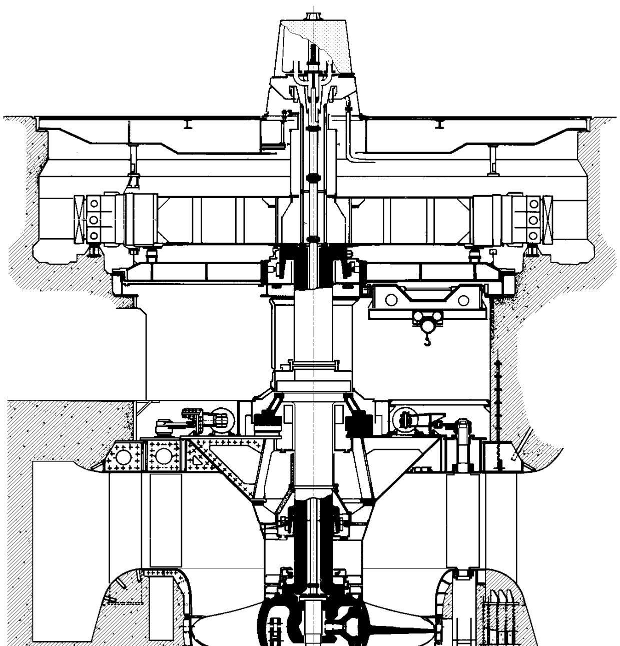
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA
ELÉCTRICA Y ENERGÉTICA

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

PROBLEMAS
DE
TURBINAS HIDRÁULICAS

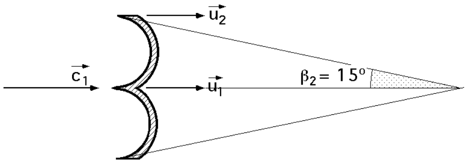


Pedro Fernández Díez

1.- Una turbina Pelton trabaja bajo una altura neta de 240 m.
Sus características son: $\phi_1 = 0{,}98$; $\alpha_1 = 0$; $\beta_2 = 15^o$; $w_2 = 0{,}70\ w_1$; $u_1 = 0{,}45\ c_1$
Diámetro del chorro: $d_{chorro} = 150$ mm; Diámetro medio de la rueda : $D_1 = 1800$ mm
Determinar

a) La fuerza tangencial ejercida por el chorro sobre las cucharas
b) La potencia desarrollada por la turbina
c) El rendimiento manométrico
d) El rendimiento global, siendo: $\eta_{mec} = 0{,}97$; $\eta_{vol} = 1$.

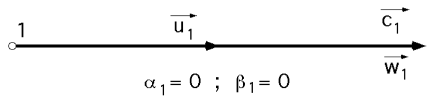
RESOLUCION



Tomamos como eje “x” la dirección de la velocidad circunferencial del rodete en el punto en que el eje del chorro corta a éste; la fuerza tangencial del chorro sobre las cucharas es igual y de signo contrario a la que el álabe ejerce sobre el fluido.

TRIANGULOS DE VELOCIDADES

Entrada

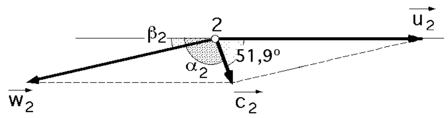


$$c_1 = \phi_1 \sqrt{2\ g\ H_n} = 0{,}98 \sqrt{2\ g \times 240} = 67{,}22 \text{ m/seg}$$

$$u_1 = u_2 = 0{,}45 \times 67{,}22 = 30{,}25 \text{ m/seg}$$

$$w_1 = c_1 - u_1 = 67{,}22 - 30{,}25 = 36{,}97 \text{ m/seg}$$

Salida



$$u_2 = u_1 = 30{,}25 \text{ m/seg}$$

$$w_2 = \psi\ w_1 = 0{,}70 \times 36{,}97 = 25{,}88 \text{ m/seg}$$

$$c_2 = \sqrt{u_2^2 + w_2^2 - 2\ u_2\ w_2\ \cos\beta_2} = \sqrt{30{,}25^2 + 25{,}88^2 - (2 \times 30{,}25 \times 25{,}88\ \cos 15^o)} = 8{,}51 \text{ m/seg}$$

$$w_2\ \text{sen}\,\beta_2 = c_2\ \text{sen}\alpha_2 \quad ; \quad \text{sen}\,\alpha_2 = \frac{w_2\ \text{sen}\,\beta_2}{c_2} = \frac{25{,}88 \times \text{sen}\,15^o}{8{,}51} = 0{,}7871 \quad ; \quad \alpha_2 = 51{,}9^o$$

a) Fuerza tangencial ejercida por el chorro sobre las cucharas

$$F_x = \frac{\gamma\ Q}{g}(w_1\ \cos\beta_1 - w_2\ \cos\beta_2) = \left|\ Q = c_1\ \Omega = 67{,}22\ \frac{m}{seg} \times \frac{\pi \times 0{,}15^2}{4}\ m^2 = 1{,}18787\ \frac{m^3}{seg}\ \right| =$$

$$= \frac{1000\ \frac{Kg}{m^3} \times 1{,}18787\ \frac{m^3}{seg}}{9{,}8\ \frac{m}{seg^2}}(36{,}97 + 25)\ \frac{m}{seg} = 7511{,}5 \text{ Kg}$$

b) Potencia desarrollada por la turbina (es la potencia efectiva)

$$N_{efec} = F_x\ u = 7511{,}5 \text{ Kg} \times 30{,}25\ \frac{m}{seg} = 227.222{,}87\ \frac{Kgm}{seg} = 3029{,}6 \text{ CV}$$

c) Rendimiento manométrico

$$N_{efec} = \frac{\gamma\, Q\, H_n}{75}\ \eta_h \quad \xrightarrow{\text{Como } \eta_{vol} = 1} \quad \eta_{man} = \frac{75\ N_{ef}}{\gamma\, Q\, N_n} = \frac{75 \times 3029{,}6}{1000 \times 1{,}1878 \times 240} = 0{,}797 = 79{,}7\%$$

ó

$$\eta_{man} = \frac{H_{ef}}{H_n} = \left| \; 3029{,}6 \text{ CV} = \frac{1000 \times 1{,}1878 \times H_{ef}}{75} \; ; \; H_{ef} = 191{,}3 \text{ m} \; \right| = \frac{191{,}3}{240} = 0{,}797 = 79{,}7\%$$

d) Rendimiento global, siendo el η_{mec} = 0,97.

$$\eta = 0{,}797 \times 0{,}97 = 0{,}773 = 77{,}3\%$$

e) Potencia al freno

La potencia al freno es la potencia útil

$$N = \frac{\gamma\, Q\, H_n}{75}\, \eta = \frac{1000 \times 1{,}1878 \times 240}{75}\; 0{,}773 = 2938 \text{ CV}$$

De otra forma:

$$N_u = \eta_{mec}\, N_{ef} = 0{,}97 \times 3029{,}6 \text{ CV} = 2938 \text{ CV}$$

****

2.- Se dispone de un aprovechamiento hidráulico con caudal constante en una corriente que fluye a 750 litros/segundo; utiliza un salto neto H_n = 24 m con un grupo turboalternador en acoplamiento directo de 7 pares de polos, siendo el rendimiento global de la instalación del 86%, y absorbiendo el referido grupo la aportación diaria del caudal citado durante 4,5 horas ininterrumpidamente, a caudal constante.

Con el fin de incrementar la potencia del aprovechamiento hidráulico se incrementa el salto neto utilizado, y se acopla a la misma turbina otro alternador que sustituye al primero de 6 pares de polos.

Suponiendo que el rendimiento global no se modifica, se pide:

a) Potencia en CV del primer grupo, y caudal

b) Salto neto a utilizar en el nuevo grupo y nueva potencia

c) Número de horas ininterrumpidas de funcionamiento a caudal constante del nuevo grupo

d) Capacidad de regulación del embalse que necesita el nuevo grupo

---

RESOLUCION

PRIMER GRUPO: $\left\{ \begin{matrix} Q \\ H_n = 24 \text{ m} \end{matrix} \right\}$; 7 pares de polos ; η = 0,86 ; Funcionamiento: 4,5 horas diarias

SEGUNDO GRUPO: $\left\{ \begin{matrix} Q' \\ H'_n \end{matrix} \right\}$; 6 pares de polos ; η = 0,86 ; Funcionamiento: ?

Como el rendimiento se mantiene, se pueden utilizar las fórmulas de semejanza.

Se trata de una misma turbina con saltos variables

$$\frac{n}{n'} = \sqrt{\frac{H_n}{H'_n}} = \frac{Q}{Q'} = \left(\frac{N}{N'}\right)^{2/3}$$

a) Caudal que admite el primer grupo funcionando 4,5 horas diarias

Se sabe que el aprovechamiento hidráulico recibe un caudal diario de 750 l/seg, por lo que en 24 horas será:

$$Q_{diario} = 750 \frac{\text{lit}}{\text{seg}} \times 3600 \frac{\text{seg}}{\text{hora}} \times 24 \frac{\text{horas}}{\text{día}} = 64.800 \frac{m^3}{\text{día}}$$

que son aprovechados totalmente por el grupo en 4,5 horas, por lo que el caudal del primer grupo es:

$$Q = \frac{64.800 \frac{m^3}{\text{día}}}{3600 \times 4{,}5 \frac{\text{seg}}{\text{día}}} = 4 \frac{m^3}{\text{seg}}$$

Potencia del primer grupo:

$$N = N_u = \frac{\gamma\ Q\ H_n\ \eta}{75} = 1000\ \frac{Kg}{m^3} \times 4\ \frac{m^3}{seg} \times 24\ m \times 0{,}86 = 1100{,}8\ CV$$

b) Salto neto a utilizar en el nuevo grupo

$$N^o \text{ de revoluciones: } \begin{cases} \text{Para 7 pares de polos: } n = \dfrac{3000}{7} = 428{,}57\ rpm \\ \text{Para 6 pares de polos: } n = \dfrac{3000}{6} = 500\ rpm \end{cases}$$

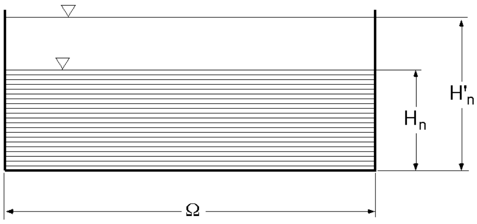
$$\frac{n}{n'} = \sqrt{\frac{H_n}{H_n'}}\ ;\quad \frac{428{,}57}{500} = \sqrt{\frac{24}{H_n'}}\ ;\quad H_n' = 32{,}66\ m$$

Nueva potencia: $\dfrac{n}{n'} = \left(\dfrac{N}{N'}\right)^{2/3}\ ;\quad \dfrac{428{,}57}{500} = \left(\dfrac{1100{,}8}{N'}\right)^{2/3}\ ;\quad N' = 1748\ CV$

c) Número de horas ininterrumpidas de funcionamiento a caudal constante Q' del nuevo grupo

$$\frac{n}{n'} = \frac{Q}{Q'}\ ;\quad Q' = Q\ \frac{n'}{n} = 4\ \frac{m^3}{seg} \times \frac{7}{6} = 4{,}7\ \frac{m^3}{seg}\ ;\quad 4{,}7 \times x = 4 \times 4{,}5\ ;\quad \boxed{x = 3{,}8\ \text{horas}}$$

d) Capacidad de regulación del embalse que necesita el nuevo grupo



Para 7 pares de polos: (Capacidad) = $\Omega \times H_n$

Para 6 pares de polos: (Capacidad)' = $\Omega \times H_n'$

$$\frac{(\text{Capacidad})}{(\text{Capacidad})'} = \frac{H_n}{H_n'} = \frac{24}{32{,}66} = 0{,}7348$$

$$(\text{Capacidad})' = \frac{H_n'}{H_n}\ (\text{Capacidad}) = \frac{1}{0{,}7348} = 1{,}364\ (\text{Capacidad})$$

****

3.- Elegir el tipo de turbina más conveniente para un salto H_n = 190 m, caudal q= 42 lit/seg, n = 1450 rpm y η_{man} = 0,825.

Determinar, suponiendo que $\eta_{mec} = \eta_{vol} = 1$

a) Las nuevas características de la turbina para un salto neto de 115 m, conservando la misma admisión

b) Las nuevas características de una turbina semejante, geométricamente 3 veces más pequeña, que trabaje con el mismo salto de 190 m.

