Proyecto Fin de Carrera

Escuela Universitaria de
Ingeniería Técnica Aeronáutica

Modelización de aeronaves no tripuladas con Simulink

Oscar Vila Rovira

Julio de 2011

Indice

Introducción 4
1. UAV 5
1.1 Historia de los UAV 5
1.2. UAV en España 18
2. Teoría General de Control aplicable al UAV 24
2.1 Estabilidad 24
2.1.1 Estabilidad estática 24
2.1.2. Estabilidad Dinámica 25
2.1.3. Función de Transferencia y polos del sistema 27
2.2. Amortiguamiento 33
2.3. Control Clásico 38
2.4. Espacio de Estados 40
2.4.1. Modelo matemático 40
2.4.2. Control en el Espacio de Estados 43
2.4.3. Control por asignación de polos 45
2.4.4. Control óptimo cuadrático 46
3. Modelo matemático 48
3.1. Superfícies de Control 48
3.2. Cálculo del Modelo Matemático 50
3.2.1. Parte general 50
3.2.2. Control Longitudinal 57
3.2.3. Control Laterodireccional 66
3.3. UAV 73
4. Modelo Simulink 76
4.1. Lazo abierto 77
4.2. Lazo Cerrado 78
5. Análisis Aeronave 79
5.1. Control Longitudinal 79
5.1.1. Análisis del control longitudinal en Lazo Abierto 81
5.1.2. Análisis del control longitudinal en Lazo Cerrado 86
5.1.3. Comparación de resultados obtenidos 96
5.2. Control Laterodireccional 98
5.2.1. Análisis del control laterodireccional en Lazo Abierto 101
5.2.2. Análisis del control laterodireccional en Lazo Cerrado 108
5.2.3. Comparación de resultados obtenidos 123
6. Conclusiones 125
Bibliografía 127
ANEXO I – Archivo.m Modelo longitudinal 128
ANEXO II – Archivo.m Modelo laterodireccional 133

Nomenclatura usada

U(s): Entrada del sistema con Transformada de Laplace

Y(s): Salida del sistema con Transformada de Laplace

G(s): Función de transferencia

η: Ganancia del sistema

z_i: Ceros del sistema

p_i: Polos del sistema

y(t): Respuesta temporal del sistema

a: Parte real del polo

b: Parte compleja del polo

κ: Ganancia estándar

ω_n: Frecuencia natural producida por un par de polos complejos

ω_d: Frecuencia producida por un par de polos complejos

ζ: Factor de amortiguamiento de un par de polos complejos

τ: Constante de tiempo característica de cada polo

K: Ganancia K o Matriz de control K

x_i: Variables de estado del sistema en espacio de estados

u_j: Entradas de un sistema de espacio de estados

y_k: Salidas de un sistema de espacio de estados

A: Matriz de estado

B: Matriz de entrada

C: Matriz de salida

D: Matriz de transmisión directa

λ: Autovalores del sistema

Q: Matriz de diseño de desviación de los estados del controlador LQR

R: Matriz de factor de peso escalar del controlador LQR

$\bar{p}$: Constante positiva en el diseño del controlador LQR

J: Función de coste del sistema

$\sum \Delta \vec{F}_l$: Fuerza resultante eje ‘l’

$\sum \Delta \vec{M}_m$: Momento resultante eje ‘m’

U: Velocidad de la aeronave en el eje X de la aeronave

V: Velocidad de la aeronave en el eje Y de la aeronave

W: Velocidad de la aeronave en el eje Z de la aeronave

P: Velocidad angular de la aeronave en torno al eje X de la aeronave, régimen de Balanceo

Q: Velocidad angular de la aeronave en torno al eje Y de la aeronave, régimen de Cabeceo

R: Velocidad angular de la aeronave en torno al eje Z de la aeronave, régimen de guiñada

I: Tensor de inercia

$\sum \Delta L$: Momento resultante eje X

$\sum \Delta M$: Momento resultante eje Y

$\sum \Delta N$: Momento resultante eje Z

Θ: Ángulo de Cabeceo

Ψ: Ángulo de Guiñada

δ_e : Ángulo de deflexión timón de profundidad

δ_a : Ángulo de deflexión alerones

δ_r : Ángulo de deflexión timón de dirección, en inglés Rudder

Variables de estado:

u: Perturbación de la velocidad horizontal en el eje X

w: Perturbación de la velocidad vertical en el eje Z

q: Régimen de Cabeceo

θ: Ángulo de Cabeceo

v: Perturbación de la velocidad horizontal en el eje Y

p: Régimen de Balanceo

r: Régimen de Guiñada

Φ: Ángulo de Balanceo

Salidas del sistema:

α: Ángulo de ataque

β: Ángulo de guiñada

Introducción

Desde el principio de la aviación se han investigado y desarrollado aviones sin tripulación, como usos de entrenamiento y, sobretodo, misiones militares. A principios de siglo, con la primera y la segunda guerra mundial, se hicieron los primeros aviones no tripulados. Los grandes avances en el campo de los aviones no tripulados, como en la aviación en general, han surgido a raíz de guerras entre grandes potencias, siendo estos últimos avances en las guerras del oriente medio.

En los últimos años, en España y en Europa se están realizando investigaciones y grandes proyectos de UAV. En este proyecto se pretende realizar un estudio del UAV del departamento de Aerotécnia de la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Aeronáutica (EUITA).

Para ello se emplearán técnicas de control moderno y se desarrollarán dos leyes de control. Una mediante asignación de polos y otra realizando un controlador óptimo cuadrático.

En primer lugar, se estudiarán las fuerzas y momentos que actúan sobre el movimiento del UAV. A partir de estas fuerzas y momentos se llegará a dos sistemas de ecuaciones que sean lo más fieles posibles al comportamiento del UAV. Estos dos sistemas de ecuaciones serán el correspondiente al control longitudinal y el correspondiente al modo laterodireccional.

Una vez obtenido los modelos matemáticos se diseñará un modelo con el programa Simulink. Con este modelo se probará la estabilidad y el tipo de respuesta del UAV, así como las leyes de control desarrolladas.

Primero se analizará el control longitudinal en lazo abierto. Se localizarán los polos que producen el modo de oscilación de periodo corto y los que producen el modo fugoide. En base al tipo de respuesta que se obtendrá después de analizar el control en lazo abierto se decidirá cómo mejorarlo diseñando dos leyes de control. En primer lugar, se decidirá la localización de los nuevos polos del sistema en lazo cerrado y se diseñará la ley de control mediante asignación de polos. Paralelamente se diseñará una nueva ley de control mediante un regulador óptimo cuadrático (LQR). Finalmente se compararán.

Finalmente se analizará el control laterodireccional en lazo abierto. Se localizará el polo que produce el modo de balanceo, el polo que produce el modo espiral y el par de polos que produce el balanceo del holandés. Como con el control longitudinal, primero se decidirá la localización de los nuevos polos del sistema en lazo cerrado y se diseñará la ley de control mediante asignación de polos. También se diseñará un regulador óptimo cuadrático y se compararán las dos leyes de control.

1. UAV

Un UAV es un vehículo aéreo no tripulado, de sus siglas en inglés Unmanned Aerial Vehicle. Por definición, es un vehículo aéreo no tripulado reutilizable, capaz de mantener un vuelo controlado y sostenido. Esta definición es la que separa los UAV de los misiles.

En los últimos años se están llevando a cabo muchas investigaciones y avances en torno a los llamados UAV. Se está viendo que pueden ser de gran utilidad tanto en el campo civil como en el campo militar. Pero los UAV no son nuevos, sino que se han estado investigando a lo largo de la historia de la aviación.

1.1 Historia de los UAV

Los hermanos Wright hicieron el primer vuelo controlado el 17 de diciembre de 1903. Años antes de esto, el hombre ya buscaba algo que se pareciera al uso que se le da a los UAV. Con una tecnología muy básica, encontramos los primeros intentos de UAV:

- En febrero de 1863, un inventor de la ciudad de Nueva York llamado Charles Perley patentó un bombardero no tripulado. Este bombardero era un globo aerostático de aire caliente que podía cargar con explosivos y tenia un temporizador. El globo se soltaba con unas ciertas condiciones, y calculando con el viento y la distancia se ajustaba el temporizador. El cual al llegar al destino abriría la cesta de las bombas, las que caerían ya encendidas.

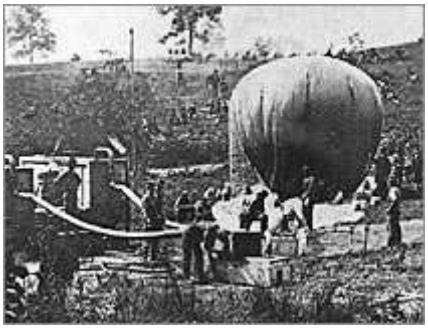

Figura 1 – Bombardero aéreo de Perley

  Cabe añadir que era un dispositivo muy primitivo y no dio resultados remarcables, ya que el viento cambia de un lugar a otro y la precisión es bastante pequeña.

- En 1883, un británico llamado Douglas Archibald tomó unas fotografías desde una cometa. Douglas Archibald había estado experimentando con cometas y el

viento durante mucho tiempo. Las fotografías fueron publicadas en los periódicos hasta que un soldado americano pensó que este experimento tendría utilidad en alguna guerra.

Figura 2 – Cometa de vigilancia de Eddy

En la guerra hispanoamericana de 1898, el cabo William Eddy de Colorado tomó cientos de fotografías desde una cometa como las de Archibald. Éstas fueron las primeras fotos de vigilancia de la historia. Muchas de las fotos que tomó dieron información crítica a las tropas americanas sobre las posiciones y fortificaciones del adversario.

Durante la primera guerra mundial apareció el primer UAV en Estados Unidos de América. Aunque el éxito fue un poco errático, los militares se dieron cuenta que tenía potencial en combate. Antes de que los prototipos de UAV pudieran desplegarse enserio se firmó el armisticio de la guerra.

- En 1917 el doctor Peter Cooper y Elmer A. Sperry inventaron el giróscopo estabilizador automático, el cual ayudaba a mantener una aeronave en vuelo estable, recto y nivelado.

Figura 3 – Sperry Aerial Torpedo

Usaron esta innovadora tecnología para convertir una aeronave U.S. Navy Curtiss N-9 de entrenamiento en el primer UAV controlado por radio. Tomó el nombre Sperry Aerial Torpedo y voló 50 millas cargando una bomba de 300 libras en muchos tests de vuelo, aunque nunca se usó en combate.

- En 1918, Charles F. Kettering, de General Motors, diseñó un pequeño avión llamado Kettering Bug.

Figura 4 – Kettering bug

Hecho de madera y lienzo, por 400$ la unidad, este pequeño avioncito fue diseñado para cargar una bomba de equivalente su propio peso, 300 libras. Estaba diseñado para salir desde un vehículo con ruedas, desplegar las alas y dirigirse hacia un objetivo preprogramado. El ejército de estados unidos encargó una gran cantidad de estos aviones durante los últimos meses de la primera guerra mundial, pero acabó la guerra y los pedidos fueron cancelados.

Durante más de una década después del final de la Primera Guerra Mundial, la investigación sobre UAV se redujo considerablemente. No fue hasta mediado de los años 30, cuando nuevos UAV emergieron como una importante herramienta de entreno en combate.

- La Queen Bee, o reina abeja, fue el primer UAV reutilizable. Su primer vuelo data de 1935.

Figura 5 – Queen Bee

La Queen Bee fue diseñada en el Reino Unido. Fue diseñada para usarse como un objetivo aéreo durante misiones de entrenamiento. Los artilleros de la marina real practicaban con ellos para intentar abatirlos. Estaba hecha de madera contrachapada y pino, era controlada por radio. Podía volar hasta a 17000 pies de altura y viajar una distancia máxima de 300 millas a unas 100 mph. Se fabricaron un total de 380 Queen Bees en la fuerza aérea real y la marina real hasta que fueron retirados en 1947.

- En 1939 Reginald Denny creó la compañía Radioplane Company, Northrop/Grumman ahora, en Los Angeles. Era un entusiasta de la aviación y un piloto de la flota real aérea británica.

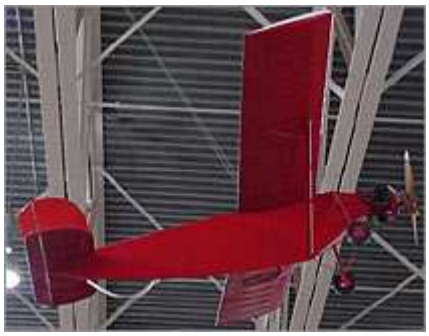

Figura 6 – OQ Targets

Reginald Denny juntó a un equipo de ingenieros expertos en tecnología radio de la compañía Lockheed y se pusieron a trabajar para desarrollar una aeronave grande y de control remoto. En los siguientes años tuvieron éxito y produjeron una serie de UAV llamados OQ Targets.

Durante la Segunda Guerra Mundial la alemania nazi desarrolló un UAV, el cual demostró las posibilidades que ofrecen en combate. Los intentos de America de eliminar dicho UAV sentaron las bases de los programas de investigación americanos en futuros proyectos de UAV.

- Al principio de la Segunda Guerra Mundial, Adolf Hitler encargó crear una bomba voladora con el siguiente mandato: se usará contra "objetivos no militares".

Figura 7 – Vergeltungswaffe-1 o V-1

Fieseler Flugzeuhau diseñó el Fi-103, más conocido como Vergeltungswaffe-1 o V-1. Su nombre se traduce como Arma de venganza – 1. Se lanzaban desde una rampa estilo catapulta para salir volando a 470mph. Se propulsaba con un pequeño motor pulsorreactor, el cual emitía un zumbido característico. Podía cargar hasta una cabeza armada de 2000 libras, y era programado para volar hasta 150 millas antes de soltar su bomba. La primera vez que se usó fue contra los británicos en 1944. Mató a más de 900 civiles e hirió a más de 35000.

- La gran efectividad y amenaza de los UAV alemanes V-1 impulsó que la marina de Estados Unidos desarrollara sus propios UAV para que pudieran destruir los lugares de lanzamiento de los V-1.

Figura 8 – PB4Y-1

Figura 9 – B-17, luego BQ-7

En 1944, el equipo SAU-1 (Special Air Unit One) convirtió los PB4Y-1 Liberators y los B-17 para que pudieran cargar 25000 libras de explosivos y pudieran volar por control remoto usando sistemas de guiado con imágenes de televisión. Las aeronaves, conocidas como PB4Y-1 y BQ-7, despegaban con una tripulación de 2 hombres, los cuales volaban hasta alcanzar 2000 pies de altura y programaban el rumbo para interceptar los lugares de lanzamiento de los V-1 en Francia antes de que éstos atacaran.
Aunque peligrosas, estas operaciones tuvieron éxito en contrarrestar la amenaza de los V-1. Fue la primera vez en la historia en la que se usaba un UAV contra otro UAV.

También se usaron los BQ-7 para recoger datos sobre radioactividad en los lugares en los cuales se hicieron pruebas de bombas atómicas.

En la guerra de Vietnam, los UAV que antes se habían hecho para el combate, adquieren un nuevo uso, vigilancia secreta.

- En el año 1960, la fuerza aérea de Estados Unidos de América inicia su primer programa para diseñar un avión invisible y modificar los UAV de combate para misiones de reconocimiento.

Figura 10 – AQM-34 Ryan Firebee

Los ingenieros redujeron la marca que dejaba el avión Q-2C Firebee en el radar usando una pantalla especialmente diseñada en la frontal de los motores, poniendo unas capas de un material que absorbía las señales de radar en los lados de los fuselajes y cubriendo la aeronave con una nueva pintura antirradar.

El resultado fue la aeronave AQM-34 Ryan Firebee, que fue lanzada y controlada desde la aeronave DC-130. Una vez realizada la misión, el UAV era dirigido a un sitio seguro dónde recogerlo, se activaba el paracaídas y era recogido por un helicoptero.

Las pruebas de vuelo demostraron que los UAV Firebee podían proveer de completa vigilancia. Entre octubre de 1964 y abril de 1975 se enviaron más de 1000 AQM-34 Ryan Firebee en más de 34000 misiones de vigilancia sobre el sudeste de Asia. Fueron muy fiables, el 83% de los Firebee enviados se recuperaron y se reusaron.

- Con la guerra fría en su apogeo, la necesidad de imágenes de reconocimiento de alta calidad fue máxima. Después de intentar vigilancias sin éxito, la CIA decidió que debían trabajar en un nuevo UAV, invisible a los ataques, de forma inmediata. El gobierno de Estados Unidos encargó a la compañía Lockheed el trabajo de desarrollar un UAV de alta velocidad y invisible.

Figura 11 – D-21

Lockheed produjo el UAV D-21 en 1965. Era una aeronave capaz de alcanzar Mach 4, el UAV más rápido de la historia. Tenía un rango de 3000 millas y podía operar a una altura de 80000 pies. Estaba recubierto por una pintura antirradar propia de Lockheed, precursora de la que se usa hoy en día en los aviones invisibles. Sólo se fabricó uno, voló 3 misiones sin éxito antes de que se

estrellara y hundiera. Las partes de los otros D-21 que se estaban fabricando se quedaron sin montar en el almacén.

El éxito del UAV Firebee continuó después de la guerra de Vietnam. En la década de los 70, mientras otros países empezaron a desarrollar sus propios sistemas UAV avanzados, los Estados Unidos fijaron sus objetivos en otros tipos de UAV.

- Impresionado por el UAV AQM-34 Ryan Firebee de los americanos, Israel compró 12 secretamente en el 1970, los modificó y los llamó UAV Firebee 1241.

Figura 12 – Firebee 1241

Estos Firebee 1241 tuvieron un importante papel en 1973 en la guerra entre Israel, Egipto y Siria, tanto en misiones de reconocimiento como haciendo de señuelo.

El segundo día de la guerra, la fuerza aérea israelí desplegó su flota de Firebees para atacar a las defensas aéreas egipcias. Los egipcios usaron todos su inventorio de misiles tierra-aire contra los Firebees, 43 misiles. Los Firebees evadieron exitosamente 32 de los misiles y destruyeron los otros 11 con misiles antirradar.

- En 1970, un avión RC-121 de comunicaciones de inteligencia fue abatido sobre el mar amarillo, matando a la tripulación de abordo. El ejército de Estados Unidos decidió desarrollar un nuevo UAV preparado para las comunicaciones de inteligencia y capaz de volar a gran altitud, por encima del rango de los misiles enemigos.

Figura 13 – Ryan SPA 147

La empresa Ryan Aeronautical se puso a trabajar modificando el Firebee para que pudiera interceptar los mensajes de radio enemigos y tomar fotografias por encima de 60000 pies. El resultado fue el UAV Ryan Special Purpose Aircraft (SPA) 147, el cual podía volar durante 8 horas en vuelo estable cargando una cámara de 300 libras, siendo el primer UAV equipado para comunicaciones de inteligencia a gran altitud.

Desde que Israel diseñó su UAV Firebee, entre la década de los 70 y pasados los 80, la fuerza aérea israelí se convirtió en un desarrollador muy agresivo de UAV. Hizo importantes mejoras y nuevos UAV, versiones de las cuales fueron integrados en flotas de UAV de muchos otros países.

- En 1978, Israel Aircraft Industries construyó Scout, una aeronave con motor de pistón de 13 pies de envergadura hecha de fibra de vidrio.

Figura 14 – Scout

La fibra de vidrio con el que estaba hecho el Scout respondía con una señal muy pequeña al radar, lo que unido al pequeño tamaño del UAV hacía casi imposible abatirlo. El Scout podía transmitir a tiempo real imágenes de video de vigilancia en 360 grados.

- A finales de los 80, Israel construyó también el UAV Pioneer.

Figura 15 – Pioneer

Después de demostrar el éxito de los UAV israelís en las miriadas, el ejército de Estados Unidos compró más de 20 modelos de Pioneer. Estos modelos se convirtieron en los primeros UAV pequeños y baratos de la moderna fuerza militar americana.

El Pioneer es impulsado por cohetes, el cual puede partir desde tierra o bien desde un portaaviones en mar.

Se han usado en vigilancia en la guerra del Golfo, en Bosnia y todavía hoy lo usan tanto Estados Unidos como Israel.

Hoy en día, los UAV forman parte importante en todos los ejércitos con alta tecnología, tanto en Estados Unidos, Europa, Asia y Oriente Medio. Además se usan para fines pacíficos monitoreando el medio ambiente de la tierra.

- En 1996 el ejercitó israelí desarrolló un nuevo UAV, el Firebird 2001.

Figura 16 – Firebird 2001

Éste es un UAV controlado de forma remota, proporciona datos en tiempo real y datos de alta precisión sobre un incendio forestal: tamaño, velocidad, perímetro y movimiento, mediante una serie de tecnologías como GPS, información geográfica y cámaras de visión infrarroja.

- Estados Unidos diseñó un UAV que funciona a base de energía solar y dispone de motores de hélice auxiliares, y es ultraligero. Desarrollado por AeroVironment Corporation y su uso es de investigación medioambiental.

Figura 17 – Pathfinder

Éste UAV, llamado Pathfinder, alcanzó la altitud de 67350 pies. Su uso consiste en recoger datos del viento, temperatura, humedad, presión… con unos sensores muy precisos, y toma fotografías de alta resolución.

AeroVironment Corporation diseñó 3 modelos más de UAV después del Pathfinder. Aunque el último es un prototipo y está en fase de pruebas.

- En el año 1998 el Pathfinder fue modificado y se extendieron sus alas. Alcanzó la altitud de 80201 pies, batiendo el récord anterior.

Figura 18 – Pathfinder-Plus

- El objetivo de este nuevo modelo era alcanzar el techo de 100000 pies de altitud. Antes de acabarlo dejaron de hacer pruebas y pasaron al último modelo, el prototipo Helios.

Figura 19 – Centurion

- Como sus predecesores, Helios funciona con energía solar y dispone de motores de hélice. Es el modelo con mayor envergadura alar. Su primera prueba en vuelo fue el 1999. El objetivo era alcanzar el techo de 100000 pies o en el caso del Helios también aguantar 24 horas en vuelo.

Figura 20 – Helios

En agosto de 2001 alcanzó la altitud de 96863 pies. Y en junio de 2003 durante unas pruebas de vuelo se rompió y cayó al mar.

- El UAV con la forma más extraña lo diseñó Lockheed Martin /Boeing. Se llama DarkStar y tiene forma de almeja con alas.

Figura 21 – DarkStar

Es uno de los 3 UAV de alta tecnología creados a finales de la década de los 90 por Estados Unidos. Está hecho con tecnología de avión invisible y su misión es de vigilancia. Fue encargado por la Agencia de investigación de proyectos de defensa avanzada (DARPA, Defense Advanced Research Projects Agency) de Estados Unidos.

Se esperaba que volara y fuera indetectable a 45000 pies de altura en cualquier condición meteorológica y transmitiera imágenes a los soldados en tierra. Era tan caro que se canceló el proyecto.

- Uno de los UAV más importantes de los que dispone el ejército de Estados Unidos es el General Atomics Aeronautical Systems RQ-1 Predator, de los cuales tiene más de 60.

Figura 22 – RQ-1 Predator

Se ha usado en misiones de reconocimiento en los Balcanes, en Afganistán y en el Oriente Medio. Tiene un rengo de unas 450 millas y hasta 16 horas de video en tiempo real de vigilancia en color y en alta definición, cámaras de visión infrarroja y SAR (Radar de Apertura Sintética) antes de volver a la base. Es controlado por un equipo en tierra usando una conexión radio por Line-Of-Sight o usando un satélite.

Aunque originalmente fue diseñado únicamente para misiones de reconocimiento y vigilancia, se han equipado con misiles antitanque, los cuales han dado en el blanco de forma exitosa.

- El tercer UAV fue fabricado por Teledyne Ryan, llamado RQ-4 Global Hawk.

Figura 23 – RQ-5 Global Hawk

Fue usado en la guerra de Afganistán durante las primeras semanas. Tiene 116 pies de envergadura. Está diseñado para despegar desde una base de Estados Unidos y volar hasta el país donde tenga su misión, de forma autónoma, recoger datos y transmitir en tiempo real imágenes de videovigilancia, volar a altura de hasa 65000 pies y volver a la base sin tener que parar.

- Por último, Estados Unidos tiene un UAV en activo llamado Ikhana.

