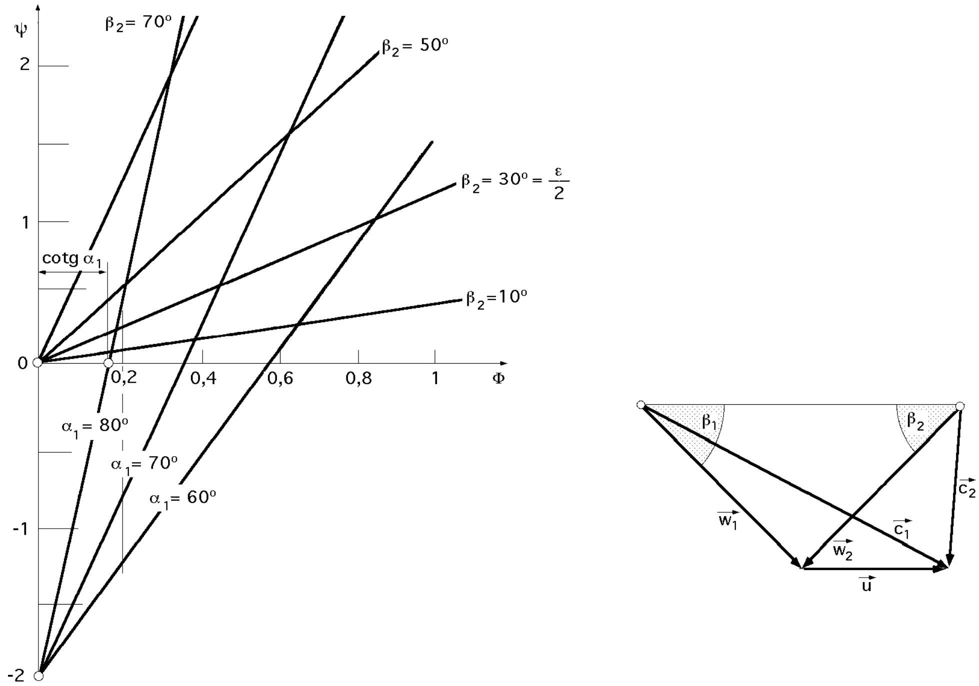


Fig I.3.- Triángulos de velocidades sin pérdidas, con grado de reacción 0

GRADO DE REACCIÓN, $\sigma = 0{,}5$**.-** Para este valor del grado de reacción, Fig I.4, se tiene:

$$\sigma = \frac{1}{2} + \frac{c_{1m}}{2\,u}\,(\text{cotg}\,\beta_2 - \text{cotg}\,\alpha_1) = 0{,}5 \qquad \beta_2 = \alpha_1, \text{ Triángulos de velocidades simétricos}$$

$$\Psi = 2(\sigma - 1) + 2\,\Phi\,\text{cotg}\,\alpha_1 = 2\,\Phi\,\text{cotg}\,\alpha_1 - 1 = 2\,\Phi\,\text{cotg}\,\beta_2 - 1$$