RESOLUCION

a) Nuevas características de la turbina para un salto neto de 115 m, conservando la misma admisión

$$N = N_u = \frac{\gamma\ Q\ H_n\ \eta}{75} = \frac{1000\ \frac{Kg}{m^3} \times 0{,}042\ \frac{m^3}{seg} \times 190\ m \times 0{,}825}{75} = 87{,}78\ CV$$

$$n_s = \frac{n\sqrt{N}}{H_n^{5/4}} = \frac{1450\ \sqrt{87{,}78}}{190^{5/4}} = 19{,}25\ \text{(Pelton simple)}$$

$$\frac{n}{n'} = \sqrt{\frac{H_n}{H_n'}}\ ;\quad n' = n\sqrt{\frac{H_n'}{H_n}} = 1450\sqrt{\frac{115}{190}} = 1128{,}1\ r.p.m.$$

$$\frac{Q}{Q'} = \sqrt{\frac{H_n}{H_n'}}\ ;\quad Q' = Q\sqrt{\frac{H_n'}{H_n}} = 42\sqrt{\frac{115}{190}} = 32{,}67\ \frac{lit}{seg}$$

$$\left(\frac{N}{N'}\right)^{2/3} = \sqrt{\frac{H_n}{H_n'}}\ ;\quad N' = N\left(\frac{H_n'}{H_n}\right)^{3/2} = 87{,}78\left(\frac{115}{190}\right)^{3/2} = 41{,}33\ CV$$

b) Nuevas características de una turbina semejante, geométricamente 3 veces más pequeña, que trabaje con el mismo salto de 190 m.

Se tiene el mismo salto, con $\lambda = 3$

$$\sqrt{\frac{H_n}{H'_n}} = 1 = \lambda \frac{n}{n'} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{Q}{Q'} = \frac{1}{\lambda^{2/3}}\left(\frac{N}{N'}\right)^{1/3}$$

$$1 = \frac{1}{\lambda^{2/3}}\left(\frac{N}{N'}\right)^{1/3} \;;\; \left(\frac{N}{N'}\right)^{1/3} = \lambda^{2/3} \;;\; \frac{N}{N'} = \lambda^2 \;;\; N' = \frac{N}{\lambda^2} = \frac{88}{9} = 9{,}77 \text{ CV}$$

$$Q' = \frac{Q}{\lambda^2} = \frac{42}{9} = 4{,}66 \; \frac{\text{lit}}{\text{seg}}$$

$$n' = n\,\lambda = 1450 \times 3 = 4350 \text{ r.p.m.}$$

c) Para Z inyectores Pelton

$$n = n' \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{H_n}{H'_n}} \;;\; Q = Z\,Q'\,\lambda^2\sqrt{\frac{H_n}{H'_n}} \;;\; N = Z\,N'\,\lambda^2\left(\frac{H_n}{H'_n}\right)^{3/2} \;;\; C = Z\,C'\,\lambda^3\left(\frac{H_n}{H'_n}\right)$$

****

4.- Una turbina Pelton se elige para mover un alternador de 5 pares de polos en acoplamiento directo. El chorro de agua tiene un diámetro de 70 mm y una velocidad de 100 m/seg. El ángulo de la cuchara es de 170º; la relación de la velocidad tangencial del álabe a la velocidad del chorro es 0,47. Los coeficientes de reducción de velocidad: $\phi_1 = 1$ y $\psi = 0{,}85$.

Determinar

a) Los triángulos de velocidades

b) El diámetro de la rueda en el centro de las cazoletas

c) La potencia desarrollada por la turbina y el par motor

d) La alturas neta y efectiva del salto, rendimiento manométrico y nº de revoluciones específico

e) Caudal, potencia, par motor y nº de rpm de una turbina geométricamente semejante a la anterior, con relación de semejanza $\lambda = 2$, funcionando con el mismo salto

f) Caudal, potencia, par motor y nº de rpm de una turbina geométricamente semejante a la anterior, con relación de semejanza $\lambda = 2$, funcionando con un salto de 1000 m

g) Caudal, potencia, par motor y nº de rpm, $\lambda = 1$, para una turbina que tiene 4 inyectores de 50 mm de diámetro, con $c_1 = 100$ m/seg, funcionando con el salto del apartado (d)

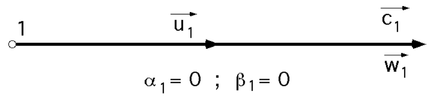
h) Caudal, potencia, par motor y nº de rpm, $\lambda = 1$, para una turbina que tiene 4 inyectores de 50 mm de diámetro, con $c_1 = 100$ m/seg, funcionando con un salto de 1000 m

---

RESOLUCION

a) Triángulos de velocidades

Entrada

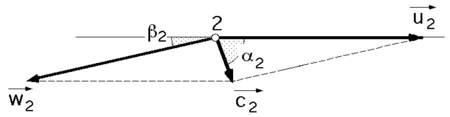


$c_1 = 100$ m/seg

$\frac{u_1}{c_1} = 0{,}47 \;;\; u_1 = 0{,}47 \times 100 = 47$ m/seg

$w_1 = c_1 - u_1 = 100 - 47 = 53$ m/seg

Salida



$u_2 = u_1 = 47$ m/seg

$w_2 = \psi\, w_1 = 0{,}85 \times 53 = 45{,}05$ m/seg

$$c_2 = \sqrt{u_2^2 + w_2^2 - 2\,u_2\,w_2 \cos\beta_2} = \sqrt{47^2 + 45{,}05^2 - (2 \times 47 \times 45{,}05 \cos 10^\circ)} = 8{,}25 \text{ m/seg}$$

$$w_2 \ \text{sen}\ \beta_2 = c_2 \ \text{sen}\alpha_2 \quad ; \quad \text{sen}\ \alpha_2 = \frac{w_2 \ \text{sen}\ \beta_2}{c_2} = \frac{45{,}05 \times \text{sen}\ 10º}{8{,}25} = 0{,}948 \quad ; \quad \alpha_2 = 71{,}48º$$

b) Diámetro de la rueda en el centro de las cazoletas

Este diámetro es el también llamado diámetro Pelton

$$u = \frac{D}{2}\ w = \frac{D}{2}\ \frac{\pi n}{30} \quad ; \quad D = \frac{60\ u}{\pi n} = \left| \begin{matrix} n = \dfrac{3000}{5} = 600 \text{ rpm} \\ u = 47 \text{ m/seg} \end{matrix} \right| = \frac{60 \times 47}{600\ \pi} = 1{,}496 \text{ m}$$

c) Potencia desarrollada por la turbina (potencia efectiva)

$$N = F_x\ u = \frac{\gamma\ Q}{g}\ (w_1 \cos\beta_1 - w_2 \cos\beta_2)\ u = \left| \begin{matrix} Q = c_1\ \Omega = 100 \dfrac{m}{seg} \times \dfrac{\pi \times 0{,}07^2}{4}\ m^2 = 0{,}3848 \dfrac{m^3}{seg} \\ w_1 \cos\beta_1 = w_1 = 53 \dfrac{m}{seg} \\ w_2 \cos\beta_2 = 45{,}05 \times \cos 10º = 44{,}36 \dfrac{m}{seg} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1000 \dfrac{Kg}{m^3} \times 0{,}3848 \dfrac{m^3}{seg}}{9{,}8 \dfrac{m}{seg^2}}\ (53 + 44{,}36) \frac{m}{seg} \times 47 \frac{m}{seg} = 179.680 \frac{Kgm}{seg} = 2395{,}7 \text{ CV}$$

Par motor

$$C = \frac{N}{w} = \frac{N}{\dfrac{\pi n}{30}} = \frac{179.680 \dfrac{Kgm}{seg}}{\dfrac{\pi \times 600}{30}} = 2859{,}7 \text{ m.Kg}$$

d) Alturas neta y efectiva del salto

$$c_1 = \phi_1 \sqrt{2\ g\ H_n} \quad ; \quad H_n = \frac{c_1^2}{\phi_1^2\ 2\ g} = \frac{100^2}{1^2 \times 2\ g} = 510{,}2 \text{ m}$$

Salto efectivo : $H_{efect} = \dfrac{N_{efect}}{\gamma\ Q} = \dfrac{179.680}{1000 \times 0{,}3848} = 466{,}95$ m

Rendimiento manométrico

$$\eta_{man} = \frac{u_1\ (c_1 \cos\alpha_1 - c_2 \cos\alpha_2)}{g\ H_n} = \frac{47 \dfrac{m}{seg}\ (100 - 8{,}25 \cos 71{,}48)}{g \times 510{,}2} = 0{,}9153 = 91{,}53\%$$

o también:

$$\eta_{man} = \frac{H_{efect}}{H_n} = \frac{N_{efect}}{\gamma\ Q_d\ H_n} = \frac{179.680}{1000 \times 0{,}3848 \times 510{,}2} = 91{,}53\%$$

Nº de revoluciones específico

$$n_s = \frac{n \sqrt{N}}{H_n^{5/4}} = \frac{600 \sqrt{2395{,}7}}{510{,}2^{5/4}} = 12{,}11 \text{ rpm}$$

e) Caudal, potencia, par motor y nº de rpm de una turbina geométricamente semejante a la anterior, con relación de semejanza $\lambda = 2$, funcionando con el mismo salto

$$\frac{Q}{Q'} = \lambda^2 \sqrt{\frac{H_n}{H'_n}} = \lambda^2 \quad ; \quad Q = \lambda^2\ Q' = 2^2 \times 0{,}3848 = 1{,}539 \frac{m^3}{seg}$$

$$\frac{N}{N'} = \lambda^2 \left(\frac{H_n}{H'_n}\right)^{3/2} = \lambda^2 \quad ; \quad N = \lambda^2\ N' = 2^2 \times 2395{,}7 \text{ CV} = 9583{,}2 \text{ CV}$$

$$\frac{C}{C'} = \lambda^3 \left(\frac{H_n}{H'_n}\right) = \lambda^3 \quad ; \quad C = \lambda^3\ C' = 2^3 \times 2859{,}7 \text{ m.Kg} = 22.877{,}6 \text{ m.Kg}$$

$$\frac{n}{n'} = \lambda^{-1} \sqrt{\frac{H_n}{H'_n}} = \lambda^{-1} \quad ; \quad n = \lambda^{-1}\ n' = 2^{-1} \times 600 \text{ rpm} = 300 \text{ rpm}$$

f) Caudal, potencia, par motor y nº de rpm de una turbina geométricamente semejante a la anterior, con relación de semejanza λ = 2, funcionando con un salto de 1000 m

$$\frac{Q}{Q'} = \lambda^2 \sqrt{\frac{H_n}{H'_n}} \quad ; \quad Q = \lambda^2\ Q' \sqrt{\frac{H_n}{H'_n}} = 2^2 \times 0,3848 \sqrt{\frac{1000}{510,2}} = 2,1548 \frac{m^3}{seg}$$

$$\frac{N}{N'} = \lambda^2 \left(\frac{H_n}{H'_n}\right)^{3/2} \quad ; \quad N = \lambda^2\ N' \left(\frac{H_n}{H'_n}\right)^{3/2} = 2^2 \times 2395,7 \text{ CV} \left(\frac{1000}{510,2}\right)^{3/2} = 26296,6 \text{ CV}$$

$$\frac{C}{C'} = \lambda^3 \left(\frac{H_n}{H'_n}\right) \quad ; \quad C = \lambda^3\ C' \left(\frac{H_n}{H'_n}\right) = 2^3 \times 2859,7 \text{ m.Kg} \left(\frac{1000}{510,2}\right) = 44.845,15 \text{ m.Kg}$$

$$\frac{n}{n'} = \lambda^{-1} \sqrt{\frac{H_n}{H'_n}} \quad ; \quad n = \lambda^{-1}\ n' \sqrt{\frac{H_n}{H'_n}} = 2^{-1} \times 600 \text{ rpm} \sqrt{\frac{1000}{510,1}} = 420 \text{ rpm}$$

g) Caudal, potencia, par motor y nº de rpm, λ =1, para una turbina que tiene 4 inyectores de 50 mm de diámetro, con c_1 = 100 m/seg, funcionando con el salto del apartado (d)

Los triángulos de velocidades se mantienen

Potencia para 1 inyector:

$$N = F_x\ u = \frac{\gamma\ Q}{g} (w_1 \cos\beta_1 - w_2 \cos\beta_2)\ u = \left| Q = c_1\ \Omega = 100 \frac{m}{seg} \times \frac{\pi \times 0,05^2}{4}\ m^2 = 0,1963 \frac{m^3}{seg} \right| =$$

$$= \frac{1000 \frac{Kg}{m^3} \times 0,1963 \frac{m^3}{seg}}{9,8 \frac{m}{seg^2}} (53 + 44,36) \frac{m}{seg} \times 47 \frac{m}{seg} = 91.658 \frac{Kgm}{seg} = 1221,1 \text{ CV}$$

Par motor para 1 inyector:

$$C = \frac{N}{w} = \frac{N}{\frac{\pi\, n}{30}} = \left| \frac{n}{n'} = \lambda^{-1} \sqrt{\frac{H_n}{H'_n}} = 1 \quad ; \quad n = n' = 600 \text{ rpm} \right| = \frac{91.658 \frac{Kgm}{seg}}{\frac{\pi \times 600}{30}} = 1458,8 \text{ m.Kg}$$