Figura 24 – Ikhana

Su nombre proviene de un idioma nativo americano, Choctaw, que significa “Inteligente, consciente o precavido”. El uso de este UAV es de pruebas sobre la tecnología UAV de la NASA. Validar sensores electrónicos, observación de larga duración de la Tierra, desarrollar tecnologías que mejoren las prestaciones, seguridad y fiabilidad tanto de aeronaves tripuladas como no tripuladas.

El futuro de los UAV está en hacerlos cada vez más pequeños, pasando éstos a ser MAV o Micro Aerial Vehicles, vehículos aéreos pequeños.

1.2. UAV en España

En España se han comprado UAV extranjeros como el Searcher MK-IIJ israelí y el Raven norteamericano.

- El Searcher MK-IIJ israelí es un modelo de UAV parecido al Scout y al Pioneer, pero un poco más grande, aviónica actualizada, con mayor autonomía y mayor redundancia de sistemas.

Figura 25 – Searcher MK-IIJ

España tiene 3 del modelo MK-IIJ y 1 del modelo MK-III. Los compró a Israel en 2007 y volvió a comprar uno del modelo MK-IIJ en 2009 después de que fuera abatido en Afganistán.

Tiene un alcance de entre 250 y 350km y 15 horas de autonomía de vuelo. Su techo está en 20000 pies y su carga útil es de 45 kg. Tiene un motor de pistón de cuatro tiempos y es guiado por radio control hasta 200 km de distancia.

El modelo MK-III aparece al hacer unas modificaciones al MK-IIJ, aumentando la distancia de guiado a 300km, autonomía de 20 horas, un techo de 23000 pies y una carga útil de 120kg.

- El Raven norteamericano, o RQ-11 Raven, fue construido para el ejército de Estados Unidos de América por la empresa AeroVironment.

Figura 26 – RQ-11 Raven

Hay 2 modelos, el A y el B, aunque el A ya no se fabrica. Hizo su primer vuelo de pruebas en 2001 y empezó a producirse en serie entre 2003 y 2004. España tiene 27 en propiedad.

Cabe añadir que no es un UAV en sí, sino que es más bien un MAV. No necesita plataforma para despegar, ya que como se ve en la imagen despega de la mano de un soldado.

Las funciones del Raven son misiones de reconocimiento y vigilancia remota, búsqueda de objetivos, seguridad de convoyes y protección de tropas, evaluación de daños de batalla, ayuda a infantería ligera y operaciones militares en zonas urbanas.

Es de manejo sencillo, es ligero, dispone de navegación autónoma y autoland. Tiene un rango de 10km, un máximo de 110 minutos de batería, una velocidad máxima de 50 nudos y un techo de hasta 500 pies desde el suelo, siendo máxima la altitud de 14000 pies.

Por otro lado, el Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial (INTA) lleva años investigando en el campo de los UAV, desarrollando así 4 productos:

- El primero es el SIVA, Sistema Integrado de Vigilancia Aérea. Es un sofisticado sistema de vigilancia aérea no tripulado de múltiples aplicaciones en el campo civil y militar, que puede ser utilizado como vehículo de observación en tiempo real.

Figura 27 – SIVA

Su misión principal es de observación en tiempo real. Se compone de un conjunto de vehículos aéreos (normalmente cuatro), una estación móvil de control en tierra y un equipo de tierra para lanzamiento, recuperación y mantenimiento.

Cuenta con diversos sensores electro-ópticos, visible (cámara CCD) e Infrarrojo (FLIR), montados sobre una plataforma giro-estabilizada para un adecuado seguimiento de blancos fijos o móviles, tanto en condiciones diurnas como nocturnas.

Tiene una autonomía nominal de 6,5 horas y 40 kg de carga útil. Se propulsa con un motor de hélice bipala, con la que adquiere velocidad máxima de 190 km/h y un alcance de hasta 150 km, con un techo de 4000m de altitud.

Dispone de los sistemas de control de vuelo, propulsión, eléctrico, enlace de datos y recuperación. Éste último consta de paracaídas y airbags para recuperar el vehículo en cualquier tipo de terreno, o bien consta de tren de aterrizaje para su recuperación en pista.

- El segundo es el ALO, Avión Ligero de Observación. Es un sistema de observación de bajo coste y alta fiabilidad idóneo para la adquisición de imágenes aéreas en misiones civiles y militares de corto alcance.

  Consiste en tres vehículos aéreos equipados con sensores visibles o Infrarrojos, una unidad de control móvil, desde donde se realiza la planificación de la misión, el control de vuelo y el procesado de las imágenes obtenidas, y de un sistema de lanzamiento.

  Dispone de los siguientes subsistemas: célula, propulsión, navegación, guiado y control, unidades de telemetría y telecomando y carga útil.

El subsistema de navegación, guiado y control está equipado con sistema GPS y autopiloto y permite el vuelo en distintos modos, de operación o manual. La transmisión de imágenes y datos a la estación de control se realiza a tiemo real a través de la unidad de telemetría.

Dispone de una autonomía de más de 3 horas, una velocidad máxima de 200 km/h, un alcance de hasta 50 km y una carga útil de 10 kg.

- El tercero es el ALBA, Avión Ligero de Blanco Aéreo. Es un sistema completo de blanco aéreo teleguiado adecuado para mejorar la operatividad de las unidades de artillería antiaérea mediante su entrenamiento en condiciones de fuego real.

  Tiene un diseño modular, fuselaje, ala y unidad de cola, que permite un montaje/desmontaje rápido y un transporte cómodo.

  Dispone de soportes externos para cargar en vuelo bengalas y cartuchos fumígenos, para mejorar la visibilidad.

  Para misiones de entrenamiento de tiro de artillería antiaérea puede llevar opcionalmente un sistema Indicador de Distancia de Paso (MDI) que proporciona información sobre la distancia y el sector de paso de los disparos. Esta información se transmite en tiempo real a tierra para ayudar a la corrección de tiro.

  Dispone de una autonomía de hasta una hora, una velocidad máxima de crucero de 230 km/h y de un alcance típico de 4 km.

- El último de estos productos es el DIANA. Es un sistema de blanco aéreo de altas prestaciones desarrollado para simular amenazas reales. Por su versatilidad, el sistema puede emplearse como sistema de entrenamiento aéreo para gran cantidad de armas actuales y futuras.

Figura 28 – DIANA

Este sistema ha sido diseñado para cumplir una serie de requisitos: Capacidad de realizar tramos rectos a velocidad superior a 200 m/s. Alta capacidad de maniobra, maniobras de escape y maniobras de baja cota. Integración de gran variedad de cargas útiles. Menor coste del sistema y de su operación con relación a sistemas semejantes. Modularidad en el diseño del vehículo aéreo para que se adapte a requisitos adicionales. Simplificación de los procesos de fabricación, integración y mantenimiento.

El sistema DIANA lo componen la estación de tierra y 2 aviones. Como equipos embarcados, los aviones disponen de subsistema de navegación, guiado y control, aviónica auxiliar (conmutación de control y adquisición de señales), potencia eléctrica, radio enlace y sistema de recuperación (unidad de terminación de vuelo, paracaídas y sistema de flotación).

Dispone de una carga útil de 20 kg, velocidad máxima a nivel del mar de 222 m/s, un techo de 8000 metros, un alcance de 100 km y una autonomía de 1 hora.

Fuera del INTA, las Fuerzas Armadas españolas están llevando a cabo el programa ATLANTE, Avión Táctico de Largo Alcance No Tripulado Español.

Lo que el Ejército español quiere es dotarse de un UAV con capacidad ISTAR, Intelligence, Surveillance, Target Acquisition and Reconnaissance, las 24 horas del día y en condiciones climatológicas adversas. También debe permitir llevar a cabo labores de identificación de blancos, corrección de tiro y evaluación de daños.

No sólo tendrá misiones militares, sino también civiles. Entre las cuales tendríamos lucha antiterrorista, contra la piratería, control de inmigración ilegal, tráfico de drogas, gestión eficiente de la lucha contra incendios y otros desastres naturales, supervisión de infraestructuras críticas, vías de comunicación o identificación de personas en peligro o desaparecidas.

El programa ATLANTE se empezó en 2007 y se prevé que haga su primer vuelo este año.

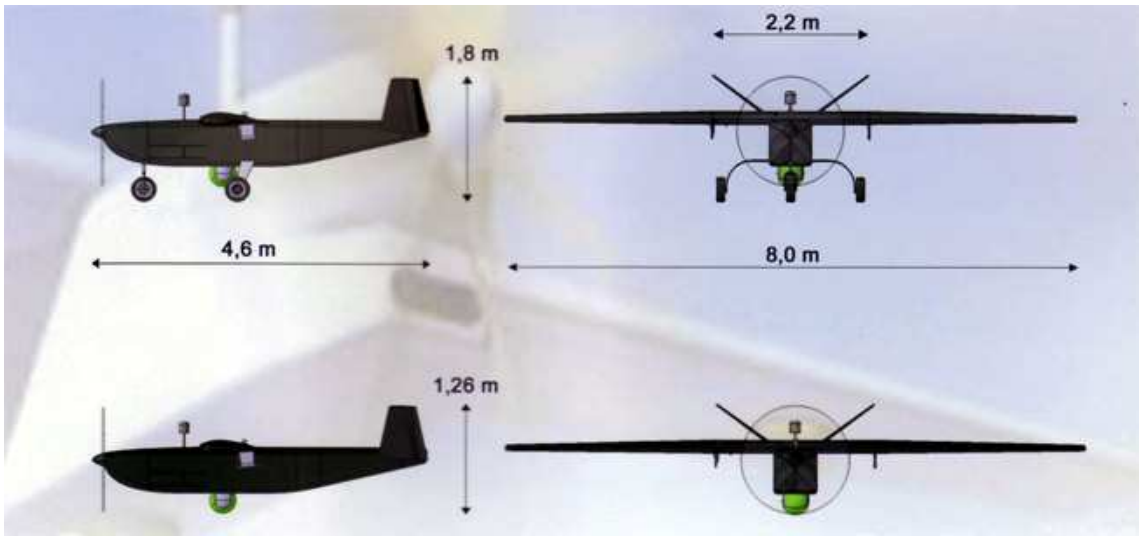

Figura 29 – Diseño del ATLANTE

El diseño es muy semejante al SIVA, aunque con mayores dimensiones, con mayor potencia y menor ruido. Los equipos de los que dispondrá son un ordenador de misión, un equipo de grabación de datos, comunicaciones tácticas y vía satélite, sistemas láser, sensores electro-ópticos e infrarrojos giro-estabilizados, cámaras de televisión y un radar de apertura sintética (SAR).

Dispondrá de 60 kg de carga útil, un radio de acción de 220 km, una autonomía de 10 horas y un techo de 12000 pies de altitud.

2. Teoría General de Control aplicable al UAV

Antes de poder empezar a controlar un sistema, primero hay que entender dicho sistema. Hay que saber qué tipo de estabilidad tiene, qué amortiguamiento, cómo es el sistema y cómo se comporta. Finalmente entender el sistema y mirar de corregirlo con las técnicas que se van a introducir.

2.1 Estabilidad

Para analizar el comportamiento de cualquier sistema lo primero que hay que hacer es mirar su estabilidad. Hay dos tipos de estabilidad: estática y dinámica.

2.1.1 Estabilidad estática

Primero hay que mirar cómo se comporta el sistema de forma estática. Esto quiere decir estudiar la tendencia en el comportamiento del sistema ante una pequeña perturbación.

El mejor ejemplo para visualizar esto es imaginar un cuenco redondo y una canica quieta en el centro. Si se mueve la canica, la tendencia de ésta será volver al centro, debido a la forma del cuenco. Es decir, la tendencia de la canica será volver a su posición de equilibrio. Cuando un sistema se ve perturbado de su posición de equilibrio y su tendencia es volver a dicha posición estamos hablando de un sistema estable estáticamente.

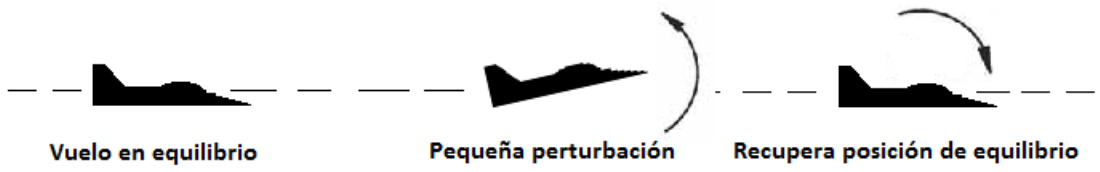

Figura 30 – Ejemplo de avión estable estáticamente

Ahora se pone el cuenco boca abajo y con mucho cuidado se coloca la canica en el centro. La canica vuelve a estar en la misma posición de equilibrio que antes. Pero si se mueve un poco la canica, la tendencia será caer hacia el lado donde se haya movido, con lo que caería por uno de los lados. Es decir, la tendencia de la canica será alejarse de su posición de equilibrio. Cuando un sistema se ve perturbado de su posición de equilibrio

y su tendencia es alejarse de dicha posición estamos hablando de un sistema inestable estáticamente.

Figura 31 – Ejemplo de avión inestable estáticamente

Por último se quita el cuenco y se coloca la canica encima de la mesa de forma que esté en equilibrio, no se mueva. Si se mueve la canica, ésta se seguirá moviendo hasta que el rozamiento la frene. La canica habrá alcanzado una nueva posición de equilibrio distinta a la inicial. Es decir, la tendencia de la canica será buscar equilibrio en una nueva posición. Cuando un sistema se ve perturbado de su posición de equilibrio y su tendencia es quedarse en equilibrio en la nueva posición estamos hablando de un sistema neutro, o indiferente, estáticamente.

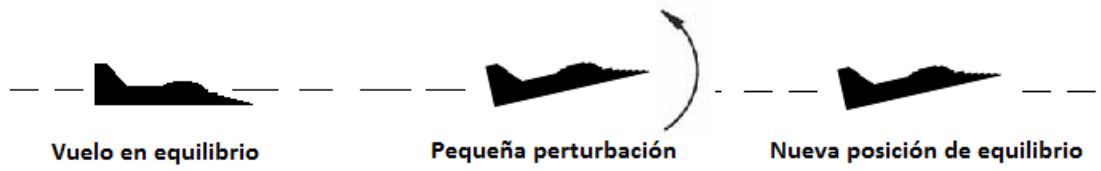

Figura 32 – Ejemplo de avión neutro estáticamente

2.1.2. Estabilidad Dinámica

Cuando se habla de estabilidad dinámica ya no se habla de la tendencia del sistema enfrente a una perturbación, sino al comportamiento del sistema en función del tiempo. Por lo general, dicho comportamiento será oscilatorio en torno a la posición de equilibrio inicial.

Entonces, para poder hablar de la estabilidad dinámica de un sistema se asume que dicho sistema será estable estáticamente. No tiene sentido analizar cómo se comportará un sistema a lo largo del tiempo si la tendencia del sistema es alejarse y alejarse de la posición de equilibrio.

Para que se visualice bien esto se vuelve al ejemplo del cuenco y la canica.

Se mueve la canica de su posición de equilibrio. Sobre la canica actuaría la fuerza de rozamiento del cuenco, con lo que la canica empezaría a rodar encima del cuenco hasta volver a quedarse quieta en su posición inicial. Es decir, la canica oscilaría, pero reduciendo la altura del cuenco a medida que va girando hasta dejar de girar. Cuando un sistema se ve perturbado de su posición de equilibrio y su comportamiento se traduce en oscilar con una amplitud decreciente hasta mantenerse en dicha posición inicial, estamos hablando de un sistema estable dinámicamente.

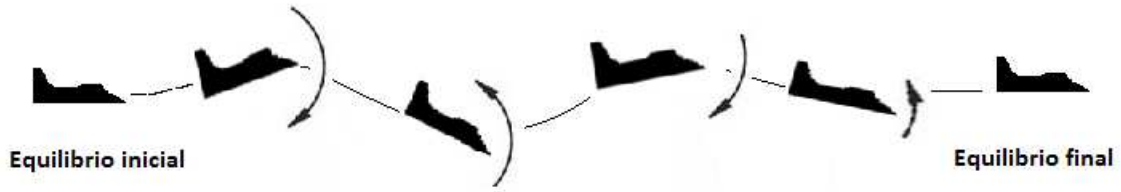

Figura 33 – Ejemplo de avión estable dinámicamente

Ahora hay la misma situación, pero sin que exista esta fuerza de rozamiento. Si se mueve la canica de su posición de equilibrio ésta empezará a rodar y rodar sin parar, no hay nada que la frene. Es decir, la canica oscilaría sin parar pero con la misma amplitud porque no habría ninguna fuerza que la frenara ni ninguna que la acelerase. Cuando un sistema se ve perturbado de su posición de equilibrio y su comportamiento es oscilar con amplitud constante, estamos hablando de un sistema neutro, o indiferente, dinámicamente.

Figura 34 – Ejemplo de avión neutro dinámicamente

Por último, no sólo no existe rozamiento, sino que existe una aceleración positiva en la misma dirección y sentido del movimiento de la canica. Si la se mueve de su posición de equilibrio ésta empezará a rodar. Gracias a la aceleración antes mencionada, iría aumentando la altura a la que está del cuenco después de cada oscilación. Es decir, la canica oscilaría sin parar y además aumentando la amplitud. Cuando un sistema se ve perturbado de su posición de equilibrio y su comportamiento es oscilar con amplitud creciente, estamos hablando de un sistema inestable dinámicamente.

Figura 35 – Ejemplo de avión inestable dinámicamente

Ahora que se han descrito los tipos de estabilidad de cualquier sistema se va a ver cómo se identifican.

Tenemos un sistema y su modelo matemático. Para analizar su estabilidad se deben identificar cuáles son los polos del sistema.

2.1.3. Función de Transferencia y polos del sistema

Cualquier sistema se puede representar por una función de transferencia. Ésta es una función que representa y modela la respuesta del sistema en función de la entrada.

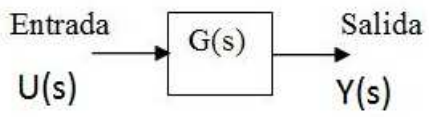

Figura 36 – Función de transferencia

En la figura 36, se ve el esquema típico de una función de transferencia $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$.

Para simplificar se hablará de una función de transferencia de una entrada y una salida.

Se puede ver que está todo en función de la variable ‘s’, con lo que se está hablando de una función de transferencia en la transformada de Laplace.

La función G(s) no es más que una división entre polinomios, de modo que tiene la forma simplificada:

$$G(s) = \frac{\eta(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)\ldots(s-z_i)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)\ldots(s-p_j)}$$

Donde:

- *η es la ganancia del sistema*
- *z_i son los ceros del sistema*
- *p_j son los polos del sistema*

Estos polos son números complejos que definen el comportamiento y estabilidad del sistema. Dado que son valores complejos se pueden visualizar gráficamente en un plano de dos dimensiones.

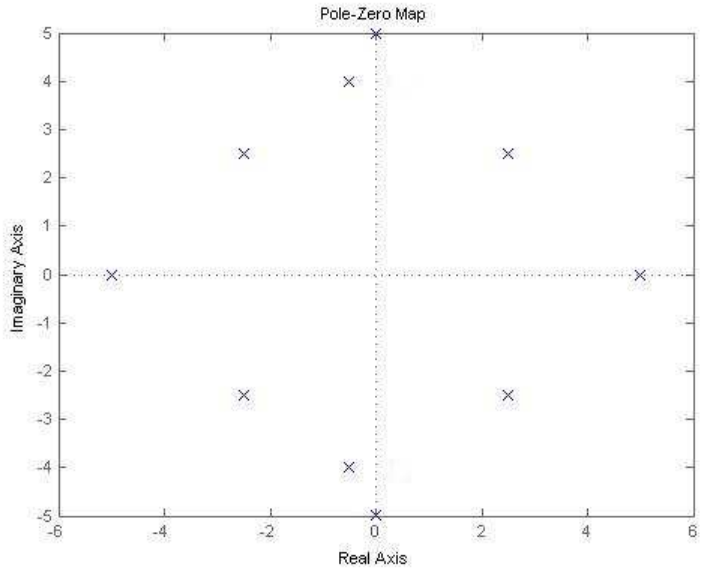

Figura 37 – Diagrama de Polos

Se va a analizar este diagrama. El eje horizontal es el eje real y el vertical el imaginario. Los polos que comparten la misma parte real y el mismo valor absoluto de componente imaginario son polos asociados, que se les llamará pares de polos a partir de ahora.

Se nombran los polos, o pares, de derecha a izquierda del P1 al P6. Así se analizará la estabilidad de cada uno de forma independiente y con un sistema con sólo dicho polo, o par de polos.

Para ver si es estable o inestable se hace una pequeña función de transferencia con Matlab y se pueden usar tanto la función STEP como la función IMPULSE.

Usando la función STEP, la entrada del sistema U(s) es un escalón, es decir $U(s) = \frac{1}{s}$.
En cambio si se usa la función IMPULSE la entrada del sistema es un impulso puntual, es decir $U(s) = 1$.

El comportamiento será el mismo, pero al usar un impulso lo que se ve es la respuesta del sistema a una pequeña perturbación. En cambio, al usar como entrada un escalón lo que se ve es cómo responde el sistema con una perturbación constante, moviendo el sistema de su posición de equilibrio a un nuevo equilibrio.

Para ver la respuesta de los polos se usará una entrada tipo impulso

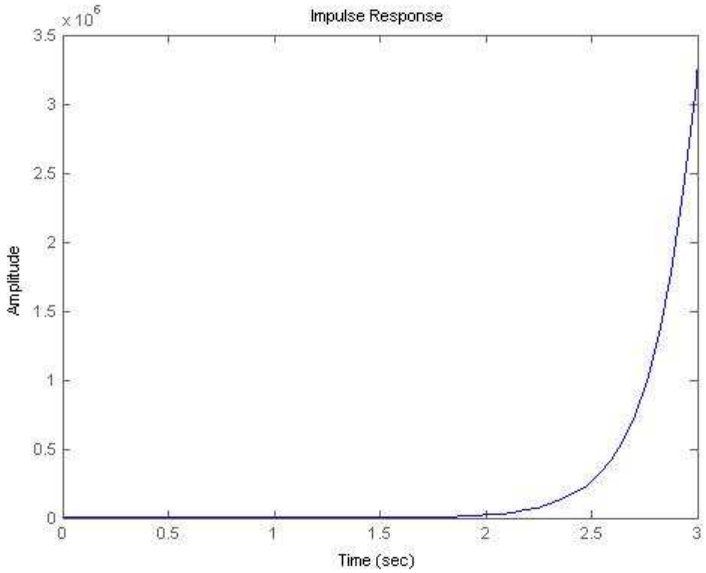

Figura 38 – Polo 1

Se puede ver que el polo 1 es completamente inestable.

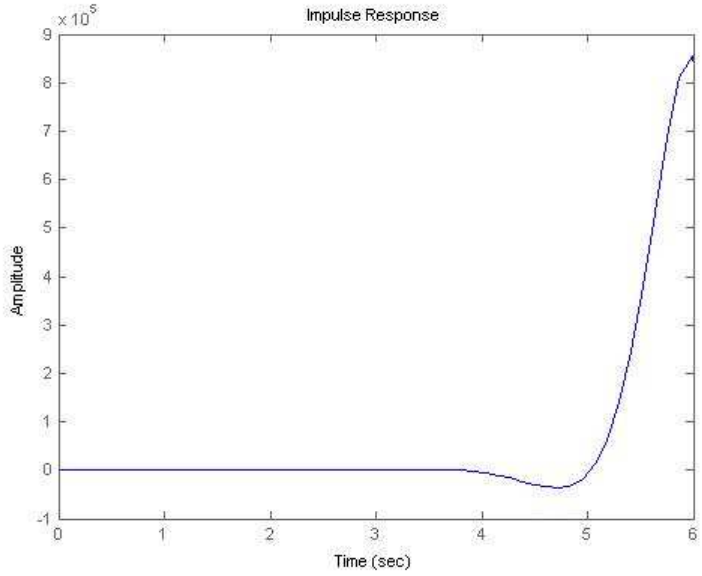

Figura 39 – Pareja de polos 2

La respuesta temporal de la pareja de polos 2 es también inestable y tiende a infinito, aunque un poco más lenta que la anterior.