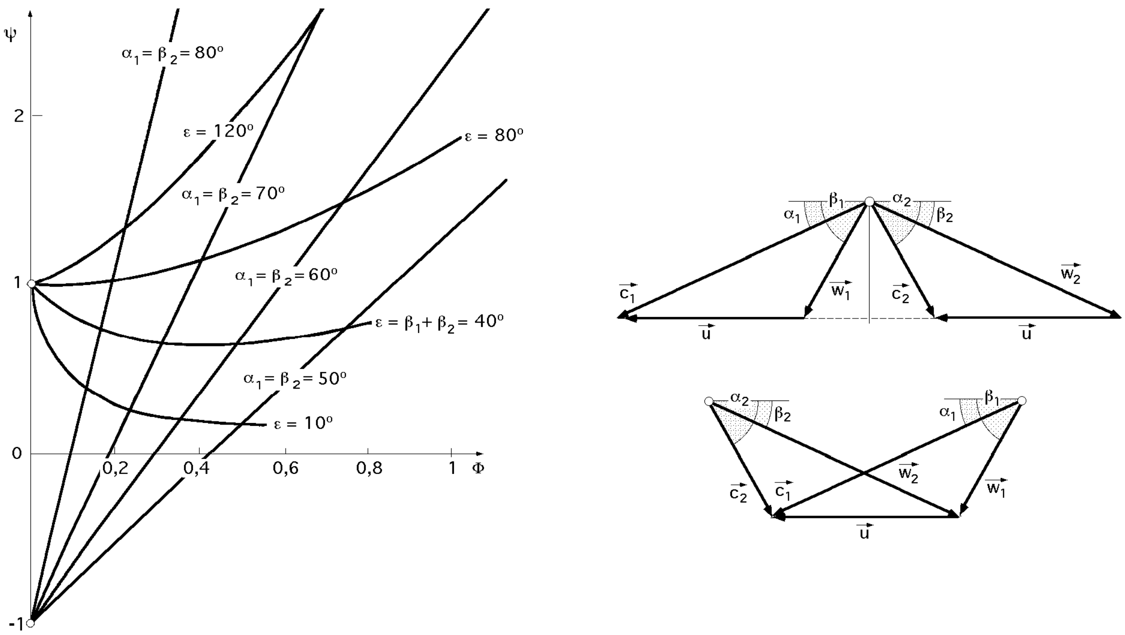


Fig I.4.- Triángulos de velocidades sin pérdidas, con grado de reacción 0,5

VELOCIDAD DE SALIDA c_2 AXIAL

En este caso α_2 = 90º, Fig I.5, por lo que:

$$\sigma = 1 + \frac{c_m}{2\,u}\,(\text{cotg}\,\alpha_2 - \text{cotg}\,\alpha_1) = \left|\alpha_2 = 90^\circ\right| = 1 - \frac{c_m}{2\,u}\,\text{cotg}\,\alpha_1 = 1 - \frac{c_n}{2\,u} = 1 - \frac{\Phi}{2}\,\text{cotg}\,\alpha_1$$

$$\Psi = 2\,\Phi\,\text{cotg}\,\alpha_1 + 2\,(\sigma - 1) = 2\,\Phi\,\text{cotg}\,\alpha_1 + 2\,(1 - \frac{\Phi}{2}\,\text{cotg}\,\alpha_1 - 1) = \Phi\,\text{cotg}\,\alpha_1 =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \sigma = 1 - \dfrac{\Phi\,\text{cotg}\,\alpha_1}{2} \\ \Phi\,\text{cotg}\,\alpha_1 = 2\,(1 - \sigma) \end{array}\right| = 2\,(1 - \sigma) = \Phi\,\text{cotg}\,\beta_1 + 1$$

$$\text{cotg}\,\beta_2 = \frac{\Psi + 2\,\sigma}{2\,\Phi} \quad ; \quad \Phi = \text{tg}\,\beta_2$$

$$\text{Para: } \begin{cases} \sigma = 0 \;;\; \Psi = 2 \;;\; \text{cotg}\,\beta_1 = \text{cotg}\,\beta_2 = \dfrac{u}{c_m} \;;\; T_{int} = \dfrac{2\,u^2}{g} \\ \sigma = 0{,}5 \;;\; \Psi = 1 \;;\; \text{cotg}\,\beta_2 = \text{cotg}\,\alpha_1 = \dfrac{u}{c_m} \;;\; T_{int} = \dfrac{u^2}{g} \end{cases}$$