Para 4 inyectores y H_n = 510,2 m

$$Q^* = 4\ Q = 4 \times 0,1963 \frac{m^3}{seg} = 0,7852 \frac{m^3}{seg}$$

$$N^* = 4\ N = 4 \times 1222,1 \text{ CV} = 4888,4 \text{ CV}$$

$$C^* = 4\ C = 4 \times 1458,79 \text{ m.Kg} = 5835,16 \text{ m.Kg}$$

h) Caudal, potencia, par motor y nº de rpm, λ =1, para la turbina del apartado (d), si se la suponen 4 inyectores de 50 mm de diámetro, con c_1 = 100 m/seg, funcionando con un salto de 1000 m

$$Q = \lambda^2\ Q^* \sqrt{\frac{H_n}{H'_n}} = 1^2 \times 0,7852 \sqrt{\frac{1000}{510,2}} = 1,079 \frac{m^3}{seg}$$

$$N = \lambda^2\ N^* \left(\frac{H_n}{H^*_n}\right)^{3/2} = 1^2 \times 4.888,4 \text{ CV} \left(\frac{1000}{510,2}\right)^{3/2} = 13.414 \text{ CV}$$

$$C = \lambda^3\ C^* \left(\frac{H_n}{H^*_n}\right) = 1^3 \times 5.835,16 \text{ m.Kg} \left(\frac{1000}{510,2}\right) = 11.437 \text{ m.Kg}$$

$$n = \lambda^{-1}\ n' \sqrt{\frac{H_n}{H'_n}} = 1^{-1} \times 600 \text{ rpm} \sqrt{\frac{1000}{510,1}} = 840 \text{ rpm}$$

****

5.- Una turbina Pelton de 1 inyector se alimenta de un embalse cuyo nivel de agua se encuentra 300 m por encima del eje del chorro, mediante una conducción forzada de 6 Km de longitud y 680 mm de diámetro interior.
El coeficiente de rozamiento de la tubería vale 0,032.
La velocidad periférica de los álabes es 0,47 c_1
El coeficiente de reducción de velocidad de entrada del agua en el rodete vale 0,97
Las cazoletas desvían el chorro 175º, y la velocidad del agua se reduce en ellas en un 15%
El chorro tiene un diámetro de 90 mm
El rendimiento mecánico es 0,8
Determinar

a) Las pérdidas en el inyector, y su velocidad; pérdidas en la conducción forzada
b) La altura neta de la turbina
c) La altura de Euler
d) El caudal
e) El rendimiento manométrico
f) La potencia útil en el eje de la máquina

RESOLUCION

a) Pérdidas en la conducción forzada

Altura neta: $H_n = H - \text{Pérdidas tubería} = 300 - \text{Pérdidas tubería}$

Pérdidas tubería: $\dfrac{\lambda}{d_{tub}} \dfrac{v_{tub}^2}{2\,g} L = \dfrac{0{,}032}{0{,}68} \dfrac{v_{tub}^2}{2\,g} \times 6000 = 14{,}41\ v_{tub}^2\ \text{(m)}$

Por la ecuación de continuidad, $Q = \dfrac{\pi d_{iny}^2}{4} c_1 = \dfrac{\pi\, d_{tub}^2}{4} v_{tub}$ $\qquad v_{tub} = c_1 \dfrac{d_{iny}^2}{d_{tub}^2} = c_1 \left(\dfrac{0{,}09}{0{,}68}\right)^2 = 0{,}017517\ c_1$

luego:

Pérdidas tubería: $14{,}41\ v_{tub}^2 = 14{,}41 \times 0{,}017517^2 \times c_1^2 = 4{,}42 \times 10^{-3}\ c_1^2$

$H_n = 300 - 4{,}42 \times 10^{-3}\ c_1^2$

Pérdidas en el inyector h_d

$$h_d = \frac{c_1^2\ (1 - \phi^2)}{2\ g\ \phi^2} = H_n (1 - \phi^2) = H_n - \frac{c_1^2}{2\,g} = \frac{c_{1t}^2 - c_1^2}{2\,g} = \frac{\left(\dfrac{c_1}{0{,}97}\right)^2 - c_1^2}{2\,g} = 3{,}205.10^{-3}\ c_1^2$$

$$H_n = \frac{c_1^2}{2\,g} + h_d = \frac{c_1^2}{2\,g} + 3{,}205.10^{-3}\ c_1^2 = 0{,}05422\ c_1^2$$

ó tambien: $H_n = \dfrac{c_{1t}^2}{2\,g} = \dfrac{\left(\dfrac{c_1}{\phi_1}\right)^2}{2\,g} = \dfrac{c_1^2}{2\,g\,\phi_1^2} = 0{,}05422\ c_1^2$

Igualando las expresiones de H_n se obtiene la velocidad c_1:

$H_n = 300 - 4{,}42 \times 10^{-3}\ c_1^2 = 0{,}05422\ c_1^2$ $\qquad \boxed{c_1 = 71{,}52\ \text{m/seg}}$

Pérdidas inyector: $3{,}205 \times 10^{-3}\ c_1^2 = 3{,}205 \times 10^{-3} \times 71{,}52^2 = 16{,}4\ \text{m} = h_d$

ó tambien: $\dfrac{c_1^2}{2\,g} + h_d = \dfrac{c_1^2}{2\,g\,\phi_1^2}$; $h_d = \dfrac{c_1^2}{2\,g}\left(1 - \dfrac{1}{\phi_1^2}\right)$

Pérdidas tubería: $4{,}42 \times 10^{-3}\ c_1^2 = 4{,}42 \times 10^{-3} \times 71{,}52^2 = 22{,}61\ \text{m} = h_t$

b) Altura neta de la turbina

$H_n = 0{,}05422\ c_1^2 = 0{,}05422 \times 71{,}52^2 = 277{,}3$ m

c) Altura de Euler

La altura de Euler es el salto efectivo

Salto efectivo: $H_{ef} = H_n$ - Pérdidas $(h_d + h_r) = H$ - Pérdidas $(h_t + h_d + h_r)$

El salto efectivo se obtiene también a partir de:

$$\eta_{man} = \frac{H_{efectivo}}{H_n} \qquad H_{efectivo} = \eta_{man}\ H_n = \frac{c_1\, u_1 \cos\alpha_1 - c_2\, u_2 \cos\alpha_2}{g}$$

Triángulos de velocidades

Entrada

$c_1 = 71{,}52$ m/seg

$\alpha_1 = \beta_1 = 0$

$u_1 = 0{,}47\ c_1 = 0{,}47 \times 71{,}52 = 33{,}61$ m/seg $= u_2$

$w_1 = c_1 - u_1 = 71{,}52 - 33{,}61 = 37{,}91$ m/seg

Salida

$\beta_2 = 5º$

$w_2 = \psi\ w_1 = 0{,}85 \times 37{,}91 = 32{,}22$ m/seg

$$c_2 = \sqrt{u_2^2 + w_2^2 - 2\, c_2\, w_2 \cos\beta_2} = \sqrt{33{,}61^2 + 32{,}22^2 - (2 \times 33{,}61 \times 32{,}22\ \cos 5º)} = 3{,}2 \text{ m/seg}$$

$$\text{sen}\,\alpha_2 = \frac{w_2\ \text{sen}\,\beta_2}{c_2} = \frac{32{,}22\ \text{sen}\,5º}{3{,}2} = 0{,}8775 \quad ; \quad \alpha_2 = 61{,}34º$$

$$H_{efectivo} = \frac{c_1\, u_1 \cos\alpha_1 - c_2\, u_2 \cos\alpha_2}{g} = \frac{(71{,}52 \times 33{,}61) - (3{,}2 \times 33{,}61\ \cos 61{,}34º)}{g} = 240 \text{ m}$$

d) Caudal

$$Q = \frac{\pi\ d_1^2}{4}\ c_1 = \frac{\pi \times 0{,}09^2}{4} \times 71{,}52 = 0{,}4548\ \frac{m^3}{seg}$$

e) Rendimiento manométrico

Se sabe que $\eta_{vol} = 1$

$$\eta_{man} = \frac{H_{efectivo}}{H_n} = \frac{240}{277{,}3} = 0{,}8653 = 86{,}53\%$$

Rendimiento hidráulico

$\eta_{hidráulico} = \eta_{man} \cdot \eta_{vol} = 0{,}8653 \times 1 = 86{,}53\%$

f) Potencia útil en el eje de la máquina

La potencia útil se conoce también como potencia al freno

$$N = \frac{\gamma\ Q\ H_n\ \eta}{75} = \left|\ \eta = \eta_{vol}\ \eta_{mec}\ \eta_{man} = 1 \times 0{,}88 \times 0{,}8653 = 0{,}7614 \right| =$$

$$= \frac{1000\ \frac{Kg}{m^3} \times 0{,}4548\ \frac{m^3}{seg} \times 277{,}3 \text{ m} \times 0{,}7614}{75} = 1280 \text{ CV} = 0{,}94 \text{ MW}$$

****

6.- Una turbina hidráulica funcionando con un caudal de 9,1 m³/seg y salto neto de 100 m, gira a 500 rpm. Los triángulos de velocidades se han proyectado para que el rendimiento manométrico sea óptimo. La potencia al freno es de 9000 CV, con un rendimiento mecánico del 0,987.

Determinar

a) El grado de reacción

b) Rendimiento global, manométrico y volumétrico

c) El caudal que sale por el aspirador difusor
d) Diámetros de entrada y salida del rodete; anchuras del rodete

---

RESOLUCION

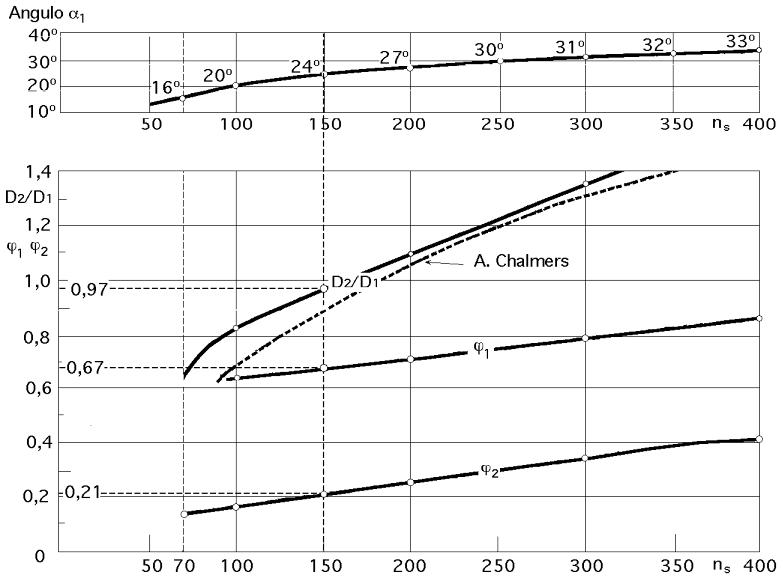
Tipo de turbina; nº de revoluciones específico

$$n_s = \frac{n\sqrt{N}}{H_n^{5/4}} = \frac{500\sqrt{9000}}{100^{5/4}} = 150 \text{ (Francis normal)}$$

a) Grado de reacción

$$c_1 = \sqrt{1-\sigma}\sqrt{2\,g\,H_n} = \phi_1\sqrt{2\,g\,H_n} \quad ; \quad \phi_1 = \sqrt{1-\sigma}$$

Dimensiones del distribuidor b_1 y D_1, ángulo de ataque α_1 y coeficientes óptimos de velocidad ϕ_1 y ϕ_2 para turbinas Francis en función de n_s



Se obtiene: $\phi_1 = 0{,}67$; $\phi_2 = 0{,}21$; $\alpha_1 = 24º$

El valor de ϕ_2 se podía haber obtenido, también, en la forma:

$$\phi_2^2 = \frac{c_2^2}{2\,g\,H_n} = 5{,}57 \times 10^{-5} \times n_s^{4/3} \qquad \phi_2 = 7{,}465 \times 10^{-3} \times n_s^{2/3} = 7{,}465 \times 10^{-3} \times 150^{2/3} = 0{,}21$$

$$0{,}67 = \sqrt{1-\rho} \quad ; \quad \rho = 0{,}551$$

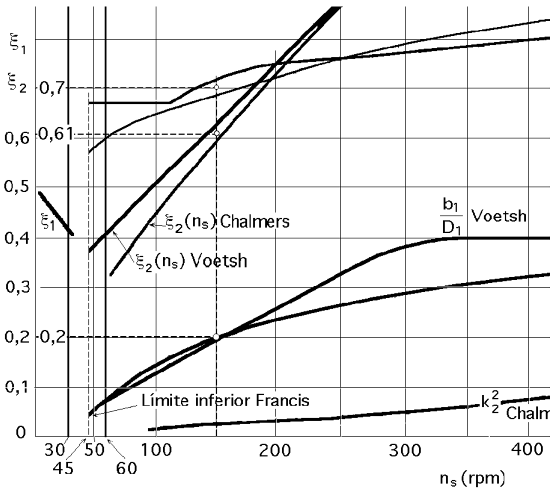
b) Rendimiento global, manométrico y volumétrico