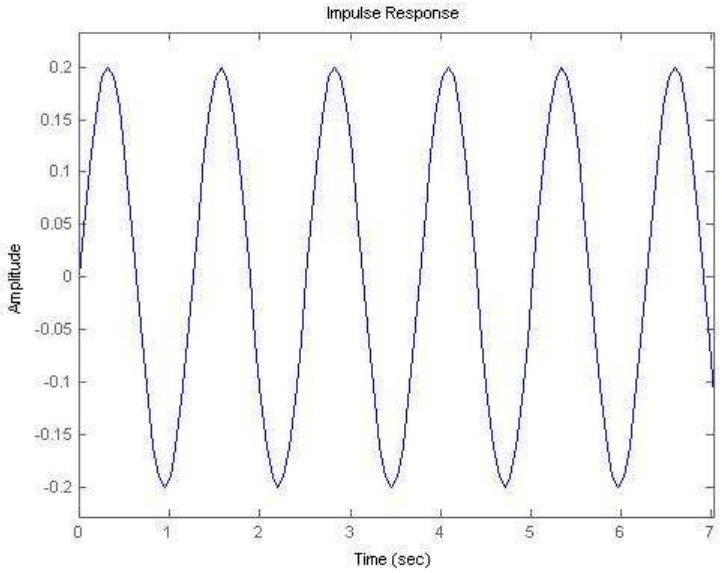

Figura 40 – Pareja de polos 3

La respuesta temporal de la pareja de polos 3 es un ejemplo claro de estabilidad dinámica neutra.

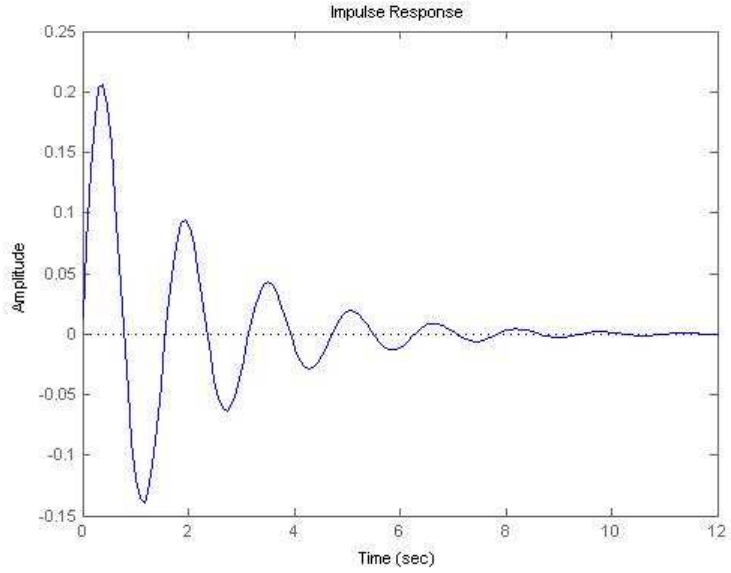

Figura 41 – Pareja de polos 4

Se puede ver que la respuesta temporal de esta pareja de polos sí que es estable, oscila, pero va disminuyendo su amplitud hasta estabilizarse en el valor de equilibrio inicial.

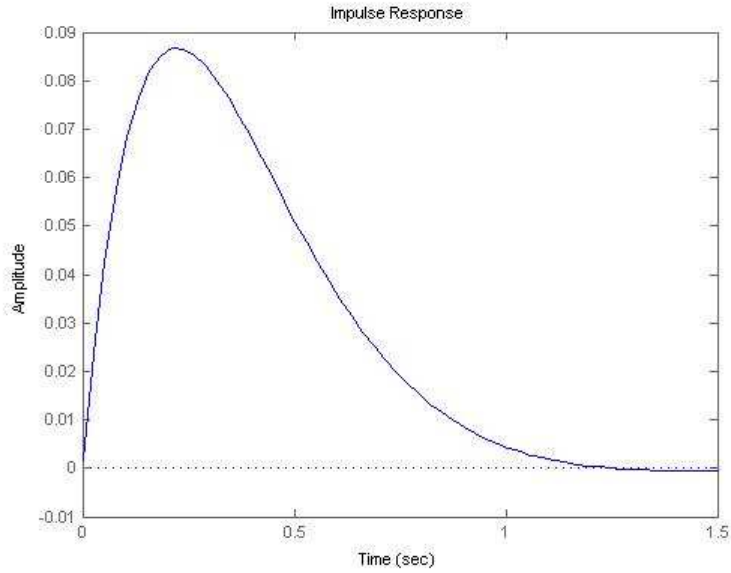

Figura 42 – Pareja de polos 5

La respuesta temporal de esta pareja de polos es aún más estable que la anterior, también oscila, pero no llega a hacer un período entero.

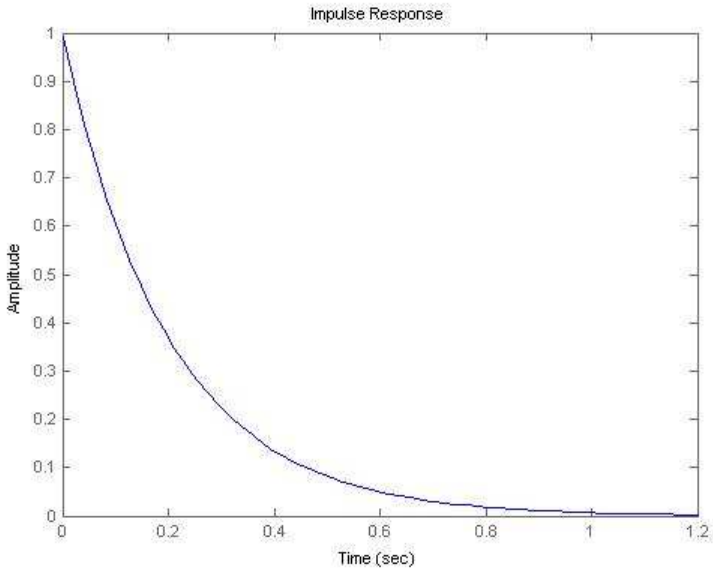

Figura 43 – Polo 6

Por último, el polo que está más a la izquierda. La respuesta temporal no oscila y es muy estable y muy rápida.

Sólo viendo el comportamiento de cada sistema por separado se ve que los polos están directamente ligados a la estabilidad del sistema. Lo primero que se observa es que los polos con parte real positiva son inestables. Lo segundo es que los polos que tienen componente imaginaria oscilan. Si observamos las parejas 4 y 5 también se ve que cuanto mayor es el componente imaginario mayor es la oscilación. Y finalmente se ve que cuan más cerca están los polos del origen más lenta es la respuesta temporal.

Para ver con exactitud el comportamiento temporal que producen estos polos se mirará qué respuesta temporal inducen. Es decir, la transformada inversa de Laplace para polos simples y para polos complejos.

La transformada inversa de Laplace de un polo simple tiene forma de exponencial tal que $y(t) = \alpha e^{at}$. La transformada inversa de Laplace de un par de polos complejos tiene forma senoidal amortiguada $y(t) = \alpha e^{at} \sin(bt)$. En estos casos a es la parte real del polo y b la parte compleja. Al ser exponenciales se ve directamente que si el valor del polo es positivo la respuesta tiende a infinito, con lo que es inestable.

2.2. Amortiguamiento

Se define la forma de los polos complejos, para obtener un polinomio de segundo orden:

$G(s) = \dfrac{\kappa}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^{\ 2}}$, dónde κ es una ganancia estándar

Hay dos variables a definir, la frecuencia natural del sistema (ω_n) y el factor de amortiguamiento (ζ).

Se hace el proceso inverso y se saca el valor de los polos de este polinomio, es decir a y b antes mencionadas:

$$p_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^{\ 2} - 4\omega_n^{\ 2}}}{2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

La respuesta y comportamiento del sistema depende directamente del factor de amortiguamiento. Se va a analizar cada caso en función del valor de ζ:

- Caso 1: $\zeta>1$

Cuando el factor de amortiguamiento es mayor que la unidad el valor de dentro de la raíz es positivo, con lo que no hay componente imaginaria en los polos. Se obtienen dos polos reales, que como se ha visto antes su comportamiento es el de una exponencial.

Al movimiento que describe la respuesta del sistema se le llama movimiento sobreamortiguado.

Si se coge el sistema y se introduce un impulso como entrada:

$$Y(s) = 1 \cdot G(s) = \frac{\kappa}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^{\ 2}} = \frac{\kappa}{(s - p_1)(s - p_2)} = \kappa\left(\frac{A}{s - p_1} + \frac{B}{s - p_2}\right)$$

Siendo A y B el numerador resultante de simplificar en fracciones simples. Si ahora se hace la transformada inversa de Laplace para obtener la respuesta temporal:

$$y(t) = \kappa\left(Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t}\right)$$

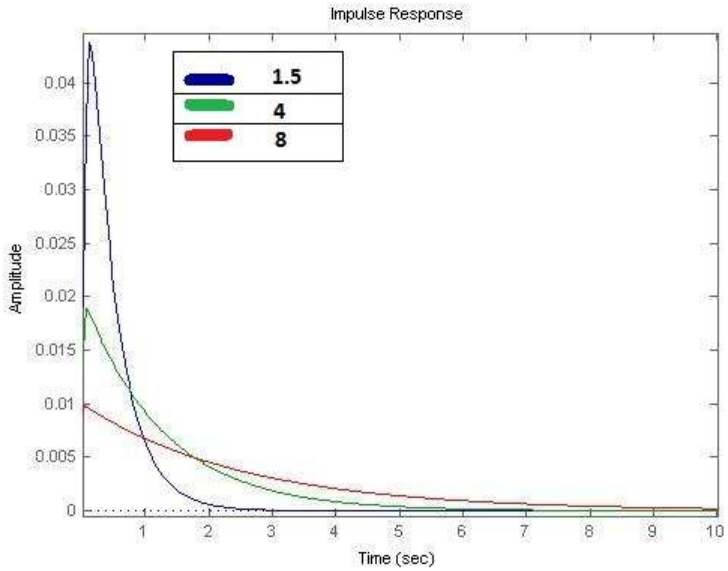

Figura 44 – Movimiento sobreamortiguado con factores de amortiguamiento 1.5, 4 y 8

Se ve en la figura el comportamiento del sistema ante una pequeña perturbación. Esta gráfica se ha hecho con valores κ =1, ω_n = 2π/s y ζ=1.5, 4 y 8.

Se ve que a medida que aumenta el valor de ζ que tarda en estabilizarse aumenta. Esto es así porque uno de los polos se va acercando cada vez más a cero. Aunque el principio de la respuesta es muy rápido.

- Caso 2: ζ=1

Cuando el factor de amortiguamiento es igual a la unidad la raíz en los polos se anula, con lo que se tiene un polo de multiplicidad doble, de valor $p_1 = p_2 = -\omega_n$.

Al movimiento que describe la respuesta del sistema se le llama amortiguamiento crítico.

Como antes, se introduce un impulso como entrada y se analiza la respuesta:

$$Y(s) = 1 \cdot G(s) = \frac{\kappa}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^{\ 2}} = \frac{\kappa}{(s+\omega_n)} = \left(\frac{A}{(s+\omega_n)^2} + \frac{B}{(s+\omega_n)} \right)$$

Al hacer la transformada inversa de Laplace para pasar la respuesta al dominio temporal:

$$y(t) = \kappa(At + B)e^{p_2 t}$$

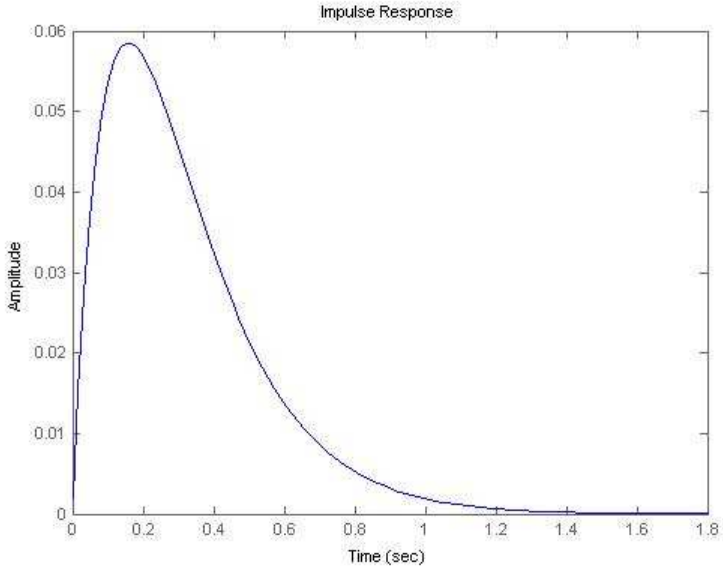

Figura 45 – Movimiento crítico

Se han usado los mismos valores de ganancia y de frecuencia que antes, para poder comparar gráficas.

La respuesta se estabiliza más rápido que las anteriores. Es debido a que en los casos anteriores había un polo más cerca del origen.

- Caso 3: ζ=0

Cuando el factor de amortiguamiento es cero la parte real del polo es también cero. Con lo que hay un movimiento oscilatorio no amortiguado.

Al movimiento que produce la respuesta del sistema se le llama movimiento no amortiguado.

Se introduce un impulso como entrada y se analiza la respuesta:

$$Y(s) = 1 \cdot G(s) = \frac{\kappa}{s^2 + \omega_n^{\ 2}}$$

La transformada inversa de Laplace es directa:

$$y(t) = \frac{\kappa}{\omega_n} sen(\omega_n t)$$

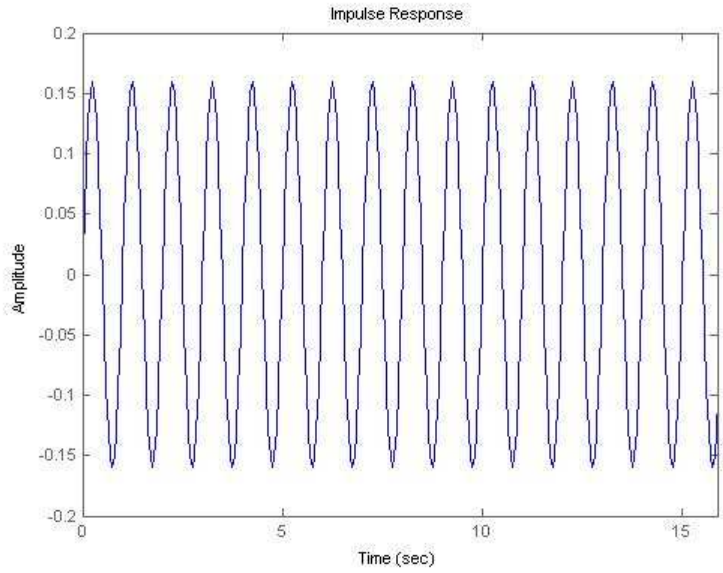

Figura 46 – Movimiento no amortiguado

En este caso la respuesta del sistema es un seno, podría haber sido también un coseno, dependiendo del numerador de la función de transferencia. No es un movimiento amortiguado y la frecuencia de oscilación es la natural ($\omega_n = 2\pi/s$) que se ha usado en todas las gráficas.

Estos polos tienen una estabilidad indiferente, con lo que no es bueno tener polos en una posición tan crítica.

- Caso 4: $0<\zeta<1$

Cuando el factor de amortiguamiento es menor que la unidad el resultado de la raíz en los polos es negativo, por lo que los polos toman valores complejos. En este caso es cuando se produce un movimiento oscilatorio amortiguado.

Al movimiento que produce la respuesta del sistema se le llama movimiento subamortiguado.

Se introduce un impulso como entrada y se analiza la respuesta:

$$Y(s) = 1 \cdot G(s) = \frac{\kappa}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\kappa}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(\zeta^2 - 1)}$$

Al hacer la transformada inversa de Laplace se obtiene:

$$y(t) = \frac{\kappa}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} sen\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t\right)$$

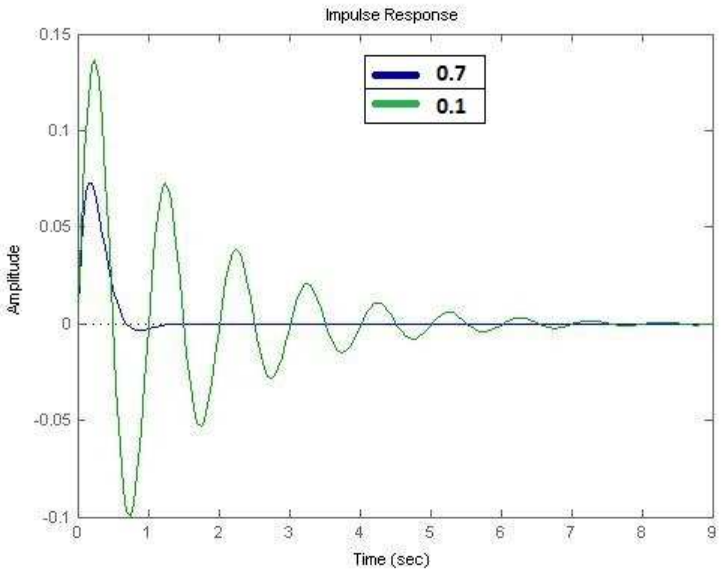

Figura 47 – Movimiento subamortiguado para una entrada impulso

Ésta es una gráfica de la respuesta del sistema a un impulso con factores de amortiguamiento 0.7 y 0.1 respectivamente. Se ve en la figura que el factor de amortiguamiento influye mucho en el tipo de respuesta del sistema. A mayor factor de amortiguamiento más rápida es la respuesta, es decir, regresa antes a la situación de equilibrio. A menor factor de amortiguamiento mayor es la oscilación y la frecuencia es un poco mayor también.

En este caso se mirará el mismo comportamiento con una entrada escalón.

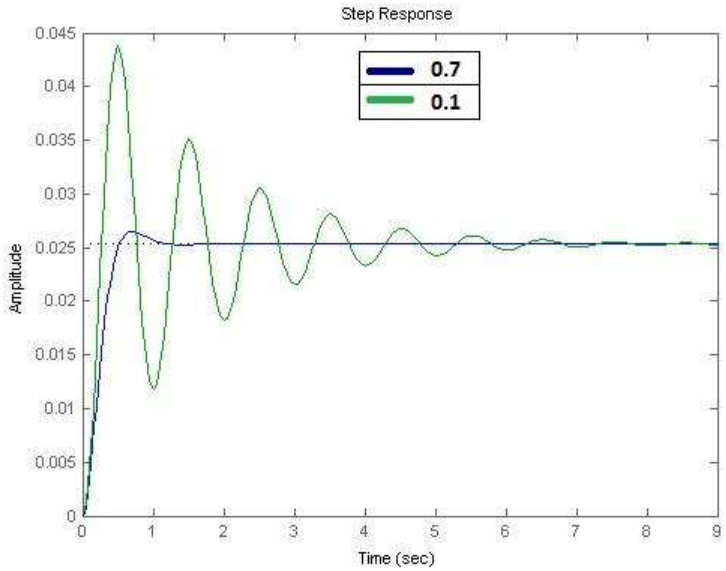

Figura 48 – Movimiento subamortiguado para una entrada escalón

Se ve que la frecuencia del sistema no es la natural de la que hemos partido sino que está modificada por el factor de amortiguamiento de forma: $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$.

Se define la constante de tiempo de cada polo como: $\tau = \dfrac{1}{\zeta \omega_n}$

Se han visto sistemas de primer y de segundo orden. Para analizar los de orden superior sólo hay que separar polos e ir analizando por separado. Recordando que los polos simples toman forma de exponencial y que los polos complejos toman forma senoidal. Pero hay que tener en cuenta que los polos que estén más cerca del origen serán los polos dominantes del sistema y los que marcarán el tipo de respuesta de ésta.

2.3. Control Clásico

El objetivo al controlar un sistema es primero estabilizarlo si es inestable y luego cambiar la posición de los polos hacia una en que la respuesta del sistema satisfaga unos criterios.

Ambas cosas ya se han estudiado en los dos apartados anteriores. Ahora se verá cómo conseguir cambiar los polos de su posición inicial. Para ello se introduce lo que es una herramienta fundamental tanto en control como en ingeniería en general.

Feedback o realimentación

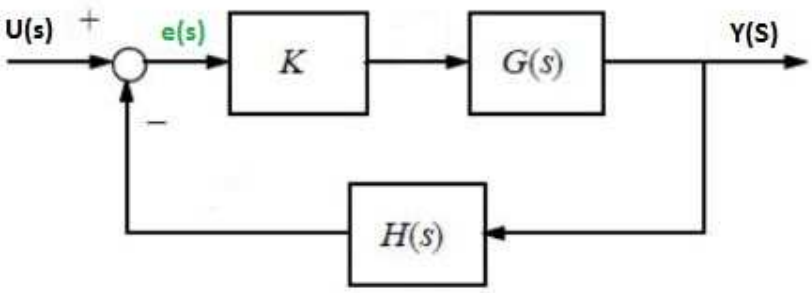

Figura 49 – Esquema típico de feedback

La realimentación, que también se puede llamar sistema en lazo cerrado, consiste en llevar la salida, o parte de ella, hacia la entrada. El bloque H(s) es la función de transferencia del sensor que mide la salida Y(s). Se considerará H(s) = 1. La ganancia K se encarga del control de la realimentación.

Con este esquema, se modifican los polos del sistema, los cuales dependen directamente del valor de la matriz de control. Para ver cómo se modifican los polos al usar esta realimentación se operan las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} e(s) = U(s) - Y(s) \\ Y(s) = Ke(s)G(s) \end{array}\right\} \Rightarrow Y(s) = K[U(s) - Y(s)]G(s) \Rightarrow [1 + KG(s)]Y(s) = KU(s)G(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{KU(s)G(s)}{1 + KG(s)} \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}$$

Finalmente se ha obtenido la nueva relación que tiene la entrada respecto la salida. Es decir, la nueva función de transferencia del sistema.

La ganancia K está en el denominador de la función, es decir que modifica los polos de forma directa. La ganancia K también se encuentra en el numerador de la función, pero no modifica los ceros, sólo la amplitud de la respuesta.

Para encontrar el valor de K que modifique los polos para obtener los polos deseados hay una técnica llamada lugar geométrico de las raíces o root locus.

2.4. Espacio de Estados

Hasta ahora, al sacar el modelo matemático de un sistema se hacía empleando la transformada de Laplace. Así se obtenía un sistema modelizado matemáticamente con una o varias funciones de transferencia, siendo el total de ellas el número de entradas por el número de salidas.

Usando el método clásico, se escoge una de las salidas del sistema y se realimentamos a la entrada con la que se quiera controlar dicha salida, cambiando así la respuesta para todas las salidas.

La gran ventaja de usar un espacio de estados es que se obtendrá un sistema más compacto, en el que intentará, o conseguirá, controlar todo el sistema directamente.

2.4.1. Modelo matemático

Cuando se trata de modelizar matemáticamente un sistema, se sacan sus ecuaciones que lo caracterizan, es decir fuerzas y momentos.

Se deben aislar las variables que caracterizarán el comportamiento del sistema, formando así un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Si se tiene un sistema en equilibrio, con ninguna fuerza externa que lo desplace del equilibrio, el sistema de ecuaciones diferenciales se puede representar de la siguiente forma:

$$\dot{x}_i(t) = f_i\left(x_1,...,x_i,...x_n;t\right)$$

- $x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n$ son las n variables de estado del sistema

Las variables de estado son un vector, que define el comportamiento de un sistema, como por ejemplo la velocidad, velocidad angular, ángulo, etc. Así, se obtiene un sistema de ecuaciones con n ecuaciones, en las que las variables de estado son linealmente independientes entre ellas.

Si hay alguna fuerza externa que actúe en el sistema, se debe introducir en la ecuación anterior:

$$\dot{x}_i(t) = f_i\left(x_1,...,x_i,...x_n;u_1,...,u_j,...,u_r;t\right)$$

- $u_1,\ldots,u_j,\ldots,u_r$ son las r entradas externas del sistema

Finalmente, la salida del sistema no son estas variables de estado, sino que siguen otra función:

$$y_k(t) = g_k\left(x_1,\ldots,x_i,\ldots x_n;t\right)$$

- k=1..m, siendo m el número de salidas del sistema

Como antes, la salida podría depender directamente de una fuerza externa o entrada del sistema, con lo que el sistema de ecuaciones general vendría dado por:

$$y_k(t) = g_k\left(x_1,\ldots,x_i,\ldots x_n;u_1,\ldots,u_j,\ldots,u_r;t\right)$$

Con estos 2 sistemas de ecuaciones ya se tiene el modelo matemático completo del sistema, pero al no ser necesariamente un sistema lineal resulta muy difícil trabajar con él, con lo que hay que linealizarlo.