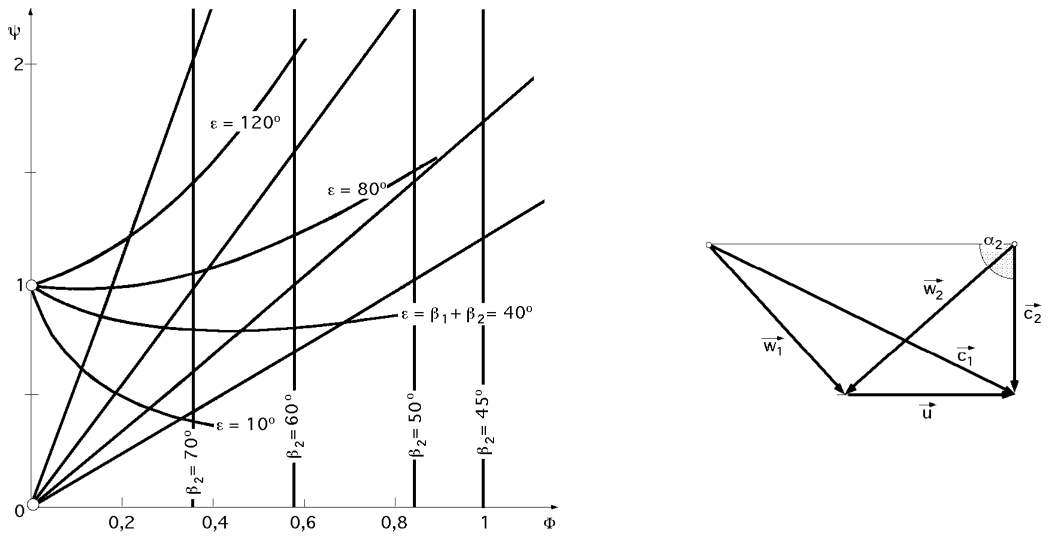


Fig I.5.- Triángulos de velocidades sin pérdidas, con un ángulo de salida α_2 = 90º

Se observa que con velocidad de salida axial no es posible obtener valores de $\Psi > 2$, a menos que la reacción sea negativa, es decir, a menos que disminuya la velocidad relativa en el rotor (acción).

I.4.- ÁLABES DE CIRCULACIÓN CONSTANTE (TORBELLINO LIBRE)

La teoría de ***álabes cilíndricos*** se cumple cuando la altura del álabe es relativamente pequeña:

$$0{,}08 < \frac{a}{D} < 0{,}1$$

y en ella se supone que la variación de la velocidad tangencial $\vec{u}$ no afecta sensiblemente al rendimiento de la máquina.

En la ***teoría de álabes torsionados***, (álabes de los escalonamientos de condensación o aquellos en que la relación entre la altura del álabe y el diámetro es: $a/D > 0,1$), la velocidad periférica a lo largo de los álabes varía apreciablemente, lo cual implica deformaciones de los triángulos de velocidades que disminuyen el rendimiento, de forma que la velocidad puede tomar valores exagerados si el grado de reacción permanece constante desde la base a la punta; la utilización de álabes de circulación constante:

$$\Gamma = 2 \pi r c_u = Cte$$

permite limitar este inconveniente, intentando obtener una velocidad de salida axial $c_{2u} = c_2$, uniforme para cualquier diámetro; esta condición, también llamada de ***torbellino libre***, mantiene constante el trabajo específico a lo largo del álabe.

Trabajo de circulación y ecuación de equilibrio de la vena fluida.- Si en una turbina axial se considera un paralelepípedo infinitesimal de fluido de masa, $dm = \rho\, da\, dr$, y ancho unidad que circula por un escalonamiento, Fig I.6, la fuerza centrípeta es de la forma:

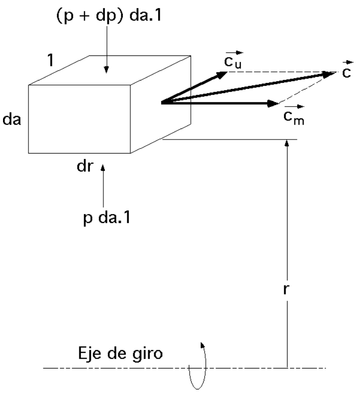


Fig I.6

$$F_{centrípeta} = (p + dp)\, da.1 - p\, da.1 = dp\, da.1$$

y como la componente axial c_m, paralela al eje de giro, no origina fuerza centrífuga alguna, ésta es debida únicamente a la componente radial, en la forma:

$$F_{centrífuga} = - \rho\, da\, dr\, \frac{c_u^2}{r}$$

En el equilibrio se tiene:

$$dp\, da - \rho\, da\, dr\, \frac{c_u^2}{r} = 0 \qquad dp = \rho\, dr\, \frac{c_u^2}{r} = \frac{1}{v}\, dr\, \frac{c_u^2}{r} \quad ; \quad v\, dp = \frac{dr}{r}\, c_u^2$$

siendo ***v*** el volumen específico del vapor.

El trabajo de circulación es:

$$dT_{circulación} = - v\, dp = - c_u^2 \frac{dr}{r} = - di$$

Si el álabe se diseña para que el trabajo de circulación sea constante de la base a la punta, en un proceso adiabático reversible, se tiene que:

$$dT_{circ} = - dI = 0$$

y como:

$$dI = di + \frac{1}{2}\, d(c_u^2 + c_m^2) = 0 \qquad di = -\frac{1}{2}\, d(c_u^2 + c_m^2) = -(c_u dc_u + c_m dc_m) = c_u^2\, \frac{dr}{r}$$

$$c_u dc_u + c_m dc_m + c_u^2\, \frac{dr}{r} = 0$$

que es la ecuación diferencial del equilibrio perpendicular al eje de giro (dirección radial), con trabajo de circulación constante de la base a la punta.