Rendimiento global η

Potencia al freno: $N\,(CV) = \dfrac{\gamma\,Q\,H_n\,\eta}{75}$; $9000\text{ CV} = \dfrac{1000 \times 9{,}1 \times 100\ \eta}{75}$; $\eta = 0{,}7417 = 74{,}17\%$

$$h_{man\,(\alpha_2=90º)} = \frac{c_1\,u_1\cos\alpha_1}{g\,H_n} = \left| \begin{array}{l} c_1 = \phi_1\sqrt{2\,g\,H_n} = 0{,}67\sqrt{2\,g \times 100} = 29{,}66 \text{ m/seg} \\ \text{Para: } n_s = 150 \qquad \xi_1 = 0{,}7 \\ u_1 = \xi_1\sqrt{2\,g\,H_n} = 0{,}7\sqrt{2\,g \times 100} = 31 \text{ m/seg} \end{array} \right| = 0{,}857 = 85{,}7\%$$

$$\eta = \eta_{vol} \cdot \eta_{man} \cdot \eta_{mec} \quad ; \quad \eta_{vol} = \frac{\eta}{\eta_{man} \cdot \eta_{mec}} = \frac{0{,}7417}{0{,}857 \times 0{,}987} = 0{,}877$$



Comprobación de η:

De la relación entre u_2 y n_s, se obtiene:

$$n = 0{,}2738\ \frac{n_s\ H_n^{3/4}}{\sqrt{Q\,\eta}} \qquad \eta = \frac{\left\{0{,}2738\ \dfrac{n_s\ H_n^{3/4}}{n}\right\}^2}{Q} = \frac{\left\{\dfrac{0{,}2738 \times 150 \times 100^{3/4}}{500}\right\}^2}{9{,}1} = 0{,}7414 \text{ (l.q.c)}$$

c) Caudal que sale por el aspirador difusor

$$Q_{salida} = \eta_{vol}\ Q = 0{,}877 \times 9{,}1 = 7{,}98\ \frac{m^3}{seg}$$

d) Diámetros de entrada y salida del rodete y anchura del rodete

Diámetro a la entrada

$$n = 84{,}55\ \frac{\xi_1}{D_1}\ \sqrt{H_n} \quad ; \quad D_1 = \frac{84{,}55\ \xi_1\ \sqrt{H_n}}{n} = \frac{84{,}55 \times 0{,}7 \times \sqrt{100}}{500} = 1{,}1837 \text{ m}$$

Anchura del rodete a la entrada:

$$\frac{b_1}{D_1} = 0{,}2 \quad ; \quad b_1 = 0{,}2\ D_1 = 0{,}2 \times 1{,}1837 \text{ m} = 0{,}2367 \text{ m}$$

Diámetro a la salida D_2:

$$u_2 = \xi_2 \sqrt{2\,g\,H_n} = \frac{D_2}{2}\ \frac{\pi n}{30}$$
$$u_2 = \xi_2 \sqrt{2\,g\,H_n} = 0{,}61\ \sqrt{2g \times 100} = 27 \text{ m/seg}$$
$$D_2 = \frac{60 \times 27}{500\ \pi} = 1{,}031 \text{ m}$$

****

7.- Dada una turbina Francis de características: Q = 3 m³/seg, H_n = 200 m y n_s < 115, conectada a un alternador de 50 ciclos/seg; η = 0,85

Determinar

a) Potencia

b) Elección de la velocidad rpm, sabiendo que n_s< 115

c) Dimensiones del rodete y del distribuidor

RESOLUCION

a) Potencia

$$N = \frac{\gamma\ Q\ H_n\ \eta}{75} = \frac{1000 \times 3 \times 200 \times 0{,}85}{75} = 6800 \text{ CV}$$

b) Elección de la velocidad rpm

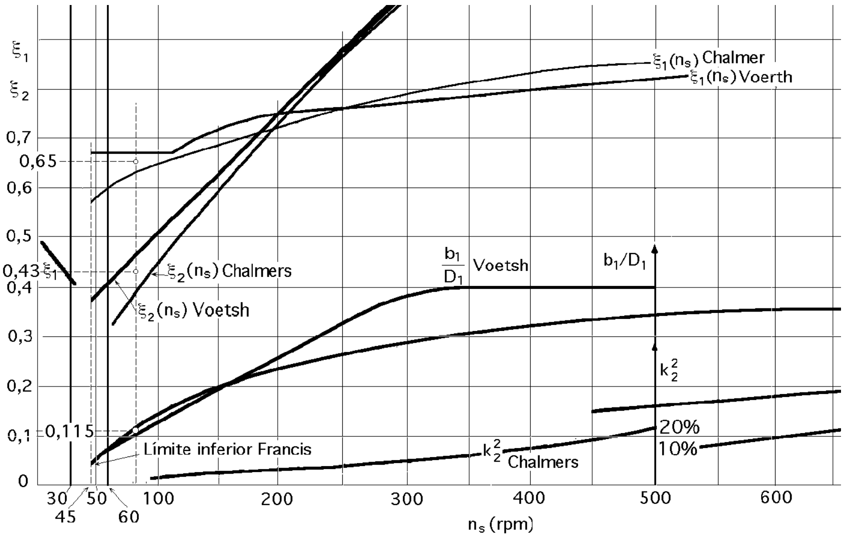
$$n_s = \frac{n\sqrt{N}}{H_n^{5/4}} = \frac{n\sqrt{6800}}{200^{5/4}} = 0{,}10964\ n < 115 \qquad n < \frac{115}{0{,}10964}\ ;\quad n < 1050 \text{ rpm}$$

$$Z\,n = 3000 \begin{cases} \text{Para } Z = 3 \text{ pares de polos} & n = \frac{3000}{3} = 1000 \text{ rpm} \\ \text{Para } Z = 4 \text{ pares de polos} & n = \frac{3000}{4} = 750 \text{ rpm} \end{cases}$$

Por seguridad se tomará, $Z = 4$ $\quad n = 750$ rpm ; $n_s = 0{,}10964 \times 750 = 82{,}23$, Francis lenta

c) Dimensiones del rodete y del distribuidor

Para: $n_s = 81{,}5$ rpm, se obtiene que: $\begin{cases} \xi_1 = 0{,}65\ ;\quad \xi_2 = 0{,}43 \\ \frac{b_1}{D_1} = 0{,}115 \end{cases}$



Orden de magnitud de las dimensiones de las ruedas Francis, que relacionan ξ_1 y ξ_2 con n_s

$$u_1 = \xi_1 \sqrt{2\,g\,H_n} = 0{,}65\ \sqrt{2\,g \times 200} = 40{,}7 \text{ m/seg} = \frac{D_1\,\pi\,n}{60} \qquad \boxed{D_1 = 1{,}036 \text{ m}}$$

$$u_2 = \xi_2 \sqrt{2\,g\,H_n} = 0{,}43\ \sqrt{2\,g \times 200} = 26{,}9 \text{ m/seg} = \frac{D_2\,\pi\,n}{60} \qquad \boxed{D_2 = 0{,}6696 \text{ m}}$$

$$b_1 = 0{,}115\ D_1 = 0{,}115 \times 1{,}036 = 0{,}1191 \text{ m}$$

Utilizando la Fórmula de Ahlfors (que sabemos es para unas condiciones únicas y muy concretas, ya que se utilizan valores medios de $\alpha = 7/8$ y $\psi = 0{,}91$), se obtendría un diámetro D_2:

$$D_2 = 4{,}375 \sqrt[3]{\frac{Q}{n}} = 4{,}375 \sqrt[3]{\frac{3}{750}} = 0{,}695 \text{ m}$$

****

8.- Una turbina Francis está acoplada directamente a un alternador de 5 pares de polos. El caudal es de 1 m³/seg. Los diámetros de entrada y salida de los álabes son 1 m y 0,45 m, y las secciones de paso, entre álabes, de 0,14 m² y 0,09 m².

El ángulo α_1= 10º, y β_2= 45º. El rendimiento manométrico de esta turbina es 0,78.

Determinar

a) Los triángulos de velocidades

b) La altura neta

c) El par motor y potencia de la turbina

d) El nº de revoluciones específico

e) El caudal, altura neta, potencia y par motor, si se cambia el alternador por otro de 4 pares de polos.

RESOLUCION

Nº de r.p.m. : $n = \frac{60\ f}{z} = \frac{3000}{5} = 600$ rpm

a) Triángulos de velocidades

Entrada:

$$u_1 = \frac{D_1 \pi n}{60} = \frac{1 \times \pi \times 600}{60} = 31{,}4 \text{ m/seg}$$

$$c_{1m} = \frac{Q}{\Omega_1} = \frac{1 \frac{m^3}{seg}}{0{,}14\ m^2} = 7{,}14 \text{ m/seg}$$

$$c_1 = \frac{c_{1m}}{\text{sen}\ \alpha_1} = \frac{7{,}14}{\text{sen } 10º} = 41{,}12 \text{ m/seg}$$

$$\text{tg}\ \beta_1 = \frac{w_1\ \text{sen}\ \beta_1}{w_1\ \cos \beta_1} = \frac{c_1\ \text{sen}\ \alpha_1}{w_1\ \cos \beta_1} = \left| \begin{array}{l} c_{1n} = c_1 \cos \alpha_1 = 41{,}12 \cos 10 = 40{,}49 \text{ m/seg} = u_1 + w_1 \cos \beta_1 \\ w_1 \cos \beta_1 = c_{1n} - u_1 = 40{,}49 - 31{,}4 = 9{,}09 \text{ m/seg} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{7{,}14}{9{,}09} = 0{,}7854 \qquad \beta_1 = 38{,}15º$$

$$w_1 = \frac{9{,}09}{\cos \beta_1} = \frac{9{,}09}{\cos 38{,}15º} = 11{,}56 \text{ m/seg}$$

Salida:

$$u_2 = \frac{D_2 \pi n}{60} = \frac{0{,}45 \times \pi \times 600}{60} = 14{,}14 \text{ m/seg}$$

$$c_{2m} = \frac{Q}{\Omega_2} = \frac{1 \frac{m^3}{seg}}{0{,}09\ m^2} = 11{,}1 \text{ m/seg} = c_2\ \text{sen}\ \alpha_2$$

$$w_2 = \frac{c_{2m}}{\text{sen}\ \beta_2} = \frac{11{,}1}{\text{sen } 45º} = 15{,}7 \text{ m/seg}$$

$$c_2 = \sqrt{u_2^2 + w_2^2 - 2\, u_2\, w_2 \cos \beta_2} = \sqrt{15{,}7^2 + 14{,}14^2 - (2 \times 15{,}7 \times 14{,}14 \cos 45º)} = 11{,}5 \text{ m/seg}$$

$$\text{sen}\ \alpha_2 = \frac{11{,}1}{11{,}5} = 0{,}9648 \quad ; \quad \alpha_2 = 74{,}85º$$

b) Altura neta

$$H_n = \frac{c_1\, u_1 \cos \alpha_1 - c_2\, u_2 \cos \alpha_2}{g\, \eta_{man}} = \frac{41{,}11 \times 31{,}4 \cos 10 - 11{,}5 \times 14{,}4 \cos 74{,}85}{0{,}78\ g} = 160{,}74 \text{ m}$$

c) Potencia de la turbina

$$N = N_u = \frac{\gamma\ Q\ H_n\ \eta}{75} = \left|\ \eta = \eta_{man}\, \eta_{org}\, \eta_{vol} = 0{,}78 \times 1 \times 1 = 0{,}78\ \right| = \frac{1000 \times 1 \times 160{,}74 \times 0{,}78}{75} = 1671 \text{ CV} =$$

$$= 125.377\ \frac{Kgm}{seg} = 1{,}23 \text{ MW}$$

Par motor:

$$C = \frac{N}{w} = \frac{30\ N}{\pi\, n} = \frac{30 \times 125.377 \frac{Kgm}{seg}}{600\ \pi} = 1995{,}4 \text{ m.Kg}$$

d) Nº de revoluciones específico

$$n_s = \frac{600\ \sqrt{1671{,}7}}{160{,}74^{5/4}} = 42{,}86 \text{ (Francis lenta)}$$

e) Caudal, altura neta, potencia y par motor, si se cambia el alternador por otro de 4 pares de polos.