Para ello, se aplica el desarrollo en serie de Taylor en el punto de equilibrio inicial, x=0, u=0, y se cogen con los primeros términos, para obtener 4 matrices y que quede un sistema cómodo:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu\\ y &= Cx + Du\end{aligned}\right\}$$

La matriz A se denomina matriz de estado, ya que es la que define las propiedades de las variables de estado. Es una matriz de n filas y n columnas.

La matriz B se denomina matriz de entrada o matriz de control, ya que es la que define las propiedades de las entradas del sistema. Es una matriz de n filas y r columnas.

La matriz C se denomina matriz de salida, ya que es la que relaciona las variables de estado con la salida del sistema. Es una matriz de m filas y n columnas.

La matriz D se denomina matriz de transmisión directa, ya que relaciona la salida del sistema con las entradas. Es una matriz de m filas y r columnas.

Así, las matrices tendrán la siguiente forma:

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \cdots \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_i} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial u_j} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial u_r} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \cdots \frac{\partial f_i}{\partial u_r} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial u_j} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial u_r} \end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial g_1}{\partial x_i} \cdots \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_i}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \cdots \frac{\partial g_i}{\partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial g_m}{\partial x_i} \cdots \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}; D=\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial g_1}{\partial u_j} \cdots \frac{\partial g_1}{\partial u_r} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_i}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial g_i}{\partial u_j} \cdots \frac{\partial g_i}{\partial u_r} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial g_m}{\partial u_j} \cdots \frac{\partial g_m}{\partial u_r} \end{pmatrix}$$

Asimismo, se llamará a x el vector de variables de estado, u será el vector de entradas del sistema e y será el vector de salidas del sistema.

Para más comodidad se representa en un diagrama de bloques, usando Simulink:

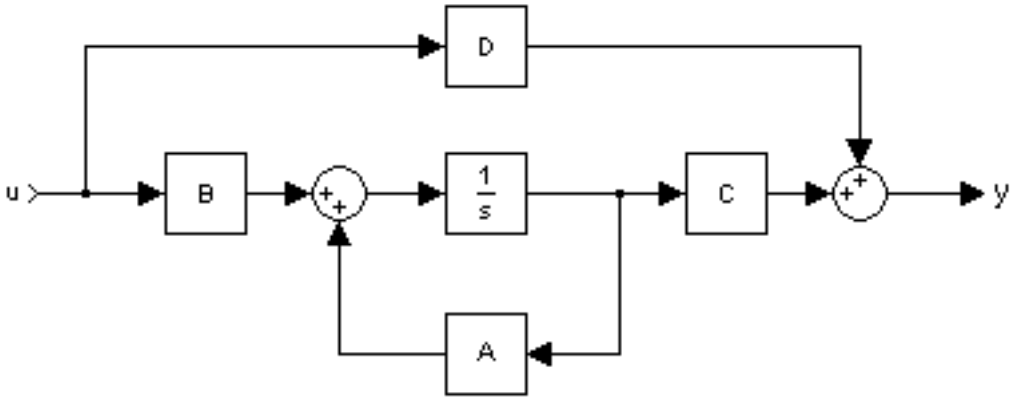

Figura 50 – Diagrama de bloques Espacio de Estados

Como el sistema ya no está definido por funciones de transferencia, los polos del sistema están en otro lugar. Ese lugar no es otro que en la matriz de estado. Se aisla de forma que no se mire ni la salida ni la entrada, sino sólo el sistema en sí

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

La solución a las ecuaciones diferenciales de primer orden no son otra cosa que exponenciales (en caso de ser soluciones complejas son ondas senoidales). Sustituyendo x(t) = wexp(λt), siendo w un vector escalar de n columnas, se obtiene:

$\lambda w e^{\lambda t} = A w e^{\lambda t}$, o lo que es lo mismo, $\lambda w = Aw$

Como se quiere un conjunto de soluciones en el que el vector w no sea nulo, se debe cumplir la siguiente ecuación:

$$\det(\lambda I_n - A) = 0$$

Al solucionar el determinante, se obtiene una ecuación de orden n, la cual se puede simplificar en productos de sumas de forma que queden de la siguiente manera:

$$k(\lambda) \equiv \det(\lambda I_n - A) = (\lambda - p_1)...(\lambda - p_i)...(\lambda - p_n)$$

Obteniendo así los polos del sistema ($p_1,\ldots,p_i,\ldots,p_n$).

Los criterios de amortiguación y estabilidad se conservan de antes, ya que los polos del sistema son exactamente los mismos que si se hubieran usado funciones de transferencia para modelizar matemáticamente este sistema.

2.4.2. Control en el Espacio de Estados

Como en el control clásico, el control del sistema implica conocer cómo se está comportando y arreglarlo mediante una realimentación. Pero a diferencia del control clásico, en el espacio de estados no se realimenta la salida, sino que se realimentan las variables de estado.

Pero primero, para saber si se puede controlar un sistema hay que mirar su controlabilidad. Esto es mirar si realimentando se pueden mover los polos del sistema a cualquier sitio que se quiera del diagrama de polos.

Para ello el siguiente teorema:

- Un sistema será completamente controlable si, y sólo si, existe un control sin restricción u(t) que puede llevar cualquier estado inicial $x(t_o)$ a cualquier otro estado deseado x(t) en un tiempo finito.
- Es controlable si se cumple la siguiente igualdad, donde n es el número de variables de estado del sistema.

$$rank\left(\mathrm{B}\ \mathrm{AB}\ \mathrm{A}^2\mathrm{B}\ldots\mathrm{A}^{n-1}\mathrm{B}\right) = n$$

Una vez se verifica que el sistema es completamente controlable se puede ver cómo se va a controlar el sistema.

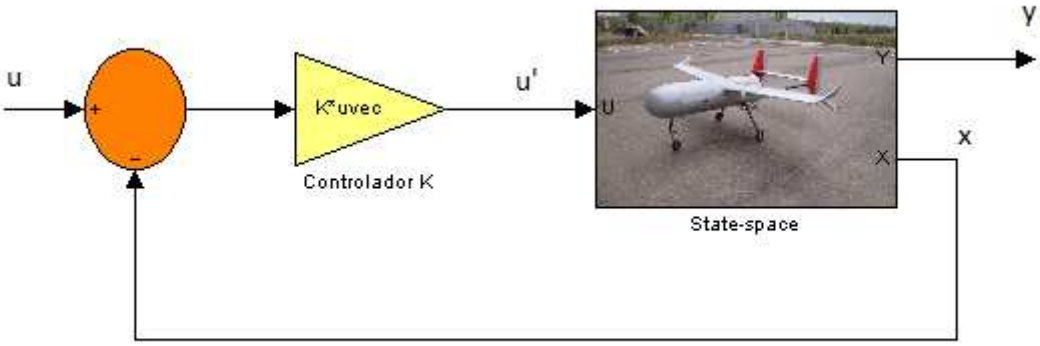

Figura 51 – Esquema de controlador en un sistema de espacio de estados

Se define la matriz de control K como la matriz de ganancias para cada variable de estado que se van a realimentar. Es una matriz de r filas y n columnas. Con lo que el sistema de ecuaciones del espacio de estados se ve modificado:

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x} = Ax + Bu' \\ y = Cx + Du \\ u' = K(u - x)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\dot{x} = Ax + BK(u - x) \\ y = Cx + Du\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\dot{x} = (A - BK)x + BKu \\ y = Cx + Du\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\dot{x} = A'x + BKu \\ y = Cx + Du\end{array}\right\}$$

Se obtiene una nueva matriz de estado, A'. Como antes, se miran los polos del sistema haciendo el determinante:

$$\det(\lambda I_n - A') = 0 \rightarrow \det(\lambda I_n - A + BK) = 0$$

Resolviendo esta igualdad, ahora hay 2 series de incógnitas, la ganancia K y los polos, que dependen entre ellos.

Además, la referencia u, ahora es un vector de n variables, las cuales serán referencias individuales para cada valor que se quiere de variables de estado del sistema.

2.4.3. Control por asignación de polos

Una forma de abordar el control de este sistema es decidir qué polos se quiere que tenga el sistema en lazo cerrado. Así, se define qué tipo de salida se quiere, mejorando las características de control y estabilizándolo si es necesario.

Una vez se ha decidido qué polos se quieren en el sistema, se hace el determinante para hallar los polos, teniendo como incógnitas los coeficientes de la matriz K.

El proceso se muestra con un ejemplo. Sea un sistema definido por las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se calculan los Polos y se mira si este sistema es completamente controlable.

$Polos = 1.5 \pm j3.428$ y tiene rango 2

El sistema es controlable, y no gustan los polos porque oscila mucho. Se deciden los polos deseados, que serán -1 y -2. El procedimiento será el siguiente:

Se define la matriz $K = [k1 \quad k2]$ y se opera el determinante:

$$\det(\lambda I_n - A + BK) = 0 \Rightarrow \det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k1 & k2 \\ k1 & k2 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} k1 + \lambda - 1 & k2 + 3 \\ k1 - 4 & k2 + \lambda - 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + (k1 + k2 - 3)\lambda + (14 - 5k1 + 3k2) = 0$$

Paralelamente se saca la ecuación de los polos:

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

Se iguala y se obtiene un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$\left.\begin{matrix} k1 + k2 - 3 = 3 \\ 14 - 5k1 + 3k2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow k1 = \frac{15}{4}; k2 = \frac{9}{4}$$

Ya se ha obtenido matriz de control K con la que se obtienen los polos deseados. A medida que hay más variables de estado y más entradas la resolución de los coeficientes de K se hacen más complicados de resolver.

En Matlab hay una función llamada PLACE. Esta función resuelve el determinante, como se ha resuelto en el ejemplo anterior, para cualquier sistema MIMO (Multiple Input, Multiple Output) lo más aproximado posible a los valores de polos deseados.

2.4.4. Control óptimo cuadrático

El diseño de sistemas óptimos de control es una función importante en la ingeniería de control. El propósito del diseño es realizar un sistema con componentes prácticos que proporcione el comportamiento de operación deseado.

Considérese el diseño de un sistema óptimo de control donde el sistema se describe mediante una formulación de variables de estado. La realimentación será como la que se ha considerado de inicio.

En el control óptimo lo que se intenta es minimizar el índice de comportamiento, o función de coste, que viene dado por la siguiente función:

$$J = \int_0^\infty \left(x^T Q x + u^T R u\right) dt$$

Donde Q es una matriz nxn, hermética positiva o simétrica real, y representa la desviación de los estados respecto a los estados deseados (señal de entrada).
Donde R es el factor de peso escalar, el cual se minimiza cuando $K = R^{-1} B^T P$. R es una matriz mxm, siendo m el número de entradas del sistema.

La matriz P, que tiene dimensiones nxn, se determina como solución de la ecuación matricial reducida de Riccati:

$$A^T P + PA - PBR^{-1} B^T P + Q = 0$$

En un sistema regulador óptimo cuadrático, como en el sistema de asignación de polos, se supone una entrada del sistema $u = -Kx$.

Los pasos del diseño de esta ley de control se plantean del modo siguiente:

- Resolver la ecuación matricial reducida de Riccati, para la matriz P.
- Sustituir esta matriz P en la ecuación $K = R^{-1} B^T P$, obteniendo así la matriz K óptima.

En Matlab existe la función LQR, que da como resultado el valor de la matriz K que minimiza el índice de comportamiento dadas una matriz Q y R. No teniendo así que calcular a mano la matriz P para conseguir la matriz del controlador.

A la hora de diseñar un controlador óptimo cuadrático, se debe elegir el valor de las matrices Q y R. La única regla que existe a la hora de hacerlo es que los valores de los coeficientes deben ser siempre cero o positivos. Un método simple consiste en escoger matrices diagonales, asignando valores grandes a aquellas variables a minimizar.

La ventaja más importante del controlador LQR es que independientemente de las matrices Q y R escogidas, se obtendrá una ley de control que haga un sistema estable.

Para el diseño del controlador LQR en este proyecto se va a seguir la regla de Bryson:

$$J = \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^{n} Q_{ii} x_i^{\,2} + \overline{p} \sum_{j=1}^{m} R_{jj} x_j^{\,2} \right) dt$$

Según la regla de Bryson, las matrices Q y R son matrices que sólo tienen valores en la diagonal principal, y estos valores son el inverso del máximo valor aceptable de las variables de estado y las entradas, respectivamente. p es una constante positiva.

Una vez establecidas las matrices Q y R se harán pruebas cambiando los valores de $\overline{p}$ hasta obtener la mejor respuesta.

3. Modelo matemático

En este capítulo se va a desarrollar un modelo matemático que simule el comportamiento del UAV. Para ello se partirá de las relaciones de fuerzas y momentos que afectan en vuelo y las superficies de control que se usarán para controlarlo.

3.1. Superfícies de Control

En el UAV, y en cualquier aeronave en general, existen 3 superficies de control.

Figura 52 – Superficies de Control

En la figura 52 se ven dibujadas en 3 colores las superficies de nuestro UAV. Cada superficie proporciona un momento entorno a un solo eje, lo que nos genera una fuerza y un movimiento respecto a los ejes de equilibrio.

Las tres superficies de control se llaman Timón de Profundidad (en Ámbar), Alerones (en Verde) y Timón de Dirección (en Rojo).

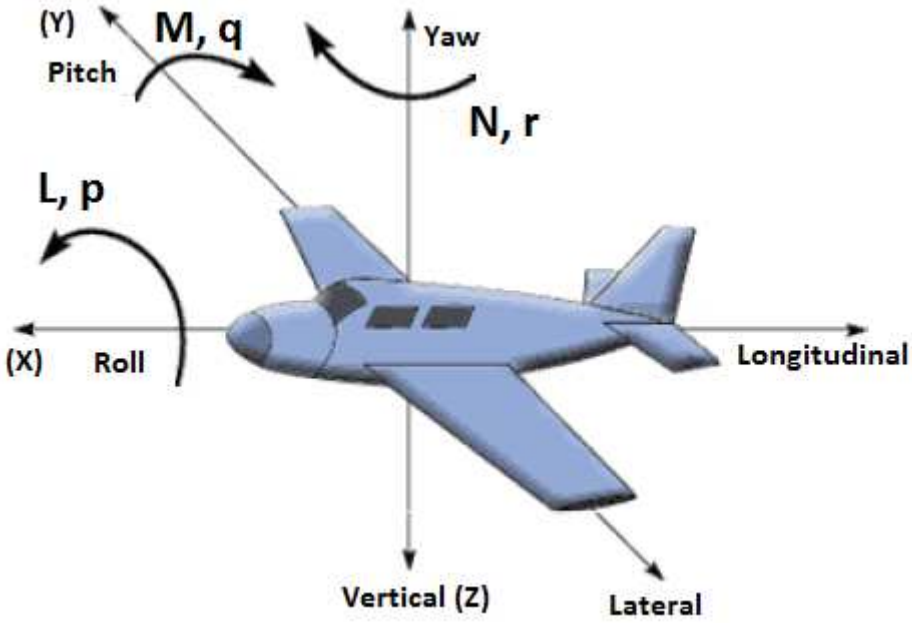

Figura 53 – Ejes de la aeronave

Estos 3 ejes son X, Y y Z, o desde el punto de vista de los momentos Pitch, Roll y Yaw. Cada momento está asociado con uno de los ejes, siendo así las parejas Pitch-Y , Roll-X y Yaw-Z (figura 53). Se ha marcado el eje positivo y el momento positivo en la dirección de las flechas donde se han puesto los nombres.

El Timón de Profundidad aporta un momento de Cabeceo o Pitch. Los Alerones aportan un momento de Alabeo o Roll. Y finalmente el Timón de Dirección aporta un momento de Guiñada o Yaw.

3.2. Cálculo del Modelo Matemático

Para poder controlar nuestro UAV es necesario saber cómo se comporta. Es decir, se necesita un modelo matemático que permita reproducir, lo más fiel posible, el movimiento que tiene el UAV cuando se altera de su posición de equilibrio.

Para estudiar dicho comportamiento se hará en 3 partes que son completamente independientes: una parte general, en la que se desarrollan las ecuaciones válidas en los 3 ejes, una parte en la que sólo se estudia el movimiento Longitudinal y una última parte en la que sólo se estudia el movimiento LateroDireccional

3.2.1. Parte general

Se empieza aplicando la segunda ley de Newton para cada uno de los ejes de la aeronave:

$$\sum \vec{F}_{EXT} = \frac{d\left(m\vec{V}_T\right)}{dt} = \sum \vec{F}_o + \sum \Delta\vec{F} \qquad (1)$$

También se aplica esta ley a los momentos de la aeronave:

$$\sum \vec{M}_{EXT} = \frac{d\vec{H}}{dt} = \sum \vec{M}_o + \sum \Delta\vec{M} \qquad (2)$$

En donde: H es el momento angular para cada eje. F_{EXT} es la fuerza producida por una pequeña perturbación en cada eje. M_{EXT} es el momento producido por una pequeña perturbación en cada eje.

Tanto la ecuación 1 como en la 2 se pueden simplificar asumiendo que la aeronave estaba en equilibrio antes de que se produjera la perturbación. Es decir:

$$\sum \vec{F}_o = 0$$

$$\sum \vec{M}_o = 0$$

Con lo que se obtiene:

$$\frac{d\left(m\vec{V}_T\right)}{dt} = \sum \Delta\vec{F} \tag{3}$$

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \sum \Delta\vec{M} \tag{4}$$

Para conseguir un modelo matemático que satisfaga el comportamiento real, o muy aproximado, del UAV, se deben ir haciendo diversas suposiciones:

- Suposición #1: La masa de la aeronave se mantiene constante. Es evidente que no se mantiene constante, el UAV se está desplazando con el motor encendido, así que va consumiendo combustible. Pero durante el tiempo que en el que se analiza el movimiento ante una perturbación se consume una cantidad mínima de combustible, con lo que el cambio de masa también es negligible. Con esto se transforma la ecuación 3 en:

$$m\frac{d\left(\vec{V}_T\right)}{dt} = \sum \Delta\vec{F} \tag{5}$$

- Suposición #2: La aeronave es un cuerpo rígido. Con esta suposición se ignora la flexión de cualquier parte de la aeronave. Permite analizar el aeronave con sólo los 2 movimientos descritos, traslación en los ejes y rotación en torno a ellos.

- Suposición #3: La Tierra es el centro de referencia. Los movimientos de inercia y de translación se hacen con referencia a la Tierra.

Ahora, y con éstas suposiciones se desarrolla la ecuación 5. Con lo que se tiene una derivada de un vector con respecto a otra referencia, la Tierra.

$$\frac{d\left(\vec{V}_T\right)}{dt}\Big|_{Tierra} = I_{V_T}\frac{d\vec{V}_T}{dt}\Big|_{Aeronave} + \vec{\omega}\wedge\vec{V}_T \tag{6}$$

Se analiza la ecuación 6 en 2 pasos. Para la primera parte tenemos:

$$I_{V_T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\vec{V}_T = \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\frac{d\vec{V}_T}{dt}\Big|_{Aeronave} = \begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Con lo que se obtiene:

$$I_{V_T}\frac{d\vec{V}_T}{dt} = \dot{U}\vec{i} + \dot{V}\vec{j} + \dot{W}\vec{k} \tag{10}$$

Hay que aclarar:

- *U es la velocidad lineal en el eje X de la aeronave*
- *V es la velocidad lineal en el eje Y de la aeronave*
- *W es la velocidad lineal en el eje Z de la aeronave*
- $\dot{U}$ *es la aceleración lineal en el eje X de la aeronave*
- $\dot{V}$ *es la aceleración lineal en el eje Y de la aeronave*
- $\dot{W}$ *es la aceleración lineal en el eje Z de la aeronave*

Para la segunda parte de la ecuación 6:

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{V}_T = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P & Q & R \\ U & V & W \end{vmatrix} \tag{12}$$

Desarrollando:

$$\vec{\omega} \wedge \vec{V}_T = \vec{i}\left(QW - RV\right) - \vec{j}\left(PW - RU\right) + \vec{k}\left(PV - QU\right) \tag{13}$$

Hay que aclarar:

- *P es la velocidad angular en el eje X de la aeronave*
- *Q es la velocidad angular en el eje Y de la aeronave*
- *R es la velocidad angular en el eje Z de la aeronave*

Si se vuelven a juntar las ecuaciones 6, 10 y 13 y se obtiene:

$$\frac{d\left(\vec{V}_T\right)}{dt}\Big|_{Tierra} = \dot{U}\vec{i} + \dot{V}\vec{j} + \dot{W}\vec{k} + \vec{i}\left(QW - RV\right) - \vec{j}\left(PW - RU\right) + \vec{k}\left(PV - QU\right) \tag{14}$$

Si se recuerda la ecuación 5 se pueden separar ahora por ejes:

$$\sum \Delta F_X = \left(\dot{U} + QW - RV\right)m \tag{15}$$

$$\sum \Delta F_Y = \left(\dot{V} + RU - PW\right)m \tag{16}$$

$$\sum \Delta F_Z = \left(\dot{W} + PV - QU\right)m \tag{17}$$

Ahora ya se han desarrollado las ecuaciones de fuerzas sobre la aeronave. Ahora se procede a hacer el mismo análisis pero con los momentos, es decir la ecuación 4. Con lo que se obtiene una ecuación similar a la ecuación 6:

$$\frac{d\vec{H}}{dt}\Big|_{Tierra} = I_H \frac{d\vec{H}}{dt}\Big|_{Aeronave} + \vec{\omega} \wedge \vec{H} \tag{18}$$

Igual que antes, se analiza por separado, aunque hay que hacer un pequeño inciso antes de empezar a sustituir:

$$\vec{H} = I\vec{\omega} \tag{19}$$

Donde I es el tensor de inercia:

$$I = \begin{pmatrix} I_X & -I_{XY} & -I_{XZ} \\ -I_{YX} & I_Y & -I_{YZ} \\ -I_{ZX} & -I_{ZY} & I_Z \end{pmatrix} \tag{20}$$

Para proseguir con el análisis hay que hacer otra suposición:

- Suposición #4: Tanto el eje X como el eje Z están dentro del plano de simetría de la aeronave y en el centro de gravedad. Como resultado, los momentos de inercia I_{XY} e I_{YZ} son ambos 0.