La trayectoria ideal de la vena fluida se determina suponiendo que c_m = Cte, (flujo axial), por lo que:

$$c_u dc_u + c_u^2 \frac{dr}{r} = 0 \qquad \frac{dc_u}{c_u} + \frac{dr}{r} = 0 \qquad r\, c_u = \text{Cte}$$

es decir, la circulación del vapor entre álabes es irrotacional; con esta ecuación se pueden construir los triángulos de velocidades en cualquier sección, si se conoce el triángulo de velocidades, por ejemplo, en el punto medio del álabe; el flujo de vapor a la salida de los álabes de la corona móvil es axial, α_2 = 90º, por lo que la presión sobre los mismos es constante e independiente del diámetro, es decir, la caída de presión en el escalonamiento es la misma para cualquier diámetro, de forma que los distintos chorros de vapor tienen la misma pérdida de velocidad a la salida, no difiriendo notoriamente las pérdidas por rozamiento, por lo que los chorros de vapor se deben corresponder con una misma cesión de energía a los álabes, de forma que:

$$r\, c_{1u} = \text{Cte} = k^*$$

El grado de reacción en el supuesto de considerar nulas las pérdidas en los álabes, $\phi = 1$, y rendimiento máximo, α_2 = 90º, se determina teniendo en cuenta que la velocidad c_2 de salida del escalón anterior es la velocidad c_0, por lo que:

Distribuidor, $c_1 = \sqrt{2\, g\, \Delta i_{dist} + c_2^2}$

$$\Delta i_{dist} = \frac{c_1^2 - c_0^2}{2\, g} = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2\, g} = \frac{(c_{1m}^2 + c_{1u}^2) - (c_{2m}^2 + c_{2u}^2)}{2\, g} = \left| \begin{array}{l} c_2 = c_{2m} = c_{1m} \\ c_{2u} = 0 \end{array} \right| = \frac{c_{1u}^2}{2\, g}$$

Corona móvil, $w_2 = \sqrt{2\, g\, \Delta i_{corona} + w_1^2}$

$$\Delta i_{corona} = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2\, g} = \frac{(w_{2m}^2 + w_{2u}^2) - (w_{1m}^2 - w_{1u}^2)}{2\, g} = \left| w_{2m} = w_{1m} \right| = \frac{w_{2u}^2 - w_{1u}^2}{2\, g} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} w_{2u} = u \\ w_{1u} = u - c_{1u} \end{array} \right| = \frac{u^2 - (u - c_{1u})^2}{2\, g} = \frac{2\, u\, c_{1u} - c_{1u}^2}{2\, g}$$

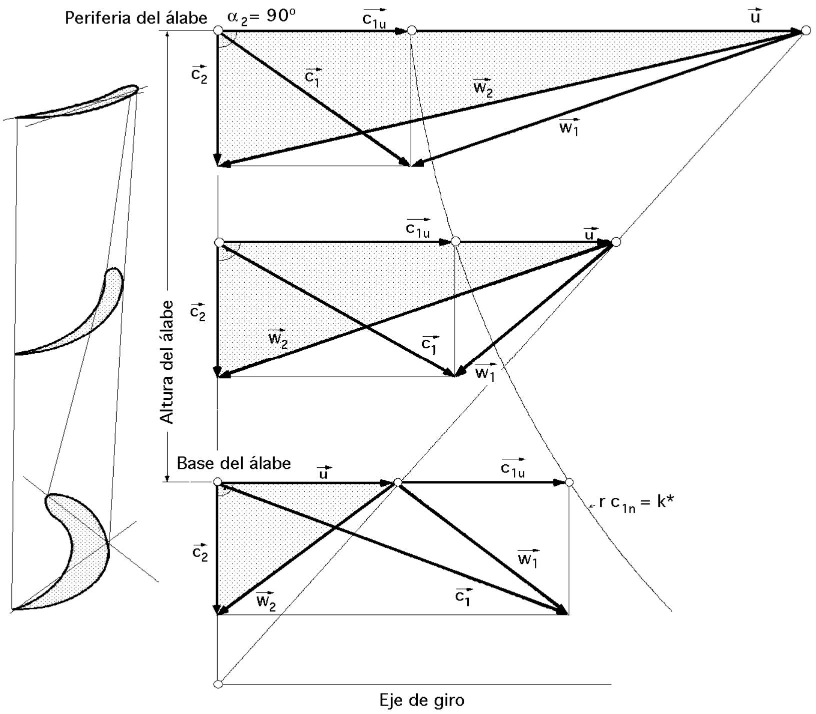


Fig I.7.- Triángulos de velocidades de un álabe de condensación, (circulación constante), a diversas alturas del mismo