Para 4 pares de polos: $n' = \dfrac{3000}{4} = 750$ rpm

Parábola de regímenes semejantes, $H_n = \dfrac{160,74}{1^2}\, Q^2 = 160,74\, Q^2$

$$\frac{n}{n'} = \sqrt{\frac{H_n}{H'_n}} = \frac{Q}{Q'} = \sqrt[3]{\frac{N}{N'}} = \sqrt{\frac{C}{C'}}$$

$$\frac{600}{750} = \sqrt{\frac{160,74 \text{ m}}{H'_n}} = \frac{1 \frac{m^3}{seg}}{Q'} = \sqrt[3]{\frac{1671,7 \text{ CV}}{N'}} = \sqrt{\frac{1995,4 \text{ m.Kg}}{C'}}$$

Resolviendo se obtiene:

$H'_n = 251,15$ m ; $Q' = 1,25 \dfrac{m^3}{seg}$; $N' = 3265$ CV ; $C' = 3118$ mKg

Diámetros de la turbina:

$$D_2 = \frac{60\ u_2}{\pi\, n} = \frac{60 \times 14,14 \frac{m}{seg}}{\pi \times 600 \frac{1}{seg}} = 0,450 \text{ m}$$

$$D_1 = \frac{60\ u_1}{\pi\, n} = \frac{60 \times 31,4 \frac{m}{seg}}{\pi \times 600 \frac{1}{seg}} = 1 \text{ m} \quad \text{ó} \quad D_1 = D_2 \frac{u_1}{u_2} = 0,45 \times \frac{31,4}{14,14} = 1 \text{ m}$$

****

9.- Una turbina Francis gira a 600 rpm y en ella entra un caudal de 1 m³/seg. Los diámetros de entrada y salida son de 1 m y 0,45 m respectivamente, y las secciones entre álabes correspondientes de 0,14 m² y 0,09 m². El ángulo de salida del agua del distribuidor es de 12º, el ángulo de salida de la rueda β_2 = 45º y el rendimiento manométrico de la turbina del 78%.

Determinar

a) El salto neto

b) El par y la potencia sobre el eje

RESOLUCION

Triángulos de velocidades

Entrada:

$$u_1 = \frac{D_1\, \pi\, n}{60} = \frac{1 \times \pi \times 600}{60} = 31,4 \text{ m/seg}$$

$$c_{1m} = \frac{Q}{\Omega_1} = \frac{1 \frac{m^3}{seg}}{0,14 \text{ m}^2} = 7,14 \text{ m/seg}$$

$$c_{1n} = c_1 \cos \alpha_1 = \frac{c_{1m}}{\text{tg}\, \alpha_1} = \frac{7,14 \text{ m/seg}}{\text{tg } 12^\circ} = 33,6 \text{ m/seg}$$

$$c_1 = \frac{c_{1m}}{\text{sen}\, \alpha_1} = \frac{7,14}{\text{sen } 12^\circ} = 34,34 \text{ m/seg}$$

$$w_1 = \sqrt{u_1^2 + c_1^2 - 2\, u_1\, c_1 \cos \alpha_1} = \sqrt{31,4^2 + 34,34^2 - (2 \times 31,4 \times 34,34 \cos 12^\circ)} = 7,47 \text{ m/seg}$$

$$\text{sen}\, \beta_1 = \frac{c_{1m}}{w_1} = \frac{7,14}{7,47} = 0,9558 \quad ; \quad \beta_1 = 72,9^\circ$$

Salida:

$$u_2 = \frac{D_2\, \pi\, n}{60} = \frac{0,45 \times \pi \times 600}{60} = 14,14 \text{ m/seg}$$

$$c_{2m} = \frac{Q}{\Omega_2} = \frac{1\ \frac{m^3}{seg}}{0{,}09\ m^2} = 11{,}1\ m/seg = c_2\ \text{sen}\ \alpha_2$$

$$w_2 = \frac{c_{2m}}{\text{sen}\ \beta_2} = \frac{11{,}1}{\text{sen}\ 45^o} = 15{,}7\ m/seg$$

$$c_{2n} = u_2 - w_2\ \cos\beta_2 = 14{,}14 - (15{,}7 \times \cos 45^o) = 3{,}0384\ m/seg = c_2 \cos\alpha_2$$

$$\text{tg}\ \alpha_2 = \frac{c_{2m}}{c_{2n}} = \frac{11{,}1}{3{,}0384} = 3{,}6532 \quad ; \quad \alpha_2 = 74{,}7^o$$

a) Salto neto

$$H_n = \frac{u_1\ c_{1n} - u_2\ c_{2n}}{g\ \eta_{man}} = \frac{(31{,}4 \times 33{,}6) - (14{,}14 \times 3{,}038)}{0{,}78\ g} = 132{,}4\ m$$

b) Potencia en el eje

$$N = \frac{\gamma\ Q\ H_n\ \eta}{75} = |\ \eta = \eta_{man}\ \eta_{org}\ \eta_{vol} = 0{,}78 \times 1 \times 1 = 0{,}78\ | = \frac{1000 \times 1 \times 132{,}4 \times 0{,}78}{75} = 1377\ CV =$$

$$= 103.270\ \frac{Kgm}{seg}$$

Par motor

$$C = \frac{N}{w} = \frac{30\ N}{\pi\ n} = \frac{30 \times 103.270\ \frac{Kgm}{seg}}{600\ \pi} = 1643{,}6\ m.Kg$$

Tipo de turbina:

$$n_s = \frac{600\ \sqrt{1377}}{132{,}4^{5/4}} = 49{,}6 \quad \text{(Francis lenta)}$$

****

10.- Se tiene una turbina de las siguientes características: H_n = 256 m ; n = 500 rpm ; Q = 11 m³/seg. Determinar:

- ***a) El tipo de turbina***
- ***b) El rendimiento manométrico máximo, sabiendo que η_{vol} = 1***
- ***c) El grado de reacción***
- ***d) Los diámetros de entrada y salida y altura del distribuidor***
- ***e) La altura del aspirador difusor, sabiendo que el rendimiento del mismo es 0,85***
- ***f) La cámara espiral***

RESOLUCION

a) Tipo de turbina

$$n_s = \frac{n\ \sqrt{N}}{H_n^{5/4}}$$

$$N = \frac{\gamma\ Q\ H_n\ \eta}{75} \quad \text{(No se puede aplicar porque no se conoce el rendimiento)}$$

pero sin embargo, como de lo único que se trata es de conocer el tipo de turbina, se puede dar al rendimiento un valor promediado según la ecuación aproximada:

$$N = 11\ Q\ H_n = 11 \times 11\ \frac{m^3}{seg} \times 256\ m = 30.976\ CV$$

$$n_s = \frac{n\ \sqrt{N}}{H_n^{5/4}} = \frac{500\ \sqrt{30.976}}{256^{5/4}} = 86 \quad \text{(Francis lenta)}$$

b) Rendimiento manométrico máximo

$$\eta_{man} = 2\,(\xi_1\,\mu_1 - \xi_2\,\mu_2) = \left|\begin{array}{c} \text{Rendimiento máximo} \\ \vec{c}_2 \quad \vec{u}_2 \;\; ; \;\; c_{2n} = 0 \;\; ; \;\; \mu_2 = 0 \end{array}\right| = 2\,\xi_1\,\mu_1$$

Para un valor de $n_s \approx 86$, gráficamente se obtiene $\begin{cases} \xi_1 = 0{,}67 \;\; ; \;\; \xi_2 = 0{,}45 \\ \phi_1 = 0{,}63 \;\; ; \;\; \alpha_1 = 018^o \;\; ; \;\; \dfrac{D_2}{D_1} = 0{,}77 \end{cases}$

Como:

$c_{1n} = c_1 \cos\alpha_1 = \mu_1 \sqrt{2\,g\,H_n} = \phi_1 \sqrt{2\,g\,H_n}\,\cos\alpha_1$ $\quad \boxed{\mu_1 = \phi_1 \cos\alpha_1 = 0{,}63 \times \cos 18^o = 0{,}60}$

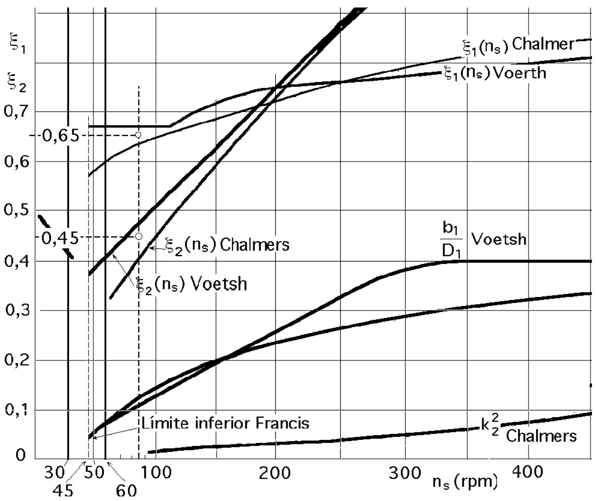
resulta:

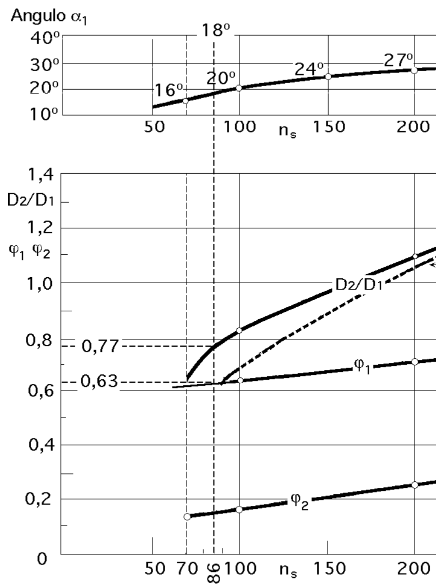
$\eta_{man\;máx} = 2 \times 0{,}67 \times 0{,}60 = 0{,}804 = 80{,}4\%$

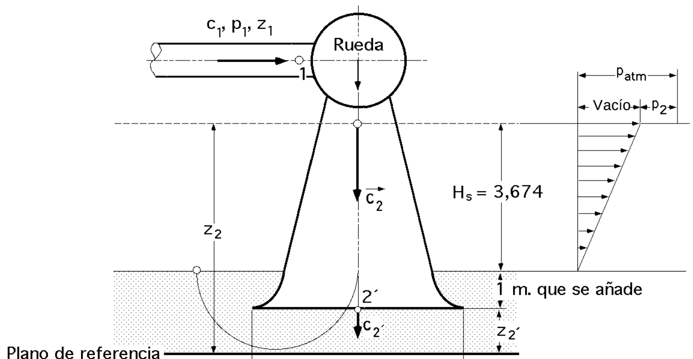
Con este valor habría que volver a calcular N y n_s mediante una segunda iteración:

$$N = \frac{\gamma\,Q\,H_n\,\eta}{75} = \frac{1000 \times 11 \times 256 \times 0{,}804}{75} = 30187 \text{ CV}$$

$$n_s = \frac{n\,\sqrt{N}}{H_n^{5/4}} = \frac{500\,\sqrt{30.187}}{256^{5/4}} = 84{,}8 \text{ (Francis lenta). Prácticamente igual}$$







c) Grado de reacción

$\sqrt{1 - \sigma^2} = \phi_1 = 0{,}63 \qquad \sigma = 1 - 0{,}63^2 = 0{,}603$

d) Diámetros de entrada y salida y altura del distribuidor

Diámetro de entrada

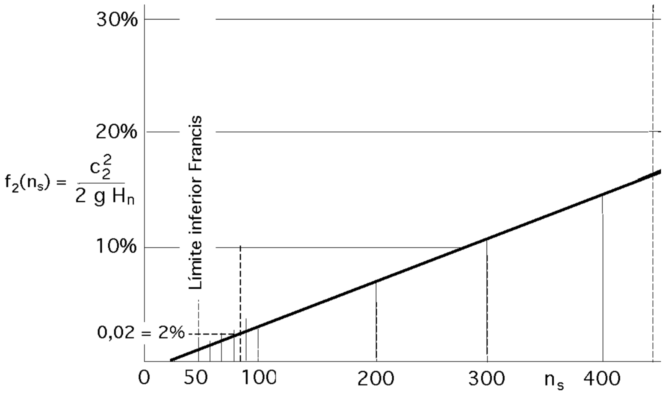
$$D_1 = \frac{60\ u_1}{\pi\ n} = \left|\ u_1 = \xi_1 \sqrt{2\ g\ H_n} = 0{,}67 \sqrt{2\ g \times 256} = 47{,}46\ \frac{m}{seg}\ \right| = \frac{60 \times 47{,}46}{500\ \pi} = 1{,}81\ m$$

Diámetro de salida

$$D_2 = \frac{60\ u_2}{\pi\ n} = \left|\ u_2 = \xi_2 \sqrt{2\ g\ H_n} = 0{,}45 \sqrt{2\ g \times 256} = 31{,}9\ \frac{m}{seg}\ \right| = \frac{60 \times 31{,}9}{500\ \pi} = 1{,}218\ m$$