Con lo que queda:

$$I = \begin{pmatrix} I_X & 0 & -I_{XZ} \\ 0 & I_Y & 0 \\ -I_{ZX} & 0 & I_Z \end{pmatrix} \tag{21}$$

Se vuelve ahora a la ecuación 18 y se empieza a analizar la primera parte:

Igual que antes:

$$I_H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

Ahora la derivada hay que analizarla paso a paso:

$$\frac{d\vec{H}}{dt}\Big|_{Aeronave} = \vec{\omega}\frac{dI}{dt} + I\frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{23}$$

El tensor de Inercia es una matriz de constantes, por lo que:

$$\vec{H}\frac{dI}{dt} = 0 \tag{24}$$

Se sustituye en la primera parte de la ecuación 18 y se resuelve, recordando la ecuación 21:

$$I_H\frac{d\vec{H}}{dt}\Big|_{Aeronave} = I_H I\frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{25}$$

Donde:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{pmatrix} \tag{26}$$

Juntando las ecuaciones 21 y 26 se obtiene:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \begin{pmatrix} I_X & 0 & -I_{XZ} \\ 0 & I_Y & 0 \\ -I_{ZX} & 0 & I_Z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{P}I_X - \dot{R}I_{XZ} \\ \dot{Q}I_Y \\ -\dot{P}I_{ZX} + \dot{R}I_Z \end{pmatrix} \tag{27}$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación 27 en la ecuación 25:

$$I_H \frac{d\vec{H}}{dt}\Big|_{Aeronave} = I_H I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{P}I_X - \dot{R}I_{XZ} \\ \dot{Q}I_Y \\ -\dot{P}I_{ZX} + \dot{R}I_Z \end{pmatrix} \tag{28}$$

Con lo que se obtiene:

$$I_H \frac{d\vec{H}}{dt}\Big|_{Aeronave} = \vec{i}\left(\dot{P}I_X - \dot{R}I_{XZ}\right) + \vec{j}\left(\dot{Q}I_Y\right) + \vec{k}\left(-\dot{P}I_{ZX} + \dot{R}I_Z\right) \tag{29}$$

Ahora se analiza la segunda parte de la ecuación 18, donde primero hay que encontrar $\vec{H}$. Para obtener la ecuación de $\vec{H}$ se usan las ecuaciones 11, 19 y 21:

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} I_X & 0 & -I_{XZ} \\ 0 & I_Y & 0 \\ -I_{ZX} & 0 & I_Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PI_X - RI_{XZ} \\ QI_Y \\ -PI_{ZX} + RI_Z \end{pmatrix} \tag{30}$$

Con lo que sustituyendo la ecuación 30 en la segunda parte de la ecuación 18 se obtiene algo similar a la ecuación 12:

$$\vec{\omega} \wedge \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P & Q & R \\ \left(PI_X - RI_{XZ}\right) & QI_Y & \left(-PI_{ZX} + RI_Z\right) \end{vmatrix} \tag{31}$$

Resolviendo se tiene:

$$\vec{\omega} \wedge \vec{H} = \vec{i}\left(QR\left(I_Z - I_Y\right) - QPI_{ZX}\right) + \vec{j}\left(PR\left(I_X - I_Z\right) + I_{XZ}\left(P^2 - R^2\right)\right) + \vec{k}\left(PQ\left(I_Y - I_X\right) + QRI_{XZ}\right) \tag{32}$$

Ahora se juntan de nuevo las ecuaciones 18, 29 y 32, y directamente se separa por cada eje de la aeronave, recordando la ecuación 4. Obteniendo finalmente:

$$\sum \Delta L = \dot{P}I_X - \dot{R}I_{XZ} + QR\left(I_Z - I_Y\right) - QPI_{ZX} \tag{33}$$

$$\sum \Delta M = \dot{Q}I_Y + PR\left(I_X - I_Z\right) + I_{XZ}\left(P^2 - R^2\right) \tag{34}$$

$$\sum \Delta N = \dot{R}I_Z - \dot{P}I_{ZX} + PQ\left(I_Y - I_X\right) + QRI_{XZ} \tag{35}$$

Una vez obtenidas las ecuaciones generales del comportamiento del aeronave (15, 16, 17, 33, 34 y 35) es el momento de analizar por separado el comportamiento longitudinal y el laterodireccional.

Pero antes se van a relacionar los ángulos de las aeronaves con sus momentos y sus derivadas, según los ángulos de Euler.

$$\dot{\Phi} = p + q\tan\Theta\sin\Phi + r\tan\Theta\cos\Phi \tag{36}$$

$$\dot{\Theta} = q\cos\Phi - r\sin\Phi \tag{37}$$

$$\dot{\Psi} = r\frac{\cos\Phi}{\cos\Theta} + q\frac{\sin\Phi}{\cos\Theta} \tag{38}$$

3.2.2. Control Longitudinal

Se empieza haciendo una nueva suposición, con el fin de simplificar las ecuaciones:

- Suposición #5: Se analiza el comportamiento de nuestra aeronave cuando está en un vuelo nivelado, sin turbulencias y no acelerado

Además de la suposición #5, como sólo se mira el movimiento longitudinal de la aeronave se puede afirmar:

- Sólo hay movimiento de cabeceo
- Hay variación en las fuerzas en el eje X y en el eje Z, pero no lo hay en el eje Y (implica que V=0)
- No hay ni momento de alabeo ni de guiñada (implica que P=R=0)

Ahora se vuelve a las ecuaciones (15, 16, 17, 33, 34 y 35) y se aplican estas propiedades, simplificándolas:

$$\sum \Delta F_X = m\left(\dot{U} + QW\right) \tag{39}$$

$$\sum \Delta F_Y = 0 \tag{40}$$

$$\sum \Delta F_Z = m\left(\dot{W} - QU\right) \tag{41}$$

$$\sum \Delta L = 0 \tag{42}$$

$$\sum \Delta M = \dot{Q} I_Y \tag{43}$$

$$\sum \Delta N = 0 \tag{44}$$

Con lo cual se ha pasado de un sistema de 6 ecuaciones a uno mucho más simplificado de 3:

$$\sum \Delta F_X = m\left(\dot{U} + QW\right) \tag{45}$$

$$\sum \Delta F_Z = m\left(\dot{W} - QU\right) \tag{46}$$

$$\sum \Delta M = \dot{Q} I_Y \tag{47}$$

Ya tenemos las ecuaciones simplificadas. Estas ecuaciones no son lineales, por tanto no se sabe deducir su comportamiento. Por ello se hará una nueva suposición:

- Suposición #6: La variación de velocidades, lineales y angulares, es muy pequeña, se produce debido a pequeñas perturbaciones que mueven ligeramente a la aeronave de su posición de equilibrio inicial.

Es decir que:

$$U = U_o + u \ ; \ W = W_o + w \ ; \ Q = Q_o + q \tag{48}$$

Siendo:

- *U_o, W_o y Q_o los valores de velocidades y momento de la aeronave en su posición de equilibrio inicial*
- u, w y q *los valores de las pequeñas perturbaciones*

Aplicando la suposición #6 sabemos que al ser las perturbaciones muy pequeñas:

$$u << U_o \ ; \ w << W_o \ ; \ q << Q_o \tag{49}$$

Además como el eje X de la aeronave está alineado con el eje longitudinal se deduce que W_o=0.

Ahora se mira Q. Anteriormente se ha dicho que Q es el momento angular de la aeronave respecto al eje Y. También se ha supuesto que la aeronave empieza estando en equilibrio y con un vuelo nivelado (suposición #5), es decir no hay momento angular, Q_o=0.

Hay que notar que si se aplican las suposiciones anteriores al ángulo $\Theta = \Theta_o + \theta$ y partiendo de un vuelo nivelado, tenemos la relación directa:

$$q = \dot{\theta} \tag{50}$$

Ahora se sustituye lo anterior en las ecuaciones 36, 38 y 40 para obtener su forma linealizada:

$$\sum \Delta F_X = m(\dot{u} + qw) \tag{51}$$

$$\sum \Delta F_Z = m(\dot{w} - (qU_o + qu)) \tag{52}$$

$$\sum \Delta M = \dot{q} I_Y \tag{53}$$

Se pueden simplificar un poco más las ecuaciónes 51 y 52, ya que si se tiene en cuenta la ecuación 49 y que el producto de 2 términos muy pequeños es negligible si suma con el término solo, se ve:

$$qu + qU_o \cong qU_o \ ; \ \dot{u} + qw \cong \dot{u} \tag{54}$$

Por tanto:

$$\sum \Delta F_X = m\dot{u} \tag{55}$$

$$\sum \Delta F_Z = m(\dot{w} - qU_o) \tag{56}$$

Ahora es el momento de mirar qué son estas fuerzas externas que dan como resultado estas ecuaciones. Que afecten al movimiento longitudinal tenemos: Fuerza resultante producida por la gravedad, Fuerza resultante producida por el empuje de la aeronave, Fuerza resultante producida por la sustentación y Fuerza resultante producida por el la resistencia aerodinámica.

Se empezará a evaluar las fuerzas en el eje X y aplicando el mismo procedimiento a las fuerzas del eje Z y luego los momentos en M.

Tal y como se ha definido en la teoría del espacio de estados, se deben analizar las fuerzas que afectan a la aeronave alrededor del punto de equilibrio inicial. Para ello se hace el desarrollo en serie de Taylor quedándose con los primeros componentes. Producirá un error, pero lo suponemos tan pequeño que es compensable por la facilidad de cálculo que se obtiene a cambio, aparte de obtener un sistema de ecuaciones linealizado.

Las variables que afectan a las fuerzas y momentos de la aeronave son $U, W, \dot{W}, \Theta, \dot{\Theta}$ y δ_e, siendo δ_e el ángulo del timón de profundidad, con lo que el desarrollo de Taylor resultante es:

$$\sum \Delta F_X = \frac{\partial F_X}{\partial u} u + \frac{\partial F_X}{\partial w} w + \frac{\partial F_X}{\partial \dot{w}} \dot{w} + \frac{\partial F_X}{\partial \theta} \theta + \frac{\partial F_X}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} + \frac{\partial F_X}{\partial \delta_e} \delta_e \tag{57}$$

Éste es el resultado final de aplicar la suposición de las pequeñas perturbaciones, dado que en el punto de equilibrio los valores iniciales son 0 y sólo quedan las pequeñas perturbaciones antes mencionadas.

Al hacer el mismo desarrollo con el eje Z y el momento M se obtiene:

$$\sum \Delta F_Z = \frac{\partial F_Z}{\partial u} u + \frac{\partial F_Z}{\partial w} w + \frac{\partial F_Z}{\partial \dot{w}} \dot{w} + \frac{\partial F_Z}{\partial \theta} \theta + \frac{\partial F_Z}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} + \frac{\partial F_Z}{\partial \delta_e} \delta_e \tag{58}$$

$$\sum \Delta M = \frac{\partial M}{\partial u} u + \frac{\partial M}{\partial w} w + \frac{\partial M}{\partial \dot{w}} \dot{w} + \frac{\partial M}{\partial \theta} \theta + \frac{\partial M}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} + \frac{\partial M}{\partial \delta_e} \delta_e \tag{59}$$

Se juntan la ecuación 55 con la 57 para obtener:

$$m\dot{u} = \frac{\partial F_X}{\partial u}u + \frac{\partial F_X}{\partial w}w + \frac{\partial F_X}{\partial \dot{w}}\dot{w} + \frac{\partial F_X}{\partial \theta}\theta + \frac{\partial F_X}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} + \frac{\partial F_X}{\partial \delta_e}\delta_e \tag{60}$$

Y haciendo lo correspondiente con las ecuaciones 58 y 59 con las 56 y 53 respectivamente:

$$m(\dot{w} - qU_o) = \frac{\partial F_Z}{\partial u}u + \frac{\partial F_Z}{\partial w}w + \frac{\partial F_Z}{\partial \dot{w}}\dot{w} + \frac{\partial F_Z}{\partial \theta}\theta + \frac{\partial F_Z}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} + \frac{\partial F_Z}{\partial \delta_e}\delta_e \tag{61}$$

$$\dot{q}I_Y = \frac{\partial M}{\partial u}u + \frac{\partial M}{\partial w}w + \frac{\partial M}{\partial \dot{w}}\dot{w} + \frac{\partial M}{\partial \theta}\theta + \frac{\partial M}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} + \frac{\partial M}{\partial \delta_e}\delta_e \tag{62}$$

Se aísla $\dot{u}$, y se van sustituyendo las derivadas parciales por coeficientes adimensionales del UAV.

$$\dot{u} = Cx_u u + Cx_w w + Cx_{\dot{w}}\dot{w} + \frac{1}{m}\frac{\partial F_X}{\partial \theta}\theta + Cx_{\dot{\theta}}\dot{\theta} + Cx_{\delta_e}\delta_e \tag{63}$$

Se aíslan $\dot{w}$ y $\dot{q}$ también, sabiendo que q= $\dot{\theta}$:

$$\dot{w} = Cz_u u + Cz_w w + Cz_{\dot{w}}\dot{w} + Cz_\theta \theta + (U_o + Cz_{\dot{\theta}})\dot{\theta} + Cz_{\delta_e}\delta_e \tag{64}$$

$$\dot{q} = C_{Mu}u + C_{Mw}w + C_{M\dot{w}}\dot{w} + C_{M\theta}\theta + C_{M\dot{\theta}}\dot{\theta} + C_{M\delta_e}\delta_e \tag{65}$$

Ahora se van a analizar cada uno de estos coeficientes. Estos coeficientes sólo son constantes en determinadas condiciones de vuelo, ya que suelen depender del número de Mach. Se considerará que no varían y que son independientes entre sí.

Estos coeficientes se han obtenido del libro 'Flight Mechanics Modeling and Analysis', que está en la bibliografía y en la biblioteca de la escuela.

Antes de seguir, y siguiendo el ejemplo del libro, se van a eliminar aquellos coeficientes que son despreciables. Estos son:

- En el eje X: $Cx_{\dot{w}}$ y $Cx_{\dot{\theta}}$
- En el eje Z: $C_{Z\theta}$
- En los momentos M: $C_{M\theta}$, $C_{M\dot{w}}$

Se eliminan estos coeficientes por los siguientes motivos. La aceleración de la velocidad w produce efecto Downwash en el Drag, suficientemente pequeño como para no tenerlo en cuenta. El régimen de cabeceo añade también un poco de Drag, pero igual que antes también es despreciable. La perturbación del ángulo de cabeceo en el eje Z produce una

pequeña perturbación en la fuerza que nos produce la gravedad, siendo éste tan pequeño que es como si estuviera en equilibrio, así que se puede despreciar. En el caso de los momentos, no hay ninguna fuerza que nos produzca un momento debido al cambio del ángulo de cabeceo o en la aceleración vertical, ya que éste produce cambios en la fuerza de gravedad y se ha asumido que el centro de masas es también el centro aerodinámico.

Se analizarán los coeficientes en grupos, primero los que pertenecen a perturbaciones en la velocidad u, luego los que pertenecen a perturbaciones en la velocidad w, etc.

Cambios con respecto a una perturbación en u

C_{Xu} es el coeficiente que relaciona la resistencia aerodinámica y el empuje del UAV con respecto a los cambios en la velocidad horizontal u.

$$Cx_u = \frac{\rho SU}{2m}\left(2C_{Do} + C_T\right) \tag{66}$$

C_{Zu} es el coeficiente que relaciona la variación de la sustentación con respecto a los cambios en la velocidad horizontal u.

$$Cz_u = -\frac{\rho SU}{m} C_{Lo} \tag{67}$$

C_{Mu} es el coeficiente que da el momento aerodinámico en M con respecto a los cambios en la velocidad horizontal u.

$$C_{Mu} = \frac{\rho SU\overline{c}}{I_y} C_{mo} \tag{68}$$

Cambios con respecto a una perturbación en w

C_{Xw} es el coeficiente que relaciona la resistencia aerodinámica y el empuje del UAV con respecto a los cambios en la velocidad vertical w en el eje X.

$$Cx_w = \frac{\rho SU}{2m}\left(C_{Lo} - \frac{2C_{Lo}}{\pi e}\right) \tag{69}$$

C_{Zw} es el coeficiente que relaciona la resistencia aerodinámica y el empuje del UAV con respecto a los cambios en la velocidad vertical w en el eje Z.

$$Cz_w = -\frac{\rho SU}{2m}\left(C_{L\alpha} + C_{Do}\right) \tag{70}$$

C_{Mw} es el coeficiente que tiene que ver con la estabilidad longitudinal de la aeronave. Relaciona los cambios en la resistencia aerodinámica y la sustentación mediante el momento que se crea cuando hay pequeños cambios en la velocidad vertical w.

$$C_{Mw} = \frac{\rho S U \overline{c}}{2 I_y} C_{m\alpha} \tag{71}$$

Cambios con respecto a una perturbación en q (o $\dot{\theta}$)

$Cz_{\dot{\theta}} = Cz_q$ es el coeficiente que relaciona los cambios en la sustentación producidos por cambios en el régimen de cabeceo.

$$Cz_q = -\frac{\rho S U \overline{c}}{4m} C_{Lq} \tag{72}$$

$C_{M\dot{\theta}} = C_{Mq}$ es el coeficiente que, por definición, relaciona los cambios en el momento de cabeceo producidos por cambios en el régimen de cabeceo.

$$C_{Mq} = \frac{\rho S U \overline{c}^2}{4 I_y} C_{mq} \tag{73}$$

Cambios producidos por una cambio en el timón de profundidad δ_e

$Cx_{\delta e}$ es el coeficiente que relaciona los cambios en la resistencia aerodinámica producidos por cambios en el timón de profundidad.

$$Cx_{\delta e} = -\frac{\rho S U^2}{2m} C_{D\delta e} \tag{74}$$

$Cz_{\delta e}$ es el coeficiente que relaciona los cambios en la sustentación producidos por cambios en el timón de profundidad.

$$Cx_{\delta e} = -\frac{\rho S U^2 \overline{c}}{2m} C_{D\delta e} \tag{75}$$

$C_{M\delta e}$ es el coeficiente que relaciona los cambios en el momento de cabeceo producidos por cambios en el timón de profundidad.

$$C_{M\dot{\alpha}} = \frac{\rho S U^2 \bar{c}}{2I_y} C_{m\dot{\alpha}} \tag{76}$$

Cambios producidos por una cambio en la aceleración en el eje Z, o $\dot{w}$

$Cz_{\dot{w}}$ es el coeficiente que relaciona los cambios en la sustentación, producidos por el downwash en cola, por perturbaciones en la aceleración $\dot{w}$.

$$Cz_{\dot{w}} = -\frac{\rho S \bar{c}}{4m} C_{L\dot{\alpha}} \tag{77}$$

$C_{M\dot{w}}$ es el coeficiente que relaciona los cambios en la sustentación, producidos por el downwash en cola, por perturbaciones en la aceleración $\dot{w}$.

$$C_{M\dot{w}} = -\frac{\rho U S \bar{c}^2}{4I_y} C_{m\alpha} \tag{78}$$

Cambios producidos por una perturbación en el ángulo de cabeceo θ

El cambio producido por el ángulo de cabeceo se ha dejado sin coeficiente porque tiene relación directa con la gravedad y no con ningún coeficiente que caracterice el UAV.

Se puede establecer que la fuerza que ejerce la gravedad es:

$$\frac{1}{m}\frac{\partial F_X}{\partial \theta} = \frac{1}{m}\frac{\partial(-mg\sin(\Theta))}{\partial \theta} = -g\frac{\partial \sin(\Theta_o + \theta)}{\partial \theta} \tag{79}$$

Como en condiciones iniciales el UAV volará en vuelo recto y nivelado, Θ_o=0. Además, como la perturbación es muy pequeña, se puede aproximar el seno al ángulo, con lo que se obtiene finalmente:

$$\frac{1}{m}\frac{\partial F_X}{\partial \theta}\theta = -g\frac{\partial \theta}{\partial \theta}\theta = -g\theta \tag{80}$$

Donde se ve que, más que un coeficiente, es la gravedad lo que afecta a la velocidad horizontal cuando el ángulo de cabeceo se ve perturbado.

Modelo en espacio de estados

Para tener las matrices del espacio de estados primero hay que arreglar la ecuación del eje Z, para aislar la aceleración, y luego sustituir ésta ecuación en la ecuación 58, para así quedarse con una aceleración por ecuación:

$$\dot{u} = Cx_u u + Cx_w w + Cx_q q - g\theta + Cx_{\delta e}\delta_e \tag{81}$$

$$\dot{w} = \frac{1}{1 - Cz_{\dot{w}}}\left[Cz_u u + Cz_w w + Cz_\theta \theta + \left(U_o + Cz_q\right)\dot{\theta} + Cz_{\delta e}\delta_e\right] \tag{82}$$

$$\dot{q} = \left(C_{Mu} + \frac{C_{M\dot{w}} Cz_u}{1 - Cz_{\dot{w}}}\right)u + \left(C_{Mw} + \frac{C_{M\dot{w}} Cz_w}{1 - Cz_{\dot{w}}}\right)w + \left(C_{Mq} + \frac{C_{M\dot{w}} Cz_q}{1 - Cz_{\dot{w}}}\right)q + \left(C_{M\delta e} + \frac{C_{M\dot{w}} Cz_{\delta e}}{1 - Cz_{\dot{w}}}\right)\delta_e \tag{83}$$

Ahora ya se tiene el sistema de ecuaciones que se buscaba, el cual se puede pasar a un sistema de espacio de estados. Para que sea más sencillo, se hace un pequeño cambio de variables:

$$\dot{u} = Cx_u u + Cx_w w + Cx_q q - g\theta + Cx_{\delta e}\delta_e \tag{84}$$

$$\dot{w} = Z_u u + Z_w w + Z_q q + Z_{\delta e}\delta e \tag{85}$$

$$\dot{q} = M_u u + M_w w + M_q q + M_{\delta e}\delta_e \tag{86}$$

Además hace falta una cuarta ecuación, para la variable de estado que será el ángulo de cabeceo. Esta ecuación se ha obtenido al mirar los ángulos de Euler, la ecuación 50. Con lo que las variables de estado serán: u, w, q y θ.

Falta definir cual será la salida del sistema. Las variables que definen el comportamiento longitudinal son u, α, $\dot{\theta}$ y θ. La única que no está calculada es α, pero como se puede ver en la siguiente figura su cálculo es directo y no es más que dividir w entre U, aproximando a ángulos pequeños.

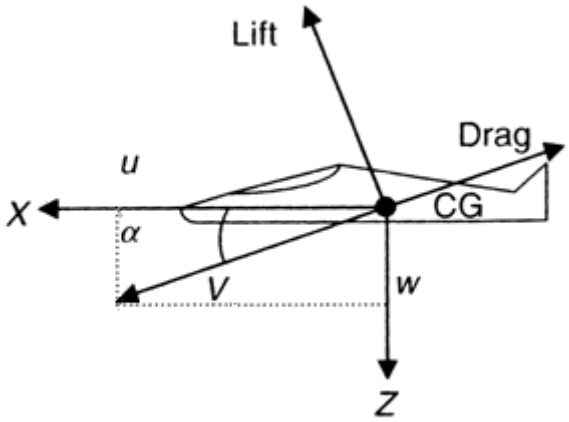

Figura 54 – Ángulo α [2]

En este sistema no hay matriz de transmisión directa, con lo que se tiene todo lo que hacía falta:

$$A=\begin{bmatrix} Cx_u & Cx_w & Cx_q & -g \\ Z_u & Z_w & Z_q & 0 \\ M_u & M_w & M_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix} Cx_{\delta e} \\ Z_{\delta e} \\ M_{\delta e} \\ 0 \end{bmatrix};\ D=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.2.3. Control Laterodireccional

Como en el estudio del comportamiento longitudinal, se aplica la suposición #5. Además de la suposición #5, como sólo se analizará el movimiento lateral de la aeronave se puede afirmar:

- No hay movimiento de cabeceo (implica que Q=0)
- En el movimiento lateral no se producen fuerzas resultantes ni en el eje X ni en el eje Z.
- Sólo hay momentos de alabeo y guiñada.

Ahora se pueden simplificar las ecuaciones:

$$\sum \Delta F_X = 0 \tag{87}$$

$$\sum \Delta F_Y = \left(\dot{V} + RU - PW\right)m \tag{88}$$

$$\sum \Delta F_Z = 0 \tag{89}$$

$$\sum \Delta L = \dot{P}I_X - \dot{R}I_{XZ} \tag{90}$$

$$\sum \Delta M = 0 \tag{91}$$

$$\sum \Delta N = \dot{R}I_Z - \dot{P}I_{ZX} \tag{92}$$

Ahora se aplica la suposición #6, que dice:

$$U = U_o + u \;;\; V = V_o + v \;;\; W = W_o + w \;;\; P = P_o + p \;;\; R = R_o + r \tag{93}$$

Siendo:

- *U_o, V_o, W_o, P_o y R_o los valores de velocidades y momentos de la aeronave en su posición de equilibrio inicial*
- u, v, w, p y r *los valores de las pequeñas perturbaciones*

Para acabar de simplificar las ecuaciones se debe aclarar:

- Se parte de una posición inicial de equilibrio $P_o = R_o = 0$
- El vuelo es nivelado y el movimiento longitudinal y lateral están desacoplados W = 0
- Se deduce que $\dot{V} = \dot{v}$, $\dot{P} = \dot{p}$, $R = r$ y $\dot{R} = \dot{r}$

Si se aplica a las ecuaciones anteriores se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum \Delta F_Y = (\dot{v} + rU_o + ru)m \tag{94}$$

$$\sum \Delta L = \dot{p}I_X - \dot{r}I_{XZ} \tag{95}$$

$$\sum \Delta N = \dot{r}I_Z - \dot{p}I_{ZX} \tag{96}$$

Se puede simplificar un poco más la ecuación 94 ya que el producto de 2 términos muy pequeños es negligible si suma con el término solo:

$$\sum \Delta F_Y = (\dot{v} + rU_o)m \tag{97}$$

Igual que se ha hecho con el análisis del movimiento longitudinal, ahora es el momento de linealizar las ecuaciones para obtener qué fuerzas son las que se producen al existir perturbaciones.