El salto adiabático teórico total y el grado de reacción con flujo axial a la salida, $\alpha_2 = 90º$, son, respectivamente:

$$\Delta i_{ad\ teór} = i_0 - i_B = \Delta i_{dist} + \Delta i_{corona} = \frac{c_{1u}^2}{2\,g} + \frac{2\,u\,c_{1u} - c_{1u}^2}{2\,g} = \frac{u\,c_{1u}}{g} = Cte$$

que se podía haber obtenido directamenta del salto adiabático teórico:

$$i_0 - i_B = \frac{u\,(c_{1u} + c_{2u})}{g} \text{ , con, } c_{2u} = 0$$

obteniéndose:

$$\sigma = \frac{\Delta i_{corona}}{\Delta i_{dist} + \Delta i_{corona}} = \frac{\dfrac{2\,u\,c_{1u} - c_{1u}^2}{2g}}{\dfrac{u\,c_{1u}}{g}} = 1 - \frac{c_{1u}}{2\,u} = 1 - \frac{\cos\alpha_1}{2\,\xi_1} = \left|\, u = r\,\frac{\pi\,n}{30} \,\right| = 1 - \frac{15\,c_{1u}}{\pi\,r\,n}$$

observándose que σ crece con el radio ***r***, (aumenta hacia la periferia), y también con el nº de rpm.

En estas circunstancias, en las turbinas de acción, sólo el trazado de la base es de acción, mientras que en las turbinas de reacción se tiene en la base un grado de reacción, $0{,}4 < \sigma < 0{,}45$.

Si se conoce el valor de σ_m en la mitad del álabe, se tiene:

$$\frac{\sigma}{\sigma_m} = \frac{1 - \dfrac{c_{1u}}{2\,u}}{\left(1 - \dfrac{c_{1u}}{2\,u}\right)_{medio}} \qquad \sigma = \sigma_m\,\frac{1 - \dfrac{c_{1u}}{2\,u}}{\left(1 - \dfrac{c_{1u}}{2\,u}\right)_{medio}}$$

o también:

$$\sigma = 1 - \frac{1 - \sigma_m}{(\frac{r}{r_m})^2} [1 - \text{sen}^2\alpha_{1m} \{1 - (\frac{r}{r_m})^2\}]$$

Si los álabes se diseñan con α_1= Cte de la base a la punta:

$$\text{cotg}\, \alpha_1 = \frac{c_{1u}}{c_{1m}} \qquad c_{1u} = c_{1m} \,\text{cotg}\, \alpha_1 \quad ; \quad dc_{1u} = dc_{1m}\, \text{cotg}\, \alpha_1$$

por lo que: $c_{1u}\, dc_{1u} + c_{1m}\, dc_{1m} + c_{1u}^2 \frac{dr}{r} = 0$, se transforma en:

$$c_{1m}\, \text{cotg}\, \alpha_1\, dc_{1m}\, \text{cotg}\, \alpha_1 + c_{1m}\, dc_{1m} + c_{1u}^2 \frac{dr}{r} = 0$$

$$c_{1m} \frac{dc_{1m}}{dr} (\text{cotg}^2\alpha_1 + 1) + \frac{c_{1m}^2\, \text{cotg}^2\alpha_1}{r} = 0$$

$$\frac{dc_m}{c_m} = - \frac{\text{cotg}^2\alpha_1}{\text{cotg}^2\alpha_1 + 1} \frac{dr}{r} = \left| \frac{\text{cotg}^2\alpha_1}{\text{cotg}^2\alpha_1 + 1} = \cos^2\alpha_1 \right| = - \cos^2\alpha_1 \frac{dr}{r}$$

Integrándola resulta:

$$c_{1m}\, r^{\cos^2\alpha_1} = \text{Cte}$$

que relaciona en cualquier punto del álabe, la velocidad axial, el radio del álabe y el ángulo de ataque.