Altura del distribuidor = altura del álabe a la entrada

$$\frac{b_1}{D_1} = 0{,}12 \quad ; \quad b_1 = 0{,}12\ D_1 = 0{,}12 \times 1{,}81 = 0{,}217\ m$$



e) Altura del aspirador difusor, sabiendo que el rendimiento del mismo es 0,85

$$H_s \le \frac{p_{atm} - p_2}{\gamma} - \frac{c_2^2}{2\ g}\ \eta_d$$

$$\frac{p_{atm}}{\gamma} = 10{,}33\ m$$

$$\frac{p_2}{\gamma\ H_n} = 0{,}009 \quad ; \quad \frac{p_2}{\gamma} = 0{,}009 \times H_n = 0{,}009 \times 256 = 2{,}304\ m$$

$$\text{Cálculo de } c_2 : \left\{ \begin{array}{l} 1^a \text{ Forma: } \dfrac{c_2^2}{2\ g\ H_n} = f_2(n_s) = \phi_2^2 = 0{,}14^2 = 0{,}0196 \quad ; \quad \dfrac{c_2^2}{2\ g} = 0{,}0196 \times 256 = 5{,}1\ m \\ 2^a \text{ Forma: } n_s = 86 \qquad \phi_2 = 0{,}14\ ;\ c_2 = 0{,}14 \sqrt{2\ g\ H_n} = 0{,}14 \sqrt{2\ g \times 256} = 9{,}91 \\ \qquad\qquad \dfrac{c_2^2}{2\ g} = \dfrac{9{,}91^2}{2\ g} = 5{,}01\ m \end{array} \right\}$$

$$H_s \le \frac{p_{atm} - p_2}{\gamma} - \frac{c_2^2}{2\ g}\ \eta_d \quad ; \quad H_s \le (10{,}33 - 2{,}304) - (5{,}1 \times 0{,}85) = 3{,}674\ m$$

Valor de $D_{2'}$

Como en 2´ la velocidad $c_{2'} \le 1$ m/seg, el valor de $D_{2'}$ se puede hallar en la forma:

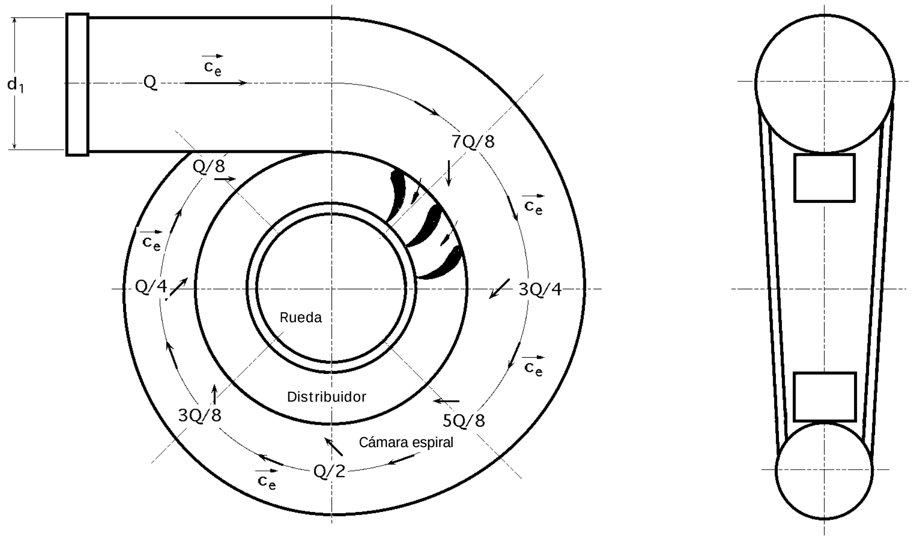
$$c_{2'} = \frac{Q}{\Omega_{2'}} = \frac{4\ Q}{\pi\ D_{2'}^2} = \frac{4 \times 11}{\pi\ D_{2'}^2} = 1\ \frac{m}{seg} \quad ; \quad D_{2'} = 3{,}74\ m \quad ; \quad r_{2'} = 1{,}87\ m$$

Profundidad $z_{2'}$ a la que tiene que ir la solera

Präsil: $k = z_2\ r_2^2 = z_{2'}\ r_{2'}^2$

$z_2 = 3{,}67 + 1 + z_{2'} = 4{,}67 + z_{2'}$

$k = (4{,}67 + z_{2'})\ r_2^2 = z_{2'}\ r_{2'}^2 \quad ; \quad k = (4{,}67 + z_{2'}) \times 0{,}609^2 = z_{2'} \times 1{,}87^2 \quad ; \quad \boxed{z_{2'} = 0{,}554\ m}$



f) Cálculo de la cámara espiral

Se supondrá metálica $\quad c_e = 0,18 + 0,28\ \sqrt{2\ g\ H_n} = 0,18 + 0,28\ \sqrt{2\ g \times 256} = 20$ m/seg

Se puede dividir la cámara espiral en 8 partes, de forma que:

$$\Omega_1 = \frac{Q}{c_c} = \frac{\pi\ d_1^2}{4}\ ;\quad d_1 = 1,128\ \sqrt{\frac{Q}{c_e}} = 1,128\ \sqrt{\frac{11}{20}} = 0,836 \text{ m}$$

$d_2 = \sqrt{\frac{7}{8}}\ d_1 = 0,782$ m $\qquad d_3 = \sqrt{\frac{6}{8}}\ d_1 = 0,724$ m $\qquad d_4 = \sqrt{\frac{5}{8}}\ d_1 = 0,661$ m

$d_5 = \sqrt{\frac{4}{8}}\ d_1 = 0,591$ m $\qquad d_6 = \sqrt{\frac{3}{8}}\ d_1 = 0,512$ m $\qquad d_7 = \sqrt{\frac{2}{8}}\ d_1 = 0,418$ m

$d_8 = \sqrt{\frac{1}{8}}\ d_1 = 0,295$ m

****

11.- El modelo de la rueda de una turbina tiene un diámetro de 30 cm y desarrolla una potencia de 35 CV bajo un salto neto de 7,5 m a 1200 rpm
El prototipo ha de proporcionar 10.000 CV en un salto neto de 6 metros y un rendimiento del 90%.
El tubo de aspiración tiene que recobrar el 75% de la energía cinética a la salida
Determinar
a) El diámetro y la velocidad "n" del prototipo
b) Si el modelo comienza a cavitar cuando la presión a la entrada del tubo de aspiración es de 7 m por debajo de la presión atmosférica, ¿Cuál será la máxima altura de la rueda del prototipo por encima del nivel más bajo del río para evitar la cavitación en una central instalada en una montaña en donde la presión atmosférica es de 0,85 Kg/cm², y el agua se encuentra a 20ºC?

RESOLUCION

El rendimiento máximo en el modelo y en el prototipo son iguales, por lo que los triángulos de velocidades son geométricamente semejantes, pero como las velocidades son distintas, las presiones serán diferentes.

a) Diámetro y velocidad "n" del prototipo

En el punto de funcionamiento con rendimiento máximo, las velocidades específicas del modelo y del prototipo tienen que ser iguales $n_{s\ mod} = n_{s\ prot}$

$$n_s = \frac{1200\ \sqrt{35}}{7,5^{5/4}} = \frac{n_{prot}\ \sqrt{10000}}{6^{5/4}} \qquad n_{prot} = 53,7 \text{ rpm (Velocidad del prototipo)}$$

$n_s = \dfrac{1200\sqrt{35}}{7{,}5^{5/4}} = 572$ (Turbina hélice) $D_p = D_{1p} = D_{2p}$

Diámetro D_p

Al ser los triángulos de velocidades semejantes implica que los coeficientes óptimos también lo son, por lo que: $\xi_{mod} = \xi_{prot}$

$$\left\{\begin{aligned} u_{mod} &= \xi_m \sqrt{2\,g\,H_{n(m)}} = \frac{\pi\,D_m\,n_m}{60} \\ u_{prot} &= \xi_p \sqrt{2\,g\,H_{n(p)}} = \frac{\pi\,D_p\,n_p}{60} \end{aligned}\right\} \qquad \sqrt{\frac{H_{n(m)}}{H_{n(p)}}} = \frac{D_m\;n_m}{D_p\;n_p} \quad ; \quad \sqrt{\frac{7{,}5}{6}} = \frac{0{,}3 \times 1200}{D_p \times 53{,}7} \quad ; \quad D_p = 6\text{ m}$$

b) El modelo comienza a cavitar cuando la presión a la entrada del tubo de aspiración es de 7 m por debajo de la presión atmosférica

PROTOTIPO

La máxima altura de la rueda del prototipo por encima del nivel más bajo del río para evitar la cavitación en una central instalada en una montaña en donde la presión atmosférica es de 0,85 Kg/cm², y el agua se encuentra a 20ºC, es:

$$H_{s\ prot} \le \frac{p_{atm\ (lugar)} - p_{2prot}}{\gamma} - \frac{c_{2prot}^2}{2\,g}\,\eta_d$$

en la que se ha supuesto que, $c'_{2\ prot} < 1$ m/seg $\dfrac{c'_{2\ prot}}{2\,g}$ sea despreciable

$\dfrac{p_{2prot}}{\gamma}$ es la presión a la salida de la rueda

$\dfrac{p_{atm}}{\gamma}$ (es la presión del lugar)

Correspondencia entre las alturas al nivel del mar, la presión media y la altura equivalente en metros de c.a., pérdidas de carga en metros y temperatura

Altitud sobre el nivel del mar	Presión atmosférica		Pérdidas de carga	Pérdidas por temperatura
metros	mm de Hg	metros c.a.	metros	metros
0	760	10,33	0,00	10ºC-0,125
100	751	10,21	0,12	15ºC-0,173
200	742	10,08	0,25	20ºC-0,236
300	733	9,96	0,37	25ºC-0,32

MODELO

Como la turbina modelo se ha ensayado en Laboratorio: $\dfrac{p_{atm}}{\gamma} = 10{,}33$ m

$$\text{Semejanza de presiones,}\ \left\{\begin{aligned} &\text{Modelo},\ \frac{p_{2\ mod}}{\gamma} = H_{mod} \\ &\text{Prototipo},\ \frac{p_{2\ prot}}{\gamma} = H_{prot} \end{aligned}\right\} \qquad \frac{p_{2\ prot}}{p_{2\ mod}} = \frac{H_{prot}}{H_{mod}} = \frac{6}{7{,}5} = 0{,}8$$

Como en el Laboratorio se supone estamos a nivel del mar resulta que las pérdidas debidas a la altura son nulas

A la temperatura de 20ºC el agua tiene unas pérdidas debidas a la temperatura de 0,236 m

$\dfrac{p_{2mod}}{\gamma} = (10{,}33 - 7) -$ Pérdidas por temperatura $= 3{,}33 - 0{,}236 = 3{,}094$ m

PROTOTIPO

$\dfrac{p_{2prot}}{\gamma} = 3{,}094 \times \dfrac{6}{7{,}5} = 2{,}475$ m

Velocidad $c_{2\,prot}$ del prototipo; a partir de la potencia se determina el caudal, en la forma:

$$N_{prot} = \frac{\gamma\ Q_{prot}\ H_{n\,prot}\ \eta}{75}\ ;\quad 10000\ CV = \frac{1000\ \frac{Kg}{m^3}\ x\ Q_{prot}\ x\ 6\ m\ x\ 0{,}9}{75} \qquad Q_{prot} = 138{,}88\ \frac{m^3}{seg}$$

Por la condición de rendimiento máximo, $c_2 \quad u_2 \qquad c_2 = c_{2m}$

$$c_{2(prot)} = \frac{4\ Q_{prot}}{\pi D^2_{2\,(prot)}} = \frac{4\ x\ 138{,}88}{\pi\, 6^2} = 4{,}91\ m/seg$$

$$\frac{p_{atm}}{\gamma}\ (\text{presión del lugar}) = 0{,}85\ x\ 10{,}33 = 8{,}78\ m$$

$$H_s \le (8{,}78 - 2{,}475) - \frac{4{,}91^2}{2\ g}\ x\ 0{,}75 = 5{,}38\ m$$

que parece un poco elevado, por cuanto para turbinas hélice $H_s < 4$ m, pero hay que tener en cuenta que está calculado a potencia máxima.