Como se ha explicado antes, se pondrá directamente el sistema de ecuaciones resultante al aplicar el desarrollo en serie de Taylor. En este caso las variables que afectan a las fuerzas y momentos son $V, P, \Phi, R, \delta_a y \delta_r$, siendo δ_a y δ_r los ángulos de los alerones y del timón de dirección, respectivamente.

$$\sum \Delta F_Y = \frac{\partial F_Y}{\partial v} v + \frac{\partial F_Y}{\partial p} p + \frac{\partial F_Y}{\partial \Phi} \Phi + \frac{\partial F_Y}{\partial r} r + \frac{\partial F_Y}{\partial \delta_a} \delta_a + \frac{\partial F_Y}{\partial \delta_r} \delta_r \tag{98}$$

$$\sum \Delta L = \frac{\partial L}{\partial v} v + \frac{\partial L}{\partial p} p + \frac{\partial L}{\partial \Phi} \Phi + \frac{\partial L}{\partial r} r + \frac{\partial L}{\partial \delta_a} \delta_a + \frac{\partial L}{\partial \delta_r} \delta_r \tag{99}$$

$$\sum \Delta N = \frac{\partial N}{\partial v} v + \frac{\partial N}{\partial p} p + \frac{\partial N}{\partial \Phi} \Phi + \frac{\partial N}{\partial r} r + \frac{\partial N}{\partial \delta_a} \delta_a + \frac{\partial N}{\partial \delta_r} \delta_r \tag{100}$$

Ahora se juntan estas ecuaciones con las ecuaciones 95, 96 y 97:

$$(\dot{v} + rU_o)m = \frac{\partial F_Y}{\partial v} v + \frac{\partial F_Y}{\partial p} p + \frac{\partial F_Y}{\partial \Phi} \Phi + \frac{\partial F_Y}{\partial r} r + \frac{\partial F_Y}{\partial \delta_a} \delta_a + \frac{\partial F_Y}{\partial \delta_r} \delta_r \tag{101}$$

$$\dot{p}I_X - \dot{r}I_{XZ} = \frac{\partial L}{\partial v} v + \frac{\partial L}{\partial p} p + \frac{\partial L}{\partial \Phi} \Phi + \frac{\partial L}{\partial r} r + \frac{\partial L}{\partial \delta_a} \delta_a + \frac{\partial L}{\partial \delta_r} \delta_r \tag{102}$$

$$\dot{r}I_Z - \dot{p}I_{ZX} = \frac{\partial N}{\partial v} v + \frac{\partial N}{\partial p} p + \frac{\partial N}{\partial \Phi} \Phi + \frac{\partial N}{\partial r} r + \frac{\partial N}{\partial \delta_a} \delta_a + \frac{\partial N}{\partial \delta_r} \delta_r \tag{103}$$

Como antes, se deja la derivada en un lado de la igualdad i los demás términos en el otro, sustituyendo las derivadas parciales por coeficientes adimensionales. En este caso se dejará la variable $\dot{p}$ de la ecuación 102 y la variable $\dot{r}$ de la ecuación 103.

$$\dot{v} = Cy_v v + Cy_p p + (Cy_r - U_o) r + \frac{1}{m}\frac{\partial F_Y}{\partial \Phi}\Phi + Y_{\delta a}\delta_a + Y_{\delta r}\delta_r \tag{104}$$

$$\dot{p} = C_{Lv} v + C_{Lp} p + C_{Lr} r + C_{L\Phi}\Phi + C_{L\delta a}\delta_a + C_{L\delta r}\delta_r + \frac{I_{XZ}}{I_X}\dot{r} \tag{105}$$

$$\dot{r} = C_{Nv} v + C_{Np} p + C_{Nr} r + C_{N\Phi}\Phi + C_{N\delta a}\delta_a + C_{N\delta r}\delta_r + \frac{I_{ZX}}{I_Z}\dot{p} \tag{106}$$

Se van a analizar cada uno de estos coeficientes. Como antes, primero se van a eliminar aquellos coeficientes que son despreciables:

- En el eje Y: Cy_p, Cy_r
- En los momentos L: $C_{L\Phi}$
- En los momentos N: $C_{N\Phi}$

Se eliminan los coeficientes de p y r en el eje Y porque representan una pequeña perturbación provocada por la cola vertical del UAV, demasiado pequeña, con lo que es despreciable. Los coeficientes de los momentos L y N se desprecian por el mismo motivo que los de θ en el movimiento longitudinal. Son momentos producidos por la fuerza de la gravedad, con lo que valen 0 por las suposiciones con las que se está calculando el modelo.

Ahora se van a analizar los coeficientes, en grupos de nuevo.

Cambios con respecto a una perturbación en la velocidad horizontal v

Cy_v es el coeficiente que relaciona la resistencia a moverse en horizontal del UAV, producida en mayor parte por la cola vertical y en menor medida por el fuselaje.

$$Cy_v = \frac{\rho S U}{2m} C_{y\beta} \tag{107}$$

C_{Lv} es el coeficiente que relaciona la resistencia a rotar en torno al eje X del UAV, producida por el diedro del UAV y de la cola vertical.

$$C_{Lv} = \frac{\rho S U b}{2 I_X} C_{l\beta} \tag{108}$$

C_{Nv} es el coeficiente que relaciona la resistencia a rotar en torno al eje Z del UAV.

$$C_{Nv} = \frac{\rho S U^2 b}{2 I_Z} C_{n\beta} \tag{109}$$

Cambios con respecto a una perturbación en el régimen de balanceo p

C_{Lp} es el coeficiente que relaciona la resistencia a rotar en torno al eje X del UAV, producida por las alas.

$$C_{Lp} = \frac{\rho SUb^2}{4I_X} C_{lp} \tag{110}$$

C_{Np} es el coeficiente que relaciona la resistencia a rotar en torno al eje Z del UAV, producida por las alas.

$$C_{Np} = \frac{\rho SUb^2}{4I_Z} C_{np} \tag{111}$$

Cambios con respecto a una perturbación en el régimen de guiñada r

C_{Lr} es el coeficiente que relaciona el momento de balanceo producido por la sustentación al haber una perturbación en el régimen de guiñada.

$$C_{Lr} = \frac{\rho SUb^2}{4I_X} C_{lr} \tag{112}$$

C_{Nr} es el coeficiente que da el momento de guiñada producido al haber una perturbación en el régimen de guiñada.

$$C_{Nr} = \frac{\rho SUb^2}{4I_Z} C_{nr} \tag{113}$$

Cambios con respecto a un cambio en los alerones δ_a

$Y_{\delta a}$ es el coeficiente que da la velocidad lateral al haber un cambio en la posición de los alerones.

$$Y_{\delta a} = \frac{\rho SU^2}{2m} Cy_{\delta a} \tag{114}$$

$C_{L\delta a}$ es el coeficiente que da el balanceo al haber un cambio en la posición de los alerones.

$$C_{L\delta a} = \frac{\rho S U^2 b}{2 I_X} C_{l\delta a} \tag{115}$$

$C_{N\delta a}$ es el coeficiente que da la guiñada al haber un cambio en la posición de los alerones.

$$C_{N\delta a} = \frac{\rho S U^2 b}{2 I_Z} C_{n\delta a} \tag{116}$$

Cambios con respecto a un cambio en el timón de dirección δ_r

$Y_{\delta r}$ es el coeficiente que da la velocidad lateral al haber un cambio en la posición del timón de dirección.

$$Y_{\delta r} = \frac{\rho S U^2}{2m} Cy_{\delta r} \tag{117}$$

$C_{L\delta r}$ es el coeficiente que da el balanceo al haber un cambio en la posición del timón de dirección.

$$C_{L\delta r} = \frac{\rho S U^2 b}{2 I_X} C_{l\delta r} \tag{118}$$

$C_{N\delta r}$ es el coeficiente que da la guiñada al haber un cambio en la posición del timón de dirección.

$$C_{N\delta r} = \frac{\rho S U^2 b}{2 I_Z} C_{n\delta r} \tag{119}$$

Cambios producidos por una perturbación en el ángulo de balanceo Φ

El cambio producido por el ángulo de balanceo se ha dejado sin coeficiente porque tiene relación directa con la gravedad y no con ningún coeficiente que caracterice el UAV.

Se puede establecer que la fuerza que ejerce la gravedad es:

$$\frac{1}{m}\frac{\partial F_Y}{\partial \Phi} = \frac{1}{m}\frac{\partial (mg\sin(\Phi))}{\partial \Phi} = g\frac{\partial \sin(\Phi_o + \Phi)}{\partial \Phi} \tag{120}$$

Como en condiciones iniciales el UAV volará en vuelo recto y nivelado, Φ_o=0. Además, como la perturbación es muy pequeña, se puede aproximar el seno al ángulo, con lo que se obtiene finalmente:

$$\frac{1}{m}\frac{\partial F_Y}{\partial \Phi}\Phi = g\frac{\partial \Phi}{\partial \Phi}\Phi = g\Phi \tag{121}$$

Donde se vuelve a ver que más que un coeficiente lo que tenemos es la gravedad.

Modelo en espacio de estados

Arreglar las ecuaciones es un poco más complicado en este caso, ya que las variables $\dot{p}$ y $\dot{r}$ están mezcladas en las 2 ecuaciones 95 y 96.

Sustituyendo una ecuación en otra y viceversa queda el sistema de ecuaciones:

$$\dot{v} = Cy_v v - U_o r + g\Phi + Y_{\delta a}\delta_a + Y_{\delta r}\delta_r \tag{122}$$

$$\dot{p} = \frac{I_X I_Z}{I_X I_Z - (I_{XZ})^2}\left[\left(C_{Lv} + \frac{I_{XZ}}{I_X}C_{Nv}\right)v + \left(C_{Lp} + \frac{I_{XZ}}{I_X}C_{Np}\right)p + \left(C_{Lr} + \frac{I_{XZ}}{I_X}C_{Nr}\right)r + \right.$$
$$\left. + \left(C_{L\delta a} + \frac{I_{XZ}}{I_X}C_{N\delta a}\right)\delta_a + \left(C_{L\delta r} + \frac{I_{XZ}}{I_X}C_{N\delta r}\right)\delta_r\right] \tag{123}$$

$$\dot{r} = \frac{I_X I_Z}{I_X I_Z - (I_{XZ})^2}\left[\left(C_{Nv} + \frac{I_{XZ}}{I_Z}C_{Lv}\right)v + \left(C_{Np} + \frac{I_{XZ}}{I_Z}C_{Lp}\right)p + \left(C_{Nr} + \frac{I_{XZ}}{I_Z}C_{Lr}\right)r + \right.$$
$$\left. + \left(C_{N\delta a} + \frac{I_{XZ}}{I_Z}C_{L\delta a}\right)\delta_a + \left(C_{N\delta r} + \frac{I_{XZ}}{I_Z}C_{L\delta r}\right)\delta_r\right] \tag{124}$$

Ahora que se tiene el sistema de ecuaciones adecuado para sacar las matrices del sistema de estado se hará un cambio de variables:

$$\dot{v} = Cy_v v - U_o r + g\Phi + Y_{\delta a}\delta_a + Y_{\delta r}\delta_r \tag{125}$$
$$\dot{p} = L_v v + L_p p + L_r r + L_{\delta a}\delta_a + L_{\delta r}\delta_r \tag{126}$$
$$\dot{r} = N_v v + N_p p + N_r r + N_{\delta a}\delta_a + N_{\delta r}\delta_r \tag{127}$$

Además, como cuarta ecuación se tiene la relación entre p y Φ, dado que si se coge la ecuación 36, que relaciona los ángulos de Euler y sus regímenes, y se aplican las suposiciones anteriores, Θ=0 por no haber movimiento longitudinal, se obtiene:

$$\dot{\Phi} = p \tag{128}$$

Las variables que definen el comportamiento laterodireccional son β, p, r y Φ. La única que hay que operar es β, aunque su cálculo es directo β=v/U si se hace la aproximación a ángulos pequeños (tanβ = β).

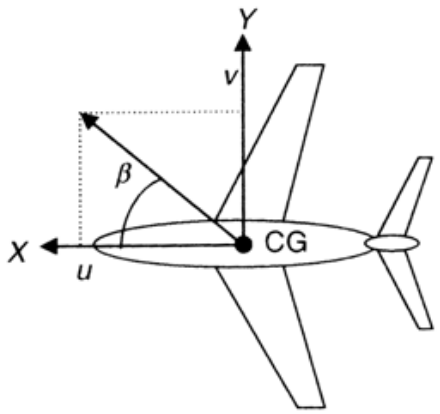

Figura 55 – Ángulo β [2]

En el sistema de espacio de estados que define el movimiento laterodireccional tampoco hay matriz de transmisión directa, con lo que ya se pueden obtener las matrices:

$$A=\begin{bmatrix} Cy_v & 0 & U_o & g \\ L_v & L_p & L_r & 0 \\ N_v & N_p & N_r & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix} U^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix} Y_{\delta a} & Y_{\delta r} \\ L_{\delta a} & L_{\delta r} \\ N_{\delta a} & N_{\delta r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ D=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.3. UAV

Este proyecto se centra en modelizar y diseñar una ley de control para el UAV del departamento de Aerotécnia de la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Aeronáutica.

Figura 56 – UAV del departamento de Aerotecnia de la EUITA

Los coeficientes que caracterizan este UAV son:

- En general, los datos que caracterizan el UAV y hacen falta tanto para el control longitudinal como para el control laterodireccional.

- Superficie alar S = 0.55
- Cuerda media aerodinámica $\bar{c} = 0.189941$
- Envergadura b=2.8956
- Factor de Oswald e=0.75
- Inercias: $I_X = 0.8244$, $I_Y = 1.135$, $I_Z = 1.759$, $I_{XZ} = I_{ZX} = 0.1204$

- Coeficientes para el movimiento Longitudinal:

Respecto a:	Coef. Sustentación	Coef. Resistencia & Empuje	Coef. Cabeceo

U	C_{Lo}=0.23	$C_{Do} = 0.0434$ & $C_T = -0.04$	$C_{mo} = 0.135$
α	$C_{L\alpha} = 5.6106$	-	$C_{m\alpha} = -2.7397$
$\dot{\theta}$	$C_{L\dot{\theta}} = 7.9543$	-	$C_{m\dot{\theta}} = -38.2067$
$\dot{\alpha}$	$C_{L\dot{\alpha}} = 1.9724$	-	$C_{m\dot{\alpha}} = -10.3796$
δ_e	$C_{L\delta e} = 0.13$	$C_{D\delta e} = 0.13$	$C_{m\delta e} = -0.9918$

- Coeficientes para el movimiento Laterodireccional:

Respecto a:	Coef. Balanceo	Coef. Fuerzas laterales	Coef. Guiñada
β	$C_{l\beta} = -0.13$	$C_{Y\beta} = -0.83$	$C_{n\beta} = 0.0726$
p	$C_{lp} = -0.5051$	-	$C_{np} = -0.069$
r	$C_{lr} = 0.2519$	-	$C_{nr} = 0.0946$
δ_a	$C_{l\delta a} = -0.1695$	$C_{Y\delta a} = -0.075$	$C_{n\delta a} = 0.0108$
δ_r	$C_{l\delta r} = 0.0024$	$C_{Y\delta r} = 0.1914$	$C_{n\delta r} = -0.0693$

Finalmente, las condiciones de vuelo en las que se estudiará el modelo de este UAV son:

- Altitud de 2000 metros
- Gravedad de 9.8 m/s^2
- Masa constante con el combustible lleno
- Densidad según la atmósfera estándar
- Velocidad de crucero de 100km/h.

Una vez se tienen los valores de los coeficientes y de las condiciones de vuelo, es momento de operar y obtener las matrices del sistema.

Modelo Longitudinal

$$A=\begin{bmatrix}-0.07222 & 0.0198 & 0 & -9.8\\ -0.261 & -3.208 & 27.24 & 0\\ 0.4348 & -2.451 & -13.79 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.036 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}-0.2136\\ -2.049\\ -34.76\\ 0\end{bmatrix};$$

$$D=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Modelo Laterodireccional

$$A=\begin{bmatrix}-0.4727 & 0 & -27.78 & 9.8\\ -3.411 & -20.13 & 9.693 & 0\\ 0.6854 & -2.643 & -1.07 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix};C=\begin{bmatrix}0.036 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix};$$

$$B=\begin{bmatrix}-1.187 & 3.028\\ -127.9 & -1.776\\ -4.956 & -24.49\\ 0 & 0\end{bmatrix};\ D=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

4. Modelo Simulink

En este proyecto se usará el programa Simulink. Este programa nos da mucha versatilidad a la hora de probar un controlador, además de ser muy visual. Para cambiar el controlador sólo habrá que cambiar el valor de una matriz y darle al botón de simular.

Es muy útil sobretodo por lo rápido que se puede cambiar el controlador y probarlo, sin tener que escribir operaciones, que es como lo haríamos con Matlab u otro programa.

Para recrear el espacio de estados se puede utilizar el bloque 'State-Space' de la librería 'Continuous', en el que ya viene definido el espacio de estados y sólo hay que darle valores a las matrices A, B, C y D.

En este proyecto no se usará el bloque State-space de Simulink, ya que éste no permite realimentar los estados. Se recreará el modelo de espacio de estados tal y como viene definido en la figura 50.

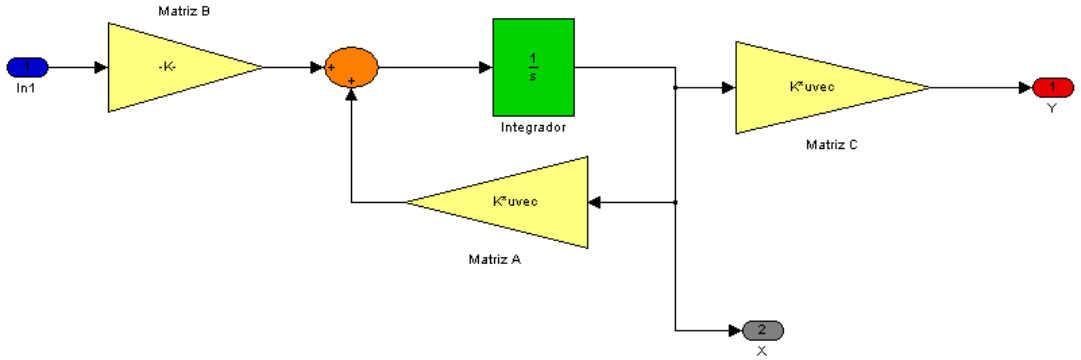

Figura 57 – Diagrama de bloques del Espacio de Estados

En la figura 57 se puede ver el modelo de espacio de estados ya hecho. La matriz de transmisión directa no se ha incluido ya que en ambos casos es nula.

La entrada al sistema es el pin de color azul. De una o dos variables, que se ha definido hasta ahora como señal de entrada 'U'.

La salida del sistema es el pin de color rojo y es un vector de 4 variables. Que hasta ahora se ha definido como señal de salida 'Y'.

Las variables de estado se obtienen fuera del subsistema por el pin de color gris. Que hasta ahora se ha definido como estado 'X'.

De este modelo se hará un subsistema, para usar un solo bloque. Este subsistema es válido tanto para el modelo longitudinal como el modelo laterodireccional.

4.1. Lazo abierto

Primero se hace el diagrama de bloques para analizar el sistema en lazo abierto.

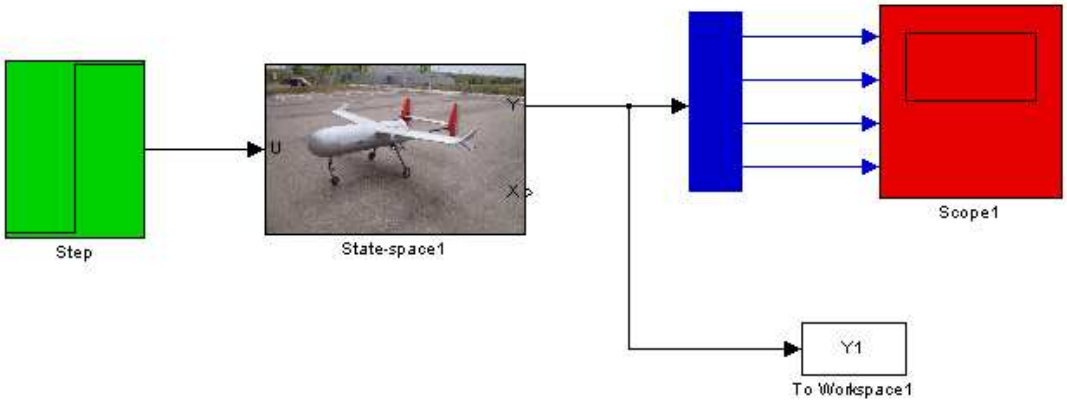

Figura 58 – Diagrama de bloques control longitudinal en Simulink en Lazo Abierto

En esta figura se puede ver la representación en lazo abierto del control longitudinal. Una entrada escalón y un vector de 4 salidas. Se ha dispuesto un bloque scope para ver la señal directamente y un bloque que exporta los valores de la salida a una variable tipo 'struct' en Matlab.

Figura 59 – Diagrama de bloques control laterodireccional en Simulink en Lazo Abierto

Igual que en la figura anterior, esta es la representación en lazo abierto del control laterodireccional. En este caso como hay dos entradas hay que adecuarlas a la entrada del bloque espacio de estados diseñado, pasándolas a un vector de dos variables.

4.2. Lazo Cerrado

Para analizar el sistema en lazo cerrado se usará un sumador y una matriz de control llamada 'Controlador K'. Además, se usará otra matriz en el escalón para controlar la salida de las variables de estado.

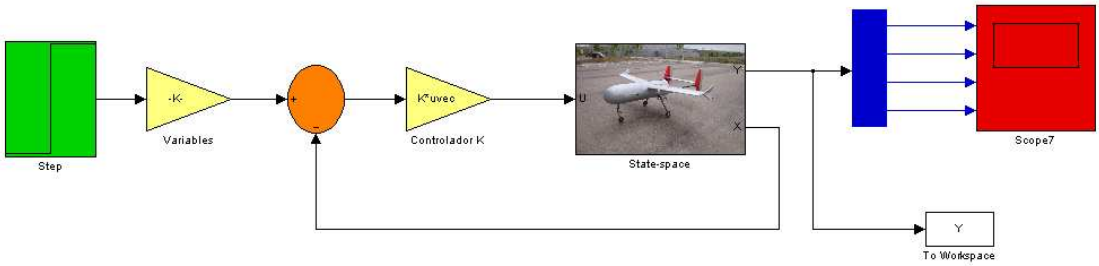

Figura 60 – Diagrama de bloques del control longitudinal en lazo cerrado

En esta figura se ve el diagrama de bloques resultante en lazo cerrado para el controlador longitudinal.

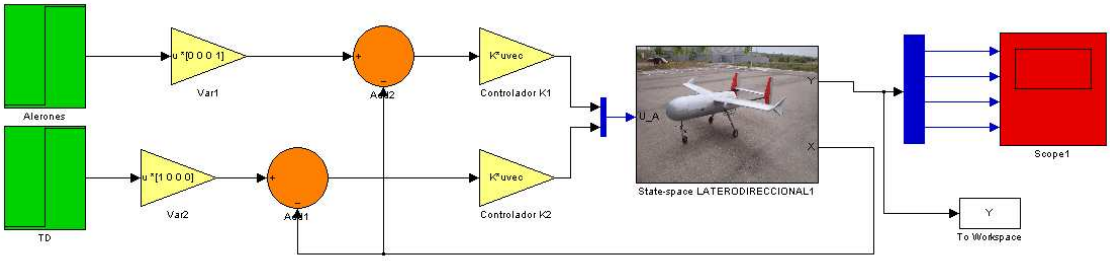

Figura 61 – Diagrama de bloques del control laterodireccional en Lazo Cerrado

En esta figura vemos el diagrama de bloques resultante en lazo cerrado para el controlador longitudinal.