De otra forma

$$\begin{cases} \text{Modelo},\ H_{mod} = \dfrac{c^2_{2m\,(mod)}}{2\ g} + \dfrac{p_{2\,(mod)}}{\gamma} + z_{2\,(mod)} \\ \text{Prototipo},\ H_{prot} = \dfrac{c^2_{2m\,(prot)}}{2\ g} + \dfrac{p_{2\,(prot)}}{\gamma} + z_{2\,(prot)} \end{cases}$$

$$z_{2\,(mod)} \approx z_{2\,(prot)}$$

$$N_{prot} = \frac{1000\ Q_{prot}\ 6\ x\ 0{,}9}{75} = 10.000\ CV$$

$$Q_{prot} = 138{,}88\ \frac{m^3}{seg} = c_{2m\,(prot)}\ \frac{\pi D^2_{2\,(prot)}}{4} = c_{2\,(prot)}\ \frac{\pi\ x\ 6^2}{4} \qquad c_{2\,(prot)} = 4{,}91\ m/seg$$

$$N_{mod} = \frac{1000\ Q_{mod}\ 7{,}5\ x\ 0{,}9}{75} = 35\ CV$$

$$Q_{mod} = 0{,}388\ \frac{m^3}{seg} = c_{2m\,(mod)}\ \frac{\pi D^2_{2\,(mod)}}{4} = c_{2\,(mod)}\ \frac{\pi\ x\ 7{,}5^2}{4} \qquad c_{2\,(mod)} = 5{,}50\ m/seg$$

$$\left.\begin{cases} \text{Modelo},\ 7{,}5 = \dfrac{5{,}5^2}{2\ g} + \dfrac{p_{2\,(mod)}}{\gamma} & \dfrac{p_{2\,(mod)}}{\gamma} = 7{,}5 - \dfrac{5{,}5^2}{2\ g} = 5{,}96\ \text{m.c.a.} \\ \text{Prototipo},\ 6 = \dfrac{4{,}91^2}{2\ g} + \dfrac{p_{2\,(prot)}}{\gamma} & \dfrac{p_{2\,(prot)}}{\gamma} = 6 - \dfrac{4{,}91^2}{2\ g} = 4{,}775\ \text{m.c.a.} \end{cases}\right\} \quad \frac{p_{2\,(prot)}}{p_{2\,(mod)}} = \frac{4{,}775}{5{,}96} = 0{,}801$$

12.- Una turbina Francis está conectada en acoplamiento directo a un alternador de 11 pares de polos.
En su punto de funcionamiento se tiene: $H_n = 45$ m ; $N = 3660$ kW; $\eta = 89\%$; $\eta_{mec} = 98{,}4\%$; $\eta_{vol} = 1$
Si se considera que el plano de comparación coincide con el nivel inferior del agua, aguas abajo, la entrada en el rodete se encuentra a 2,1 m y la salida del mismo a 1,8 m. El rodete tiene un diámetro $D_1 = 1{,}55$ m.
Las presiones a la entrada y salida del rodete son: 23,5 m.c.a. y (-2,5) m.c.a. respectivamente
El agua sale del rodete con $\alpha_2 = 90º$, siendo constante la velocidad del flujo en todo el rodete, $c_{1m} = c_{2m}$
Las velocidades a la entrada y salida del tubo de aspiración son: $c_2 = 6$ m/seg y $c_2{'} = 1$ m/seg, respectivamente.
Pérdidas en la tubería, despreciables
Determinar:

a) Angulo β_1 de los álabes del rodete a la entrada

b) Caudal y diámetro de salida del tubo de aspiración
c) Nº específico de revoluciones
d) Pérdidas en el rodete h_r, y en el distribuidor h_d
e) Pérdidas en el tubo de aspiración h_s y h_s'
f) Altura del tubo de aspiración; rendimiento

RESOLUCION

a) Angulo β_1 de los álabes del rodete a la entrada

$$\beta_1 = \text{arc tg} \frac{c_{1m}}{u_1 - c_{1n}}$$

$$n = \frac{3000}{Z} = \frac{3000}{11} = 272{,}7 \text{ rpm}$$

$$u_1 = \frac{D_1}{2} \frac{\pi n}{30} = \frac{1{,}55}{2} \frac{272{,}7\ \pi}{30} = 22{,}13 \text{ m/seg}$$

Al no haber pérdidas en la tubería, $h_t = 0$, resulta: $H_n = H$ $\qquad \eta_{man} H g = u_1 c_{1n}$

$$c_{1n} = \frac{\eta_{man} H g}{u_1} = \left| \eta_{man} = \frac{\eta}{\eta_{vol}\ \eta_{mec}} = \frac{0{,}89}{1 \times 0{,}984} = 0{,}9045 \right| = \frac{0{,}9045 \times 45 \times g}{22{,}13} = 18{,}02 \text{ m/seg}$$

$c_{1m} = c_{2m} = c_2 = 6$ m/seg

$$\beta_1 = \text{arc tg} \frac{6}{22{,}13 - 18{,}02} = 55{,}71^\circ$$

b) Caudal

$$N = \gamma Q H_u = \gamma Q H_n \eta \quad ; \quad Q = \frac{N}{\gamma H_n \eta} = |\ H = H_n\ | = \frac{3660 \times 102 \frac{Kgm}{seg}}{1000 \frac{Kg}{m^3} \times 45 \text{ m} \times 0{,}89} = 9{,}3 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Diámetro de salida del tubo de aspiración

$$Q = \frac{\pi d_2'^2}{4} c_2' \ ; \ d_2' = \sqrt{\frac{4 Q}{\pi c_2'}} = \sqrt{\frac{4 \times 9{,}3}{\pi \times 1}} = 3{,}445 \text{ m}$$

c) Nº específico de revoluciones

$$n_s = \frac{n \sqrt{N}}{H_n^{5/4}} = |\ N = 3660 \text{ kW} = 4977{,}5 \text{ CV}\ | = \frac{272{,}7 \sqrt{4977{,}5}}{45^{5/4}} = 165 \text{ rpm}$$

d) Pérdidas en el rodete h_r, y en el distribuidor h_d

Pérdidas en el rodete h_r

Aplicando Bernoulli entre 1 y 2:

$$\frac{c_1^2}{2 g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{c_2^2}{2 g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_r + H_{ef} = H_n$$

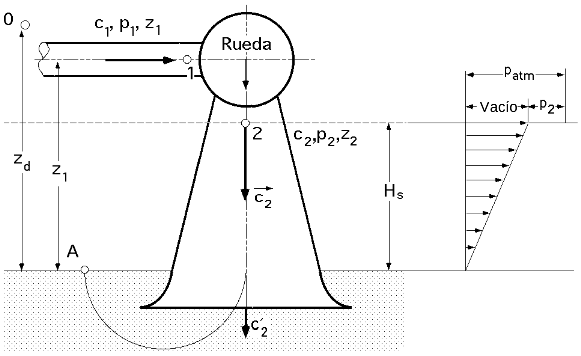
$$H_{ef} = \frac{H_u}{\eta_{mec}} = \eta_{man} H_n = 0{,}9045 \times 45 = 40{,}7 \text{ m}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = 23{,}5 \text{ m.c.a.} \ ; \ \frac{p_2}{\gamma} = -2{,}5 \text{ m.c.a} \qquad \text{(presiones relativas)}$$

$z_1 = 2{,}1$ m.c.a. ; $z_2 = 1{,}8$ m.c.a.

$$\frac{c_1^2}{2 g} = \frac{c_{1m}^2 + c_{1n}^2}{2 g} = \frac{18{,}04^2 + 6^2}{2 g} = 18{,}44 \text{ m} \ ; \ \frac{c_2^2}{2 g} = \frac{6^2}{2 g} = 1{,}836 \text{ m}$$

$$h_r = \frac{c_1^2}{2 g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 - \left\{\frac{c_2^2}{2 g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + H_{ef}\right\} = 23{,}5 + 2{,}1 + 18{,}44 - \{1{,}836 - 2{,}5 + 1{,}8 + 40{,}7\} = 2{,}204 \text{ m}$$



Pérdidas en el distribuidor h_d.- Aplicando Bernoulli entre 0 y 1:

$$\frac{c_0^2}{2\,g} + \frac{p_0}{\gamma} + z_0 = H_n = \frac{c_1^2}{2\,g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 + h_d$$

$$h_d = H_n - \{\frac{c_1^2}{2\,g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1\} = 45 - \{18{,}44 + 23{,}5 + 2{,}1\} = 0{,}96 \text{ m}$$

e) Pérdidas en el tubo de aspiración h_s ***y*** h_s'.- Aplicando Bernoulli entre 2 y A:

$$\frac{c_2^2}{2\,g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = \frac{c_A^2}{2\,g} + \frac{p_A}{\gamma} + z_A + h_s + h_s'$$

$$h_s' = \frac{c_{2'}^2}{2\,g} = \frac{1}{2\,g} = 0{,}05097 \text{ m}$$

$$h_s = \frac{c_2^2}{2\,g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 - \{\frac{c_A^2}{2\,g} + \frac{p_A}{\gamma} + z_A + h_s'\} = 1{,}836 - 2{,}5 + 1{,}8 - \{0 + 0 + 0 + 0{,}05097\} = 1{,}085 \text{ m}$$

f) Altura del tubo de aspiración; rendimiento

La altura de aspiración la da el enunciado: $z_2 = H_s = 1{,}8$ m

$$\eta_d = \frac{\frac{c_2^2 - c_2'^2}{2\,g} - h_s}{\frac{c_2^2 - c_2'^2}{2\,g}} = \frac{1{,}836 - 0{,}05097 - 1{,}085}{1{,}836 - 0{,}05097} = 0{,}392 = 39{,}2\%$$

Comprobación:

$$H_s \le \frac{p_{atm} - p_2}{g} - \frac{c_2^2 - c_2'^2}{2\,g}\,\eta_d = 0 - (-2{,}5) - (1{,}836 - 0{,}05097) \times 0{,}392 = 1{,}8 \text{ m}$$

****

13.- Se tiene una turbina de las siguientes características:

Hn = 100 m; n = 500 rpm ; Q = 12 m³/seg ; $\eta_{man} = 0{,}825$ ***;*** $\eta_{mec} = 1$ ***;*** $\eta_{vol} = 1$ ***;*** $\eta_{dif} = 0{,}85$

Determinar el perfil del difusor y su altura

RESOLUCION

$$n_s = \frac{n\,\sqrt{N}}{H_n^{5/4}} = \left| N = \frac{1000 \times 12 \times 100 \times 0{,}825}{75} = 13200 \text{ CV} \right| = \frac{500\,\sqrt{13200}}{100^{5/4}} = 180 \text{ Francis normal}$$

Altura máxima del aspirador-difusor

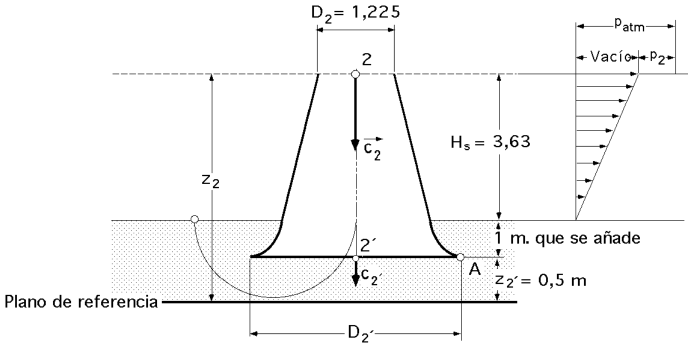
$$H_s \le \frac{p_{atm} - p_2}{\gamma} - \frac{c_2^2}{2\,g}\,\eta_d$$

Para: $n_s = 180$; $c_1 = \phi_1 \sqrt{2\,g\,H_n} = |\,\phi_1 = 0{,}67\,| = 0{,}67\,\sqrt{2\,g \times 100} = 29{,}66\ \frac{\text{m}}{\text{seg}}$

Para: $n_s = 180$; $c_2 = \phi_2 \sqrt{2 g H_n} = | \phi_2 = 0{,}23 | = 0{,}23 \sqrt{2 g \times 100} = 10{,}18 \frac{m}{seg}$

A su vez: $\frac{p_2}{\gamma H_n} = 0{,}022$; $\frac{p_2}{\gamma} = 0{,}022\ H_n = 0{,}022 \times 100 = 2{,}2$ m

$H_s \leq (10{,}33 - 2{,}2) - (\frac{10{,}18^2}{2 g} \times 0{,}85) = 3{,}63$ m ; $\boxed{H_s \leq 3{,}63 \text{ m}}$



Diámetro D_2:

$Q = c_{2m}\ \Omega_2 = | \alpha_2 = 90º | = c_2\ \Omega_2$; $\Omega_2 = \frac{Q}{c_2} = \frac{12}{10{,}18} = 1{,}179\ m^2 = \frac{\pi\ D_2^2}{4}$; $\boxed{D_2 = 1{,}225 \text{ m}}$

Aspirador difusor: Según Präsil es de la forma: $z\ r^2 = k$, en la que "k" se calcula a la salida con velocidad $c_{2'} < 1$ m/seg

$k = z_2\ r_2^2 = z_2 \times (\frac{1{,}225}{2})^2 = 0{,}375\ z_2$

Se puede tomar la solera como plano de comparación, por ejemplo a 0,5 m de la salida, es decir: $z_{2'} = 0{,}5$ m

La salida del difusor se puede poner, por ejemplo, a 1 m por debajo del nivel inferior

En consecuencia:

$k = 0{,}375\ z_2 = 0{,}375\ (3{,}63 + 1 + 0{,}5) = 1{,}924$

Para $z_{2'} = 0{,}5$ (punto A) $r_{2'} = \sqrt{\frac{k}{z_{2'}}} = \sqrt{\frac{1{,}924}{0{,}5}} = 1{,}96$ m

$c_{2'} = \frac{12}{\pi r_{2'}^2} = \frac{12}{\pi \times 1{,}96^2} = 0{,}994 \frac{m}{seg} < 1 \frac{m}{seg}$ (solución un poco ajustada)

Habría que reducir un poco el valor de $z_{2'}$, por ejemplo a 0,45, con lo que se obtiene:

$r_{2'} = \sqrt{\frac{1{,}924}{0{,}45}} = 2{,}0677$ m

$c_{2'} = \frac{12}{\pi r_{2'}^2} = \frac{12}{\pi \times 2{,}0677^2} = 0{,}894 \frac{m}{seg} < 1 \frac{m}{seg}$ (solución un poco menos ajustada)

****

14.- Una turbina Pelton consume un caudal de 12 m^3/seg, y arrastra un alternador; la masa total turbina-alternador M = 200 Tm.