La primera matriz, ya mencionada, permite seleccionar qué variable de estado se quiere controlar, es decir, a qué variable se le da prioridad a la hora de enviar la señal de referencia.

5. Análisis Aeronave

Una vez calculados los modelos matemáticos y introducidos en Simulink es momento de analizar la aeronave. Se hará en dos partes, primero la parte correspondiente al control longitudinal y luego la parte correspondiente al control laterodireccional.

5.1. Control Longitudinal

En el modo longitudinal, hay que diseñar un controlador que satisfaga los 2 problemas que pueden producir la respuesta del UAV. Estos dos problemas son:

- Oscilación de periodo corto
- Oscilación fugoide

Periodo corto

Cuando la respuesta del sistema tiene componentes de alta frecuencia y de rápida respuesta, es decir gran ω y parte real grande, se habla del período corto. La respuesta de la aeronave es muy estable, con lo que inmediatamente después de una perturbación su tendencia será retomar la posición de equilibrio.

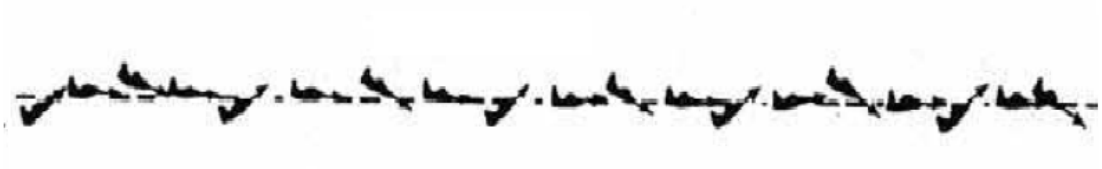

Figura 62 – Comportamiento de la aeronave con modo de oscilación de periodo corto

Puede ser tan rápido que llegue a ser inadmisible como respuesta del sistema. Una oscilación tan rápida puede provocar que la aeronave llegue a entrar en pérdida o incluso producir daños estructurales.

El piloto puede intentar corregir el movimiento de la aeronave y empeorar la respuesta de ésta, volviéndola incontrolable.

Para que el UAV no sufra daños estructurales, se tiene que diseñar una ley de control de modo que no adquiera valores muy grandes al oscilar tan rápido, además, aumentar el factor de amortiguamiento si es demasiado bajo.

Las variables de estado que definen este comportamiento son el ángulo de ataque o el ángulo de cabeceo y el régimen de cabeceo. En este tipo de movimiento el UAV irá prácticamente en vuelo recto, con lo que el comportamiento de la velocidad horizontal no afecta y el ángulo de ataque tiene el mismo valor que el ángulo de cabeceo.

Matemáticamente se identifican los polos que producen el modo de periodo corto como aquellos que están alejados del origen.

Oscilación fugoide

El comportamiento del sistema también puede tener un componente muy lento que permanezca después del periodo de oscilación corto, si lo hay. La respuesta de la aeronave es estable, pero es lenta y con una frecuencia muy baja.

Figura 63 – Comportamiento de la aeronave con modo de oscilación fugoide

Este comportamiento del sistema afecta menos a la aeronave, ya puede ser fácilmente corregido por el piloto. Se caracteriza por tener una baja frecuencia y un factor de amortiguamiento bajo.

Las variables de estado que nos indican el modo de oscilación fugoide son la velocidad U y el ángulo de cabeceo, ya que este tipo de oscilación comporta cambios de altura, de velocidad y de ángulo de cabeceo.

El ángulo de ataque es prácticamente constante. La velocidad U va oscilando, como en un movimiento harmónico cualquiera, en el pico superior es mínima y en el pico inferior es máxima. El ángulo de cabeceo oscila al revés que la velocidad, máximo en los picos superiores y mínimos en los picos inferiores.

Para mejorar el comportamiento de la aeronave respecto a este tipo de oscilación se debe aumentar el factor de amortiguamiento para reducir al máximo las oscilaciones. Y si es necesario disminuir un poco la frecuencia.

Matemáticamente identificamos los polos que caracterizan este tipo de comportamiento como los que están más cerca del origen. Los que tienen una frecuencia baja.

5.1.1. Análisis del control longitudinal en Lazo Abierto

Ya se ha definido el modelo matemático del espacio de estados correspondiente al movimiento longitudinal.

Para mirar la respuesta del sistema se simulará usando Simulink. Con una entrada de tipo escalón:

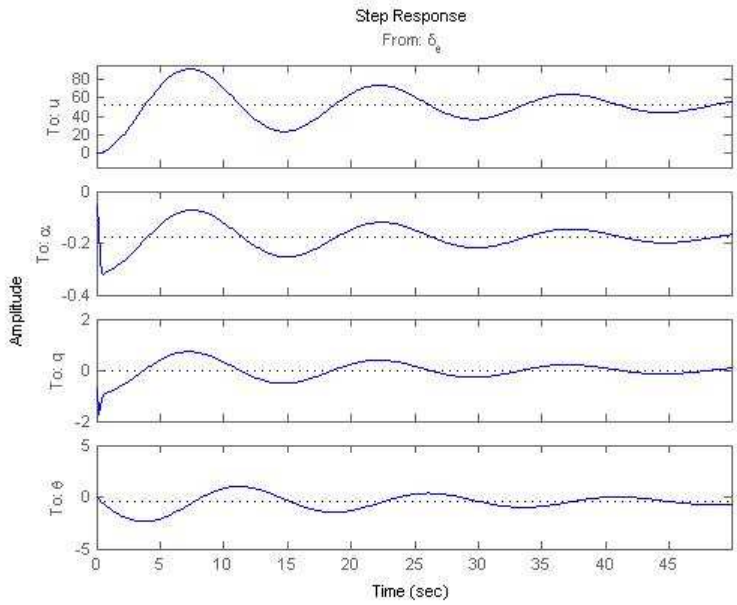

Figura 64 – Respuesta al escalón del sistema UAV

Tiene un tipo de respuesta con una oscilación lenta y poco amortiguada, en el segundo 50 aún sigue oscilando, con lo que hay una oscilación fugoide que hay que corregir.

Se hace un zoom al inicio de las respuestas, los primeros 5 segundos, para ver si también existe oscilación de periodo corto.

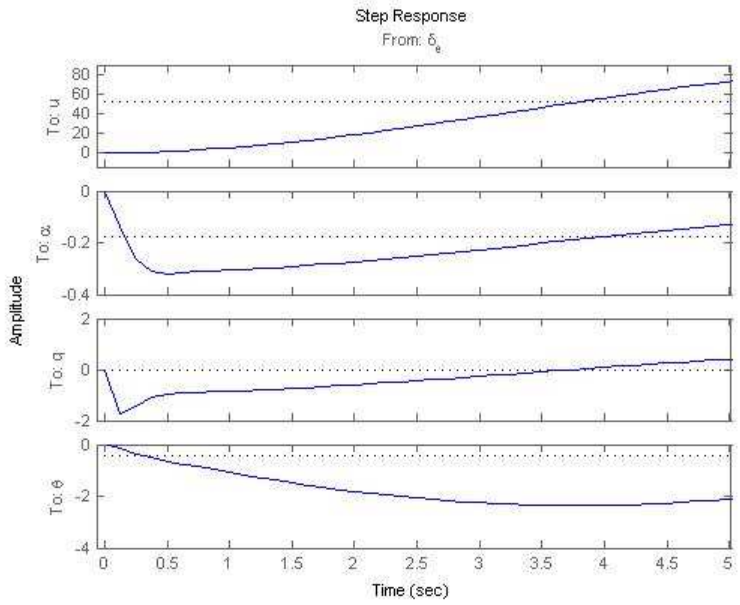

Figura 65 – Respuesta inicial del sistema con una entrada de tipo escalón

Se puede ver que hay un saltito brusco en el ángulo de ataque y en el régimen de cabeceo. Con lo que se puede ver que la oscilación de periodo corto es muy rápida.

Ahora se representa el diagrama de polos del sistema, para así identificar los polos que producen cada uno de los modos.

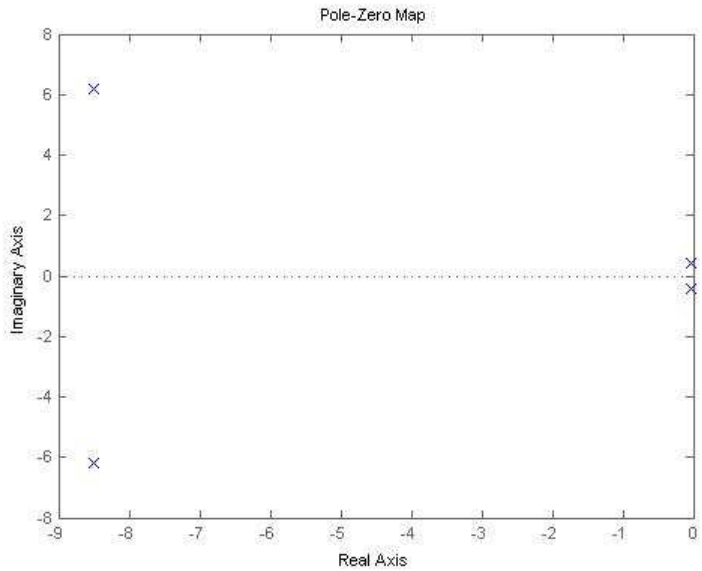

Figura 66 – Diagrama de Polos del modo Longitudinal

Se puede ver que el sistema tiene 2 polos muy cerca del origen y otros 2 muy alejados. Se analizarán por separado, para apreciar mejor cómo nos afectan. Primero se obtienen los valores de estos polos, con su frecuencia y factor de amortiguamiento.

Los polos correspondientes al periodo corto son:

$$p_{1,2} = -8.49 \pm 6.21j\,;\, \omega_n = 10.5 rad/s\,;\, \zeta = 0.807\,;\, \tau = 0.1178s$$

Y los polos correspondientes al modo fugoide son:

$$p_{3,4} = -0.0409 \pm 0.4225j\,;\, \omega_n = 0.4244 rad/s\,;\, \zeta = 0.0964\,;\, \tau = 24.4499s$$

Si se analizan los polos 1 y 2, lo primero que se ve es que tienen un amortiguamiento grande. La constante de tiempo es muy pequeña, así que prácticamente no oscila y es muy rápida.

Si se analizan los polos 3 y 4, lo primero que se ve es que el factor de amortiguamiento es muy pequeño. Esto ya se veía al ver las gráficas con una entrada tipo escalón. Se suponer que dejará de oscilar entorno a 4 o 5 veces la constante de tiempo, es decir se estabilizará del todo en torno a los 100 segundos. Pero como se ha dicho anteriormente, es tan lenta la respuesta que el piloto puede corregirlo fácilmente.

Finalmente, se va a mirar el diagrama de Bode de este sistema.

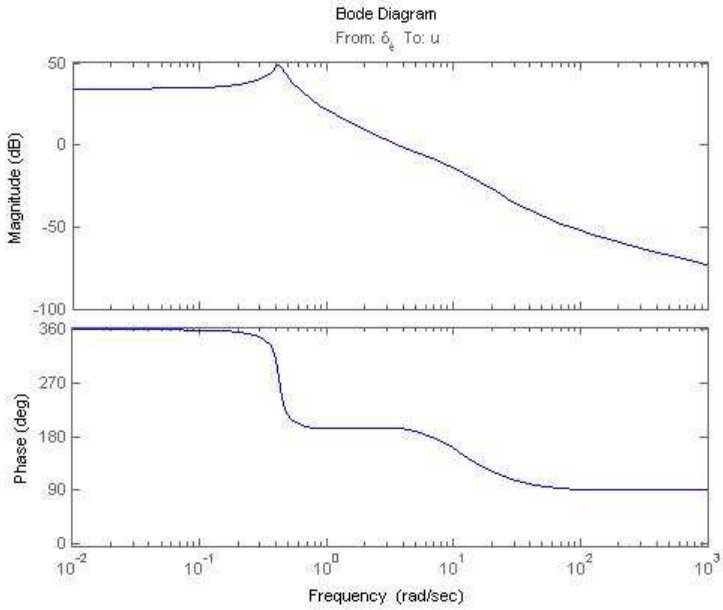

Figura 67 – Diagrama de Bode de la respuesta del sistema con la velocidad

En el diagrama de Bode de la velocidad, se puede ver que tiene la resonancia a la frecuencia de oscilación fugoide y que cae si se aumenta la frecuencia. Es decir, la respuesta del sistema es muy pequeña en el modo de periodo corto.

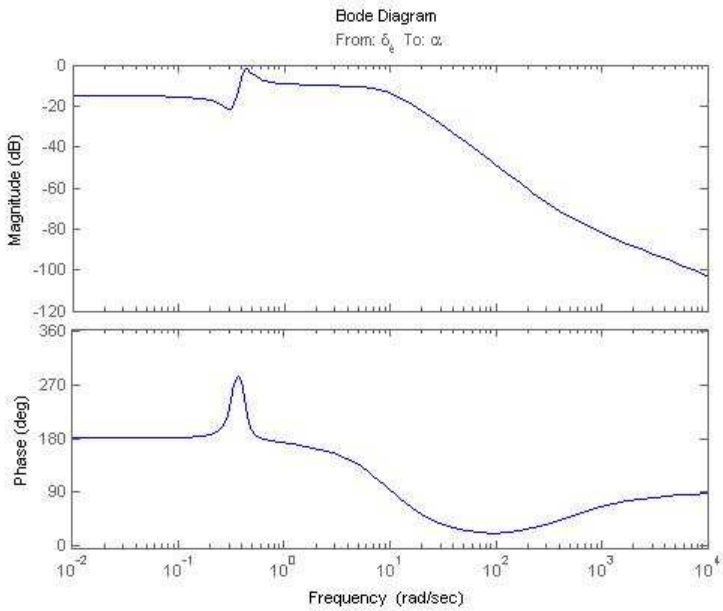

Figura 68 – Diagrama de Bode de la respuesta del sistema con el ángulo de ataque

En el diagrama de Bode del ángulo de ataque se puede ver que en la frecuencia del modo fugoide la respuesta de la señal disminuye mucho, esto nos representa la aproximación de que el ángulo de ataque es prácticamente cero cuando miramos el modo fugoide. Se puede ver también que a la frecuencia del modo de oscilación de periodo corto, $\omega = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = 6.2 rad/s$, la ganancia de la señal se mantiene casi constante.

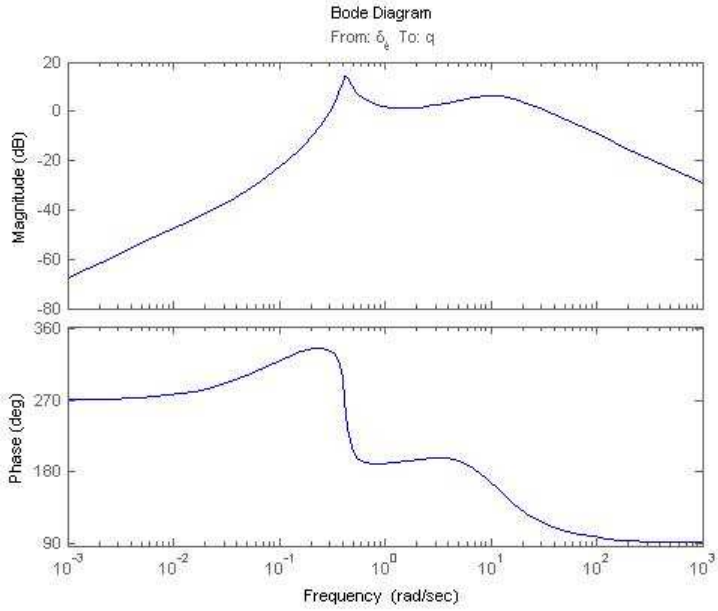

Figura 69 – Diagrama de Bode de la respuesta del sistema con el régimen de cabeceo

En esta figura se puede ver que la respuesta del régimen de cabeceo es muy baja a bajas frecuencias. Era de esperar ya que si el avión oscila a bajas frecuencias no cambia mucho su actitud. Como era de esperar, a partir del modo fugoide la respuesta del

sistema es muy grande, volviendo a ser muy grande en la frecuencia del modo de oscilación de periodo corto.

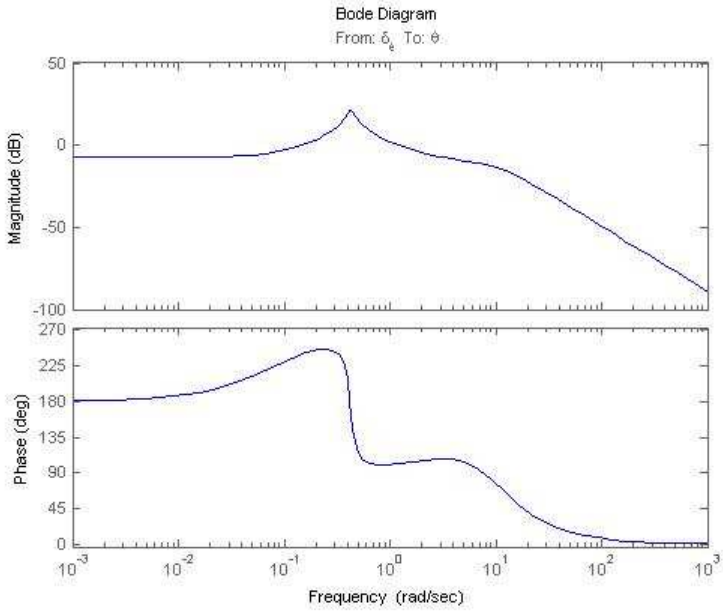

Figura 70 – Diagrama de Bode de la respuesta del sistema con el ángulo de cabeceo

Por último, en la figura del ángulo de cabeceo se puede ver que es prácticamente una respuesta constante en frecuencia hasta la frecuencia del modo de oscilación de periodo corto, aunque tiene la resonancia en el modo fugoide. Como se ha descrito en los modos anteriores, el ángulo de cabeceo está presente en los 2 modos que nos caracterizan la respuesta del sistema longitudinal, lo que se puede ver en este diagrama.

5.1.2. Análisis del control longitudinal en Lazo Cerrado

Diseño de un controlador mediante asignación de polos

Primero se va a realizar un controlador mediante asignación de polos. Para ello se va a seguir el criterio que se puede encontrar en el libro 'Flight Stability and Automatic Control'.

Primero se definirá el nivel, clase y categoría del UAV.

- Es de nivel 1: Las cualidades de vuelo son claramente adecuadas para la fase de vuelo de la misión
- Es de clase I: Aeronaves pequeñas y ligeras. Usos como entrenamiento básico y de observación
- Es de categoría A: Fases de vuelo no terminal que requieren rápida maniobrabilidad.

Para el modo de oscilación de periodo corto se sigue el criterio de esta tabla:

Modo periodo corto				
	Categorías A y C		Categoría B	
Nivel	$\zeta_{mín}$	$\zeta_{máx}$	$\zeta_{mín}$	$\zeta_{máx}$
1	0.35	1.30	0.3	2.0
2	0.25	2.00	0.2	2.0
3	0.15	-	0.15	-

Tabla 1 – Criterios para el modo de oscilación de periodo corto

En esta tabla se ven los criterios de diseño para el amortiguamiento mínimo y máximo, que se complementarán con la siguiente gráfica y se decidirán los valores adecuados.

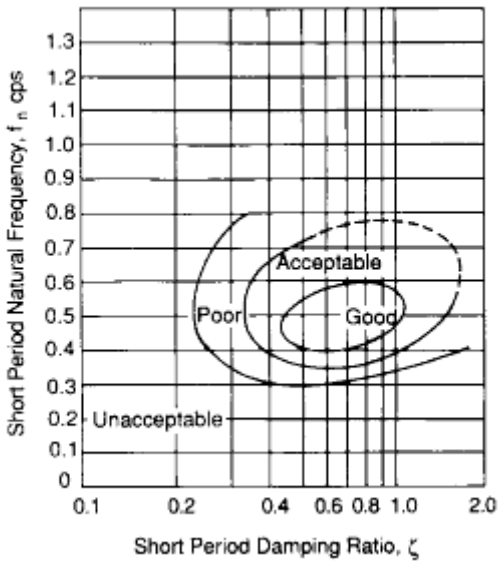

Figura 71 – Gráfica de relación entre frecuencia y amortiguamiento

Se cogerá el valor medio de frecuencia y uno a la derecha de amortiguamiento:

$$\omega_n = 2\pi f = 2\pi(0.5) = \pi rad/s = 3.14 rad/s$$
$$\zeta = 0.9$$

Con lo que los nuevos polos para el periodo corto son:

$$p_{1,2} = -2.82 \pm 1.37j\,;\omega_n = 3.14 rad/s\,;\zeta = 0.9\,;\tau = 0.355s$$

Para el modo de oscilación fugoide se seguirá el criterio de esta tabla:

Modo fugoide	
Nivel 1	ζ>0.04
Nivel 2	ζ>0
Nivel 3	T_2>55s

Tabla 2 – Criterios para el modo fugoide

Para la el modo fugoide se ha decidido mantener la frecuencia y aumentar el amortiguamiento:

$$\omega_n = 0.4244 rad/s$$
$$\zeta = 0.5$$

Con lo que los nuevos polos para el modo fugoide son:

$$p_{3,4} = -0.2122 \pm 0.3675\,j\,;\omega_n = 0.4244 rad/s\,;\zeta = 0.5\,;\tau = 4.7s$$

Con estos polos diseñamos la matriz de control K mediante Matlab, con lo que obtenemos:

$$K = \begin{bmatrix} -0.0113 & 0.0687 & 0.3126 & 0.0366 \end{bmatrix}$$

Se introduce la matriz en el modelo de Simulink y se obtiene:

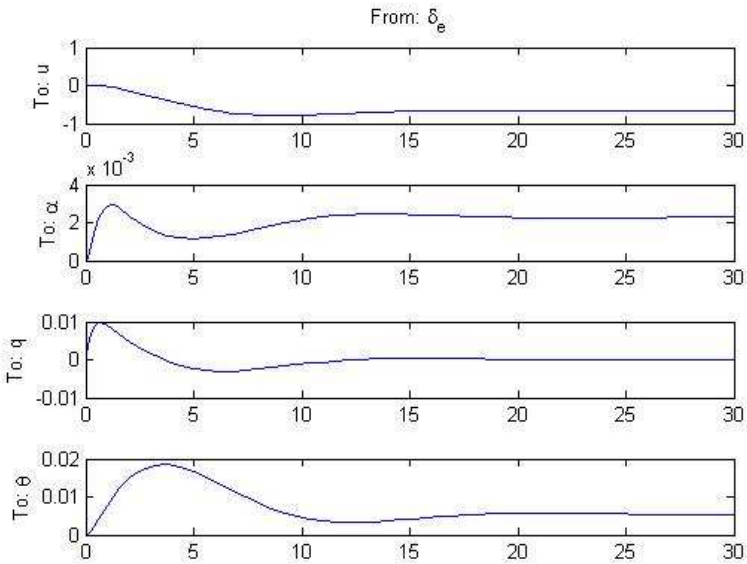

Figura 72 – Respuesta del control longitudinal a una entrada escalón de amplitud 0.1

Lo primero que se ve es que la respuesta es más lenta y se estabiliza en menor tiempo.

Si se mira sólo el modo de periodo corto se ve que gracias a los nuevos polos prácticamente no existe, la respuesta tanto del ángulo de ataque como del régimen de cabeceo son mucho más suaves.

Si se mira sólo el modo fugoide se ve que sigue oscilando, pero al haber aumentado el factor de amortiguamiento a 0.5 ahora la respuesta de la velocidad y del ángulo de cabeceo se estabilizan mucho más rápido.