El conjunto rotativo así constituido tiene un radio de inercia, $r = 0{,}55\ D_1/2$.

Se puede asumir que el álabe a la salida tiene un ángulo $\beta_2 = 180º$.

Se despreciarán los efectos de rozamiento

En cada instante, el par motor se calcula como si la velocidad de rotación fuese constante.

Determinar

a) Suponiendo que la turbina está parada, se abren los inyectores y se forma un chorro igual al 10% del valor maximal. ¿Cuál será el tiempo necesario para que la turbina adquiera la velocidad óptima de régimen?

b) Si la turbina funciona a potencia maximal, y se produce una disfunción en la red que anula bruscamente el par resistente del alternador, ¿qué tiempo será necesario para que la velocidad del conjunto se incremente en un 25%?

c) Si en ese instante se inicia el cierre total de los inyectores, que dura 20 segundos, y suponiendo que ésto implica una variación lineal del caudal respecto del tiempo, ¿cuál será el aumento relativo de la velocidad angular en ese tiempo?¿Qué tiempo sería necesario para que la sobrevelocidad no sobrepase el 50% de la velocidad de régimen?

d) Si se dispone de un contrachorro, que sabemos actúa en sentido contrario al movimiento, y que consume un caudal igual al 5% del maximal. Si se admite que la cara que los álabes presentan a éste contrachorro le desvían 90º, calcular el tiempo de acción del contrachorro necesario para asegurar el frenado de la turbina, en ausencia del chorro principal, en los siguientes casos:

d.1.- Si se frena después de la velocidad de régimen normal,

d.2.- Si se frena después de la sobrevelocidad definida en el apartado (c)

RESOLUCION

Sabemos que:

$$I \frac{dw}{dt} = C_m - C_r = C$$

en la que I es el momento de inercia de todas las masas rotatorias y "w" la velocidad angular de la turbina.

El valor de I es:

$$I = M r^2$$

El par C varía con la velocidad angular "w", y es igual al producto de la fuerza media F que se ejerce sobre los álabes, multiplicada por el radio Pelton $R = D_1/2$, de la forma:

$$F = \frac{2 \gamma Q}{g} (c_1 - u_1) = \frac{2 \gamma Q}{g} (c_1 - R w)$$

$$C = F R = \frac{2 \gamma Q R}{g} (c_1 - R w)$$

Cuando se embala, se tiene:

$$c_1 = R w_{emb}$$

por lo que:

$$C = F R = \frac{2 \gamma Q R^2}{g} (w_{emb} - w) = I \frac{dw}{dt}$$

$$\frac{dw}{w_{emb} - w} = \frac{2 \gamma Q R^2}{g I} dt = \frac{2 \gamma Q R^2}{g M r^2} dt = \frac{2 \gamma Q}{g M} (\frac{R}{r})^2 dt$$

$$\ln \frac{w_{emb} - w}{w_{emb} - w_0} = - \frac{2 \gamma Q}{g M} (\frac{R}{r})^2 (t - t_0)$$

$$\frac{w_{emb} - w}{w_{emb} - w_0} = \exp [- \frac{2 \gamma Q}{g M} (\frac{R}{r})^2 (t - t_0)] = \exp (- \frac{t - t_0}{T})$$

en la que w_0 es la velocidad angular de la turbina para, $t = t_0$, y T es una constante temporal de la forma:

$$T = \frac{g M}{2 \gamma Q} (\frac{r}{R})^2$$

a) Suponiendo que la turbina está parada, se abren los inyectores y se forma un chorro igual al 10% del valor maximal, el tiempo necesario para que la turbina adquiera la velocidad óptima de régimen se calcula como sigue:

Si arranca con un caudal: $Q = 12\ m^3/seg \times 0,1 = 1,2\ m^3/seg$, que el radio de inercia: $r = 0,55\ R$, y que la masa es de 200 Tm, la constante temporal será:

$$T_1 = \frac{M}{2\ \rho\ Q}\ (\frac{r}{R})^2 = \frac{200.000\ Kg}{2 \times 1000\ \frac{Kg}{m^3} \times 1,2\ \frac{m^3}{seg}} \times 0,55^2 = 25,25\ seg$$

Para: $t = 0 = t_0$, resulta, $w_0 = 0$

Para:t = t, la velocidad óptima de régimen para una Pelton es la mitad de la velocidad maximal, embalamiento, por lo que el tiempo que la turbina tardará en alcanzar la velocidad de régimen es:

$$e^{-(t/T_1)} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{t}{T_1} = \ln 2 = 0,69 \quad ; \quad t = 0,69\ T_1 = 0,69 \times 25,25\ seg = 17,4\ seg$$

b) Si la turbina funciona a potencia maximal, y se produce una disfunción en la red que anula bruscamente el par resistente del alternador, el tiempo necesario para que la velocidad del conjunto se incremente en un 25% es:

La constante de tiempo correspondiente T_2 será 10 veces más pequeña que T_1, ya que el caudal será ahora el nominal, es decir 12 m^3/seg:

$$T_1 = \frac{M}{2\ \rho\ Q}\ (\frac{r}{R})^2 = \frac{200.000\ Kg}{2 \times 1000\ \frac{Kg}{m^3} \times 12\ \frac{m^3}{seg}} \times 0,55^2 = 2,525\ seg$$

La velocidad angular de régimen es

$$w_1 = \frac{w_{emb}}{2} \quad ; \quad n_1 = \frac{n_{emb}}{2}$$

y se pasa a una sobrevelocidad del 25%, es decir, a una velocidad angular, $w_2 = 1,25\ w_1$, $n_2 = 1,25\ n_1$), en un tiempo t_2, por lo que:

$$\frac{w_{emb} - w_2}{w_{emb} - w_1} = \frac{w_{emb} - 1,25\ \frac{w_{emb}}{2}}{w_{emb} - \frac{w_{emb}}{2}} = 0,75 = e^{(-t_2/T_2)} \ ; \ t_2 = 0,288\ T_2 = 0,288 \times 2,525\ seg = 0,727\ seg$$

c) Si en ese instante se inicia el cierre total de los inyectores, que dura 20 segundos, y suponiendo que ésto implica una variación lineal del caudal respecto del tiempo, ¿cuál será el aumento relativo de la velocidad angular en ese tiempo?

El aumento relativo de la velocidad angular en ese tiempo, $t_3 = 20$ seg, se obtiene considerando que:

$$Q = Q_0\ (1 - \frac{t}{t_3})$$

por lo que:

$$\frac{dw}{w_{emb} - w} = \frac{2\ \rho\ Q\ R^2}{I}\ dt = \frac{2\ \rho\ Q\ R^2}{M\ r^2}\ dt = \frac{2\ \rho\ Q_0}{M}\ (\frac{R}{r})^2\ (1 - \frac{t}{t_3})\ dt = (1 - \frac{t}{t_3})\ \frac{dt}{T_2}$$

$$\int_w^{w_2} \frac{dw}{w_{emb} - w} = \ln \frac{w_{emb} - w}{w_{emb} - w_2} = -\frac{1}{T_2}\ (t - \frac{t^2}{2\ t_3})$$

Al cabo del tiempo t_3 se obtiene otra velocidad angular w_3, tal que:

$$\ln \frac{w_{emb} - w_3}{w_{emb} - w_2} = -\frac{1}{T_2}\ (t - \frac{t^2}{2\ t_3}) = -\frac{1}{T_2}\ (t_3 - \frac{t_3^2}{2\ t_3}) = -\frac{t_3}{2\ T_2}$$

y sustituyendo los valores : $t_3 = 20$ seg ; $T_2 = 2,525$ seg ; $w_2 = 1,25\ w_m/2$, resulta:

$$\ln \frac{w_{emb} - w_3}{w_{emb} - w_2} = \ln \frac{w_{emb} - w_3}{w_{emb} - \frac{1,25\ w_{emb}}{2}} = -\frac{20}{2 \times 2,525} = -3,9604 \quad ; \quad w_3 = 0,9928\ w_{emb}$$

por lo que en esta situación, la turbina adquiere prácticamente la velocidad de embalamiento maximal, es decir el doble de la velocidad de régimen.

Tiempo necesario para que la sobrevelocidad no sobrepase el 50% de la velocidad de régimen

En esta situación la velocidad será w_3, y el tiempo t_3:

$$w_3 = \frac{1{,}5\ w_{emb}}{2} = 0{,}75\ w_{emb}$$

$$\ln \frac{w_{emb} - w_3}{w_{emb} - w_2} = \ln \frac{w_{emb} - 0{,}75\ w_{emb}}{w_{emb} - \frac{1{,}25\ w_{emb}}{2}} = \ln \frac{0{,}25}{0{,}375} = -0405 = -\frac{t_3}{2\ T_2} = \frac{t_3}{2 \times 2{,}525\ seg} \qquad t_3 = 2{,}04\ seg$$

No se puede cortar el caudal tan rápido por parte de los inyectores, bajo pena de provocar el golpe de ariete en el conducto de alimentación de los mismos, por lo que habría que desviar el chorro mediante el deflector.

d) Si se dispone de un contrachorro, que sabemos actúa en sentido contrario al movimiento, y que consume un caudal igual al 5% del maximal y se admite que la cara que los álabes presentan a éste contrachorro le desvían 90º, calcular el tiempo de acción del contrachorro necesario para asegurar el frenado de la turbina, en ausencia del chorro principal:

$$F = -\rho\ Q\ (c_1 + u_1)$$

$$C = -\rho\ Q\ R\ (c_1 + u_1) = -\rho\ Q\ R^2\ (w_{emb} + w)$$

En ausencia del chorro principal, la ecuación del movimiento es:

$$I \frac{dw}{dt} = C = -\rho\ Q_{contr.}\ R^2\ (w_{emb} + w) \quad ; \quad \frac{dw}{(w_{emb} + w)} = \frac{-\rho\ Q_{contr.}\ R^2}{I}\ dt = \frac{-\rho\ Q_{contr.}}{M} \left(\frac{R}{r}\right)^2 dt$$

y si Q es constante

$$\ln \frac{w_{emb} + w_0}{w_{emb} + w} = \frac{\rho\ Q_{contr.}}{M} \left(\frac{R}{r}\right)^2 t_4 = \frac{t_4}{T_4}$$

siendo:

$$Q_{contr.} = \frac{Q_0}{20} = \frac{12}{20} = 0{,}6\ m^3/seg \ ; \quad T_4 = \frac{M\ r^2}{\rho\ Q_{contr.}\ R^2} = \frac{200.000 \times 0{,}55}{1000 \times 0{,}6 \times 1^2} = 100{,}83\ seg = 40\ T_2$$

Para obtener, w = 0, se necesita un tiempo:

$$\ln \frac{w_{emb} + w_0}{w_{emb}} = \frac{t_4}{100{,}88} \quad ; \quad \boxed{t_4 = 100{,}88 \times \ln \frac{w_{emb} + w_0}{w_{emb}}}$$

d.1.- Si se frena después de la velocidad de régimen normal, se tiene que, $w_0 = 0{,}5\ w_{emb}$, por lo que el tiempo será:

$$t_4 = 100{,}88\ seg \times \ln \frac{w_{emb} + 0{,}5\ w_{emb}}{w_{emb}} = 100{,}88\ seg \times \ln 1{,}5 = 40{,}9\ seg$$

d.2.- Si se frena después de la sobrevelocidad definida en el apartado (c), es decir, $w_0 = 1{,}5\ w_{emb}$, por lo que el tiempo $t_4{*}$ será:

$$t_4^* = 100{,}88\ seg \times \ln \frac{w_{emb} + 0{,}75\ w_{emb}}{w_{emb}} = 100{,}88\ seg \times \ln 1{,}75 = 56{,}45\ seg$$

****