El nuevo diagrama de polos es el siguiente:

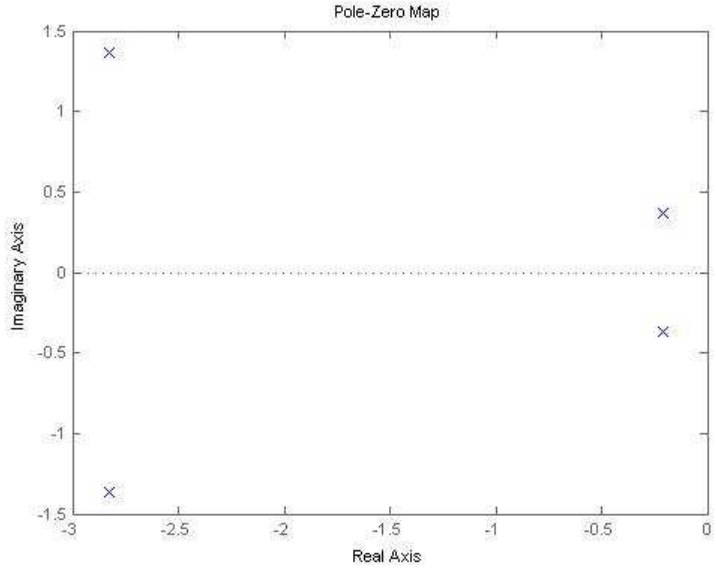

Figura 73 – Diagrama de polos del sistema

Cuando se calcula la matriz de control usando la función PLACE de Matlab a veces no se consigue la posición exacta deseada de los polos, pero suele quedar muy cerca del valor deseado. En nuestro caso, con la matriz de control obtenida, los polos resultantes en lazo cerrado son los mismos que los deseados.

Finalmente se van a mirar los diagramas de Bode del sistema.

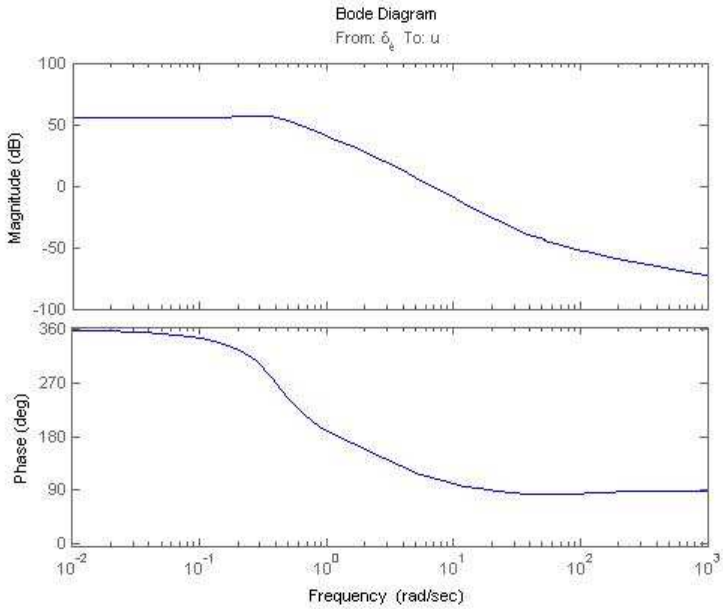

Figura 74 – Diagrama de Bode para la velocidad

Ahora que se ha aumentado el amortiguamiento del modo fugoide ha desaparecido la resonancia del sistema. Esto indica que el modo fugoide deja de ser tan fuerte, como se ha visto en la respuesta al escalón

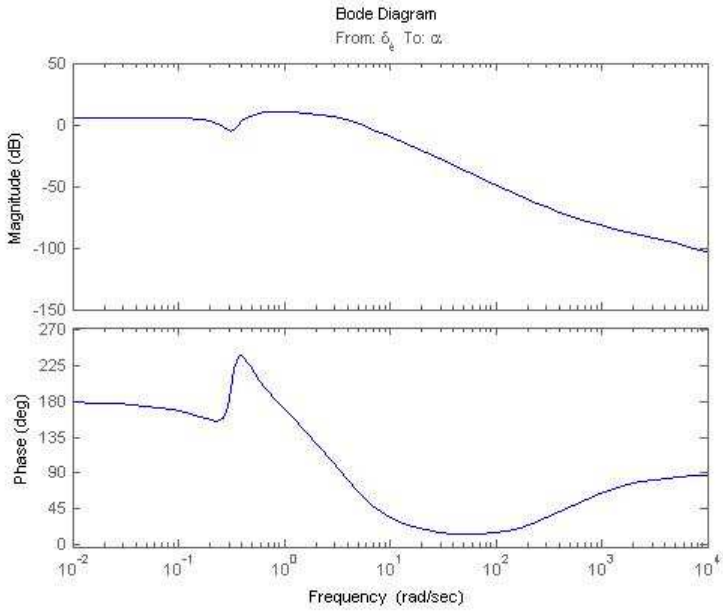

Figura 75 – Diagrama de Bode para el ángulo de ataque

La respuesta del ángulo de ataque sigue siendo parecida a la que se tenía inicialmente ya que como se ha dicho en el modo fugoide no hay variación prácticamente de este ángulo. Lo que sí que se ve es que al reducir la frecuencia del modo de periodo corto también se ha achatado la respuesta del sistema y empieza a caer una vez pasados los 3.14 rad/s.

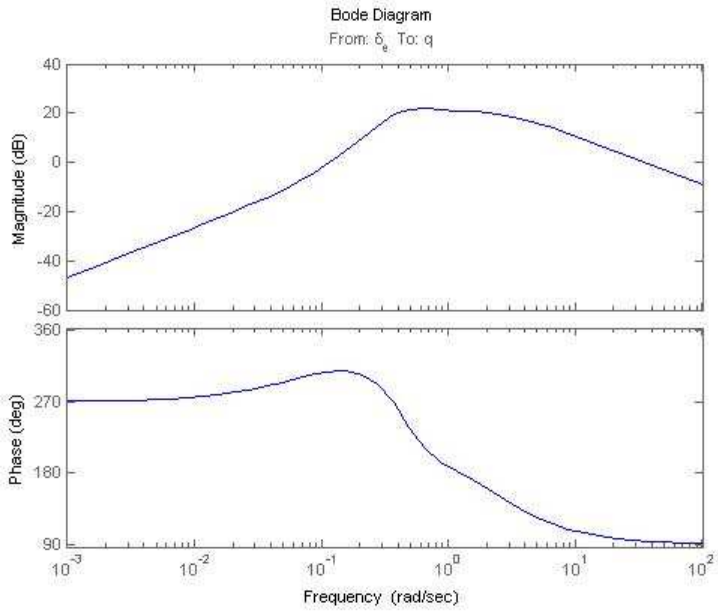

Figura 76 – Diagrama de Bode para el régimen de cabeceo

La respuesta del régimen de cabeceo sigue siendo muy parecida, pero ha desaparecido la resonancia como en las demás respuestas.

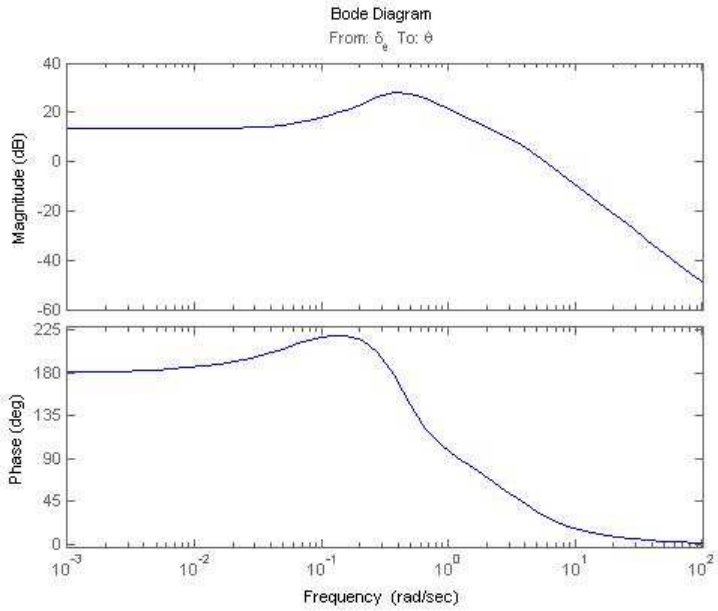

Figura 77 – Diagrama de Bode para el ángulo de cabeceo

La respuesta del ángulo de cabeceo mantiene la resonancia para el modo fugoide y se ha reducido la ganancia para el modo de periodo corto.

Diseño de un controlador óptimo cuadrático

En el controlador longitudinal la matriz R es una sola variable, dado que sólo hay una entrada en el sistema. Tal y como está definida R hay que fijar el ángulo límite de deflexión del timón de profundidad. Se han escogido 15º:

$$R = \frac{1}{\left(15^{o}\frac{\pi}{180^{o}}\right)^{2}} = 0.06854$$

Para diseñar la matriz Q se necesitan los valores máximos que se van a permitir adquirir a las variables de estado u, w,q y θ. Se han escogido los valores:

$$\left.\begin{array}{l} u_{máx} = 2\,\text{m/s} \\ w_{máx} = 15\,\text{m/s} \\ q_{máx} = 1\,\text{rad/s} \\ \theta_{máx} = 0.5236\,\text{rad} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Q} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.00444 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.64755 \end{pmatrix}$$

El valor de u se ha escogido para que la velocidad del UAV no cambie demasiado. El valor de w se ha escogido para que el UAV no haga movimientos bruscos de más de 30º con una entrada de referencia de 15º, redondeando al alza. El valor de q se ha escogido de forma que no sea demasiado grande. Finalmente, el valor de θ se ha escogido de forma que el UAV no haga movimientos bruscos de más de 30º con una entrada de referencia de 15º.

Después de probar, se ha decidido darle un valor unitario a la variable $\overline{p}$ de la función de coste antes definida.

Así, se ha obtenido la matriz de control:

$$K = \begin{bmatrix} 1.7792 & 0.0538 & -3.5510 & -14.7618 \end{bmatrix}$$

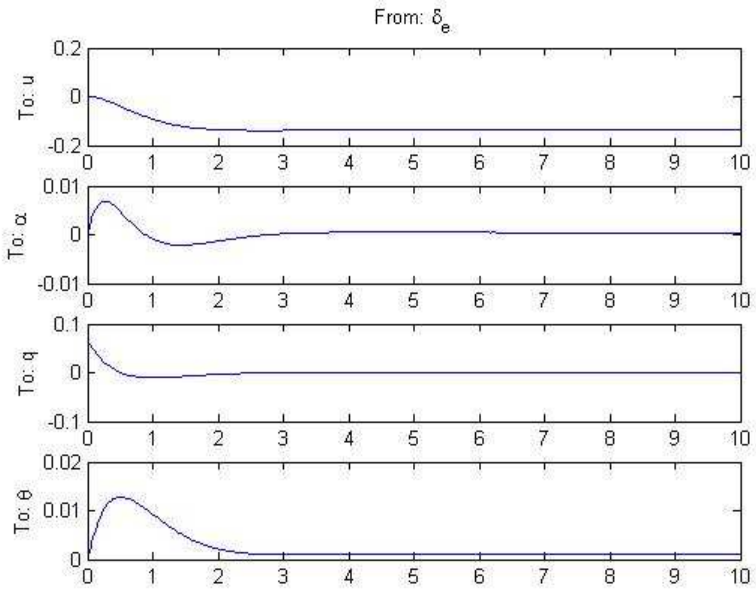

Figura 78 – Respuesta del sistema con el controlador LQR a un escalón de 0.1

Se puede ver la respuesta al modo periodo corto mirando el ángulo de ataque y el régimen de cabeceo. Se puede ver en el régimen de cabeceo que la respuesta es demasiado rápida, el valor inicial es 0 y es tan rápido el aumento de amplitud del régimen de cabeceo que parece que empiece en 0.05. Con este controlador se ha empeorado el modo de periodo corto.

La respuesta al modo fugoide se puede ver mirando la velocidad y el ángulo de cabeceo. Se ve que se ha amortiguado mucho, haciendo que la respuesta sea estable en 4 segundos. Se ha mejorado mucho la respuesta del modo fugoide.

El nuevo diagrama de polos es el siguiente:

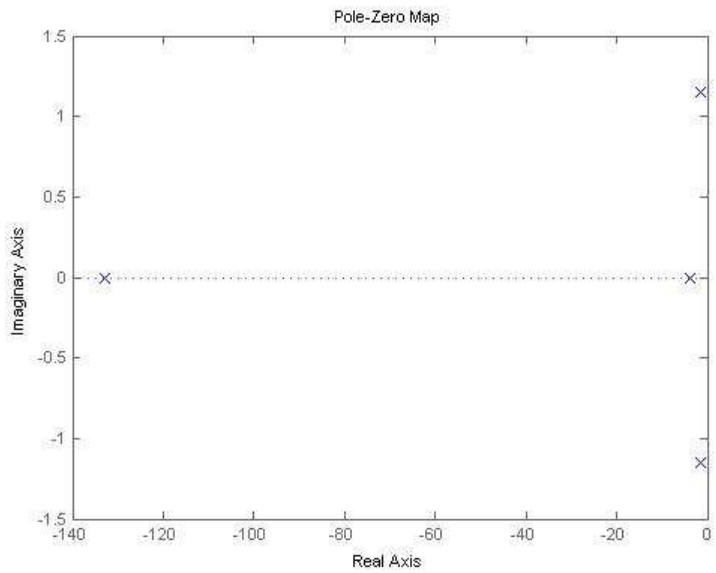

Figura 79 – Diagrama de polos con el controlador LQR

Para el modo de periodo corto se obtienen los polos:

$$p_1 = -133; \tau = 0.0075s$$
$$p_2 = -3.82; \tau = 0.2618s$$

Al hacer el controlador LQR el modo de periodo corto ha dejado de oscilar, pero los polos correspondientes han obtenido demasiado amortiguamiento. Esto ha producido que la respuesta producida por el primer polo sea demasiado rápida, comportando peligro para la integridad estructural del UAV.

Para el modo fugoide se obtienen los polos:

$$p_{3,4} = -1.61 \pm 1.15j\,; \omega_n = 1.98 rad/s\,; \zeta = 0.815\,; \tau = 0.6211s$$

El controlador LQR ha corregido la respuesta del modo fugoide. Ha aumentado mucho el amortiguamiento de esta respuesta y como se ha visto en la figura 77 prácticamente no hay modo fugoide.

Por último se analiza el diagrama de Bode del sistema.

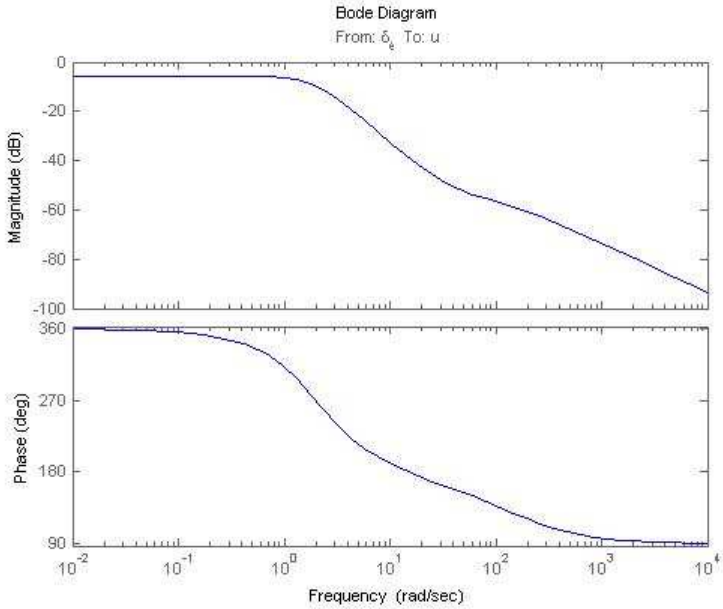

Figura 80 – Diagrama de Bode con la velocidad

Viendo este diagrama se puede decir que prácticamente no hay respuesta de la velocidad al modo fugoide.

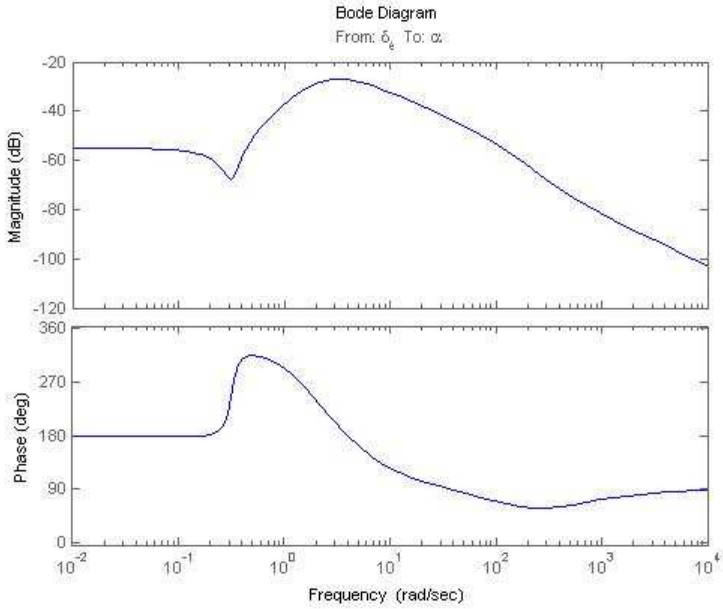

Figura 81 – Diagrama de Bode con el ángulo de ataque

Se puede ver que la respuesta del ángulo de ataque mantiene el cero en la frecuencia del modo fugoide. A frecuencias más altas que ésta la ganancia del ángulo de ataque es bastante más grande, lo que se veía en la respuesta al escalón.

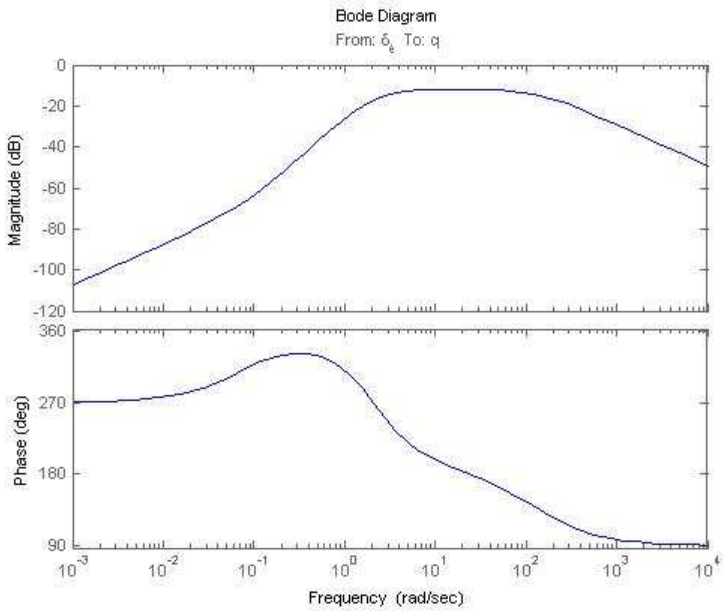

Figura 82 – Diagrama de Bode con el régimen de cabeceo

Se puede ver que se ha perdido la resonancia a la frecuencia del modo fugoide que había con el sistema en lazo abierto.

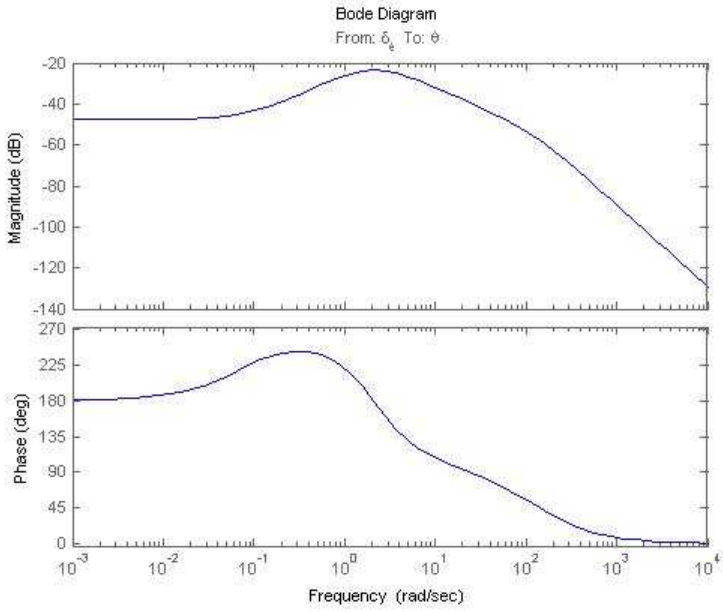

Figura 83 – Diagrama de Bode con el ángulo de cabeceo

La respuesta del ángulo de cabeceo se ha visto suavizada con respecto a la que había en lazo abierto, aunque no ha atenuado mucho la resonancia inicial.

5.1.3. Comparación de resultados obtenidos

A continuación se van a comparar los polos en lazo abierto con los que se han obtenido en lazo cerrado.

Primero para el modo de periodo corto:

Controlador	Polos	ω_n (rad/s)	ζ	τ (s)
Lazo Abierto	-8.49±6.21j	10.5	0.807	0.1178
Asignación de polos	-2.82±1.37j	3.14	0.9	0.355
LQR	-133 -3.82	133 3.82	1 1	0.0075 0.2618

Tabla 3 – Comparativa de los polos del modo periodo corto

El modo de periodo corto propio del UAV está muy amortiguado, el problema es que es demasiado rápido. Para ello se han diseñado unos nuevos polos que cumplan unas condiciones mínimas para el piloto a la hora de manejarlo. El controlador LQR obtenido aumenta mucho el amortiguamiento de este modo, pero además aumenta aún más la velocidad, siendo la constante de tiempo más de 10 veces menor.

Para el modo fugoide:

Controlador	Polos	ω_n (rad/s)	ζ	τ (s)
Lazo Abierto	-0.0409±0.4225j	0.4244	0.0964	24.4499
Asignación de polos	-0.2122±0.3675j	0.4244	0.5	4.7
LQR	-1.61±1.15j	1.98	0.815	0.6211

Tabla 4 – Comparativa de los polos del modo fugoide

El modo fugoide propio del UAV casi no está amortiguado. Los polos que se han diseñado mantienen la misma frecuencia, pero aumentan bastante el amortiguamiento para que el piloto no tenga que corregir si no quiere el movimiento. El controlador LQR obtenido aumenta mucho el amortiguamiento de este modo también y además vuelve la respuesta más rápida, con lo que prácticamente hace imperceptible el modo fugoide.

En definitiva:

- El controlador diseñado mediante asignación de polos hace que la respuesta del UAV sea más lenta y más suave que la que existe en lazo abierto y la que nos proporciona el controlador LQR.

- El controlador óptimo cuadrático hace que la respuesta del UAV sea mucho más rápida y más brusca que la que existe en lazo abierto y la que nos proporciona el controlador obtenido mediante asignación de polos.

5.2. Control Laterodireccional

En el modo laterodireccional, tenemos que diseñar un controlador que satisfaga los 3 problemas que nos pueden producir la respuesta del UAV. Estos son:

- Modo Balanceo
- Modo Convergencia Espiral
- Balanceo del holandés

Modo Balanceo

Es el amortiguamiento del momento de balanceo. No hay ningún momento aerodinámico que impida el momento de balanceo, sin embargo sí que hay un amortiguamiento del momento de balanceo cuando la aeronave empieza a rotar creado por las alas. Este amortiguamiento evita que se alcancen grandes momentos de balanceo en la aeronave.

El modo balanceo es estable, es producida por un solo polo y viene caracterizado por su constante de tiempo, generalmente muy pequeña.

Matemáticamente se identifica como el polo más alejado del origen. Y en la respuesta del sistema se identifica mirando la respuesta del régimen de balanceo p.

Modo Espiral

En este modo se pueden distinguir dos tipos, convergencia espiral y divergencia espiral.

Convergencia Espiral: Este modo ocurre cuando el UAV es estable. Es una respuesta muy lenta del UAV.

Divergencia Espiral: Este modo ocurre cuando el UAV es inestable. Cuando haya una pequeña perturbación, el UAV empieza a desviarse hacia uno de los lados. Se produce un pequeño ángulo de balanceo en esa dirección. A raíz de esto también se produce un pequeño ángulo de guiñada en la misma dirección. Si la estabilidad del diedro del UAV es baja y el amortiguamiento de guiñada es pequeño, estos ángulos no hacen más que incrementarse. A medida que va moviéndose el UAV se van incrementando el ángulo de balanceo y de guiñada, con lo que el movimiento descrito es una especie de espiral, que al final hará descender el UAV, pudiendo llegar a perder sustentación y tener un accidente.

En aeronaves convencionales, los pilotos se entrenan para detectar este tipo de movimientos. Se caracterizan por tener una constante de tiempo muy grande, con lo que si se detecta se puede corregir fácilmente por el piloto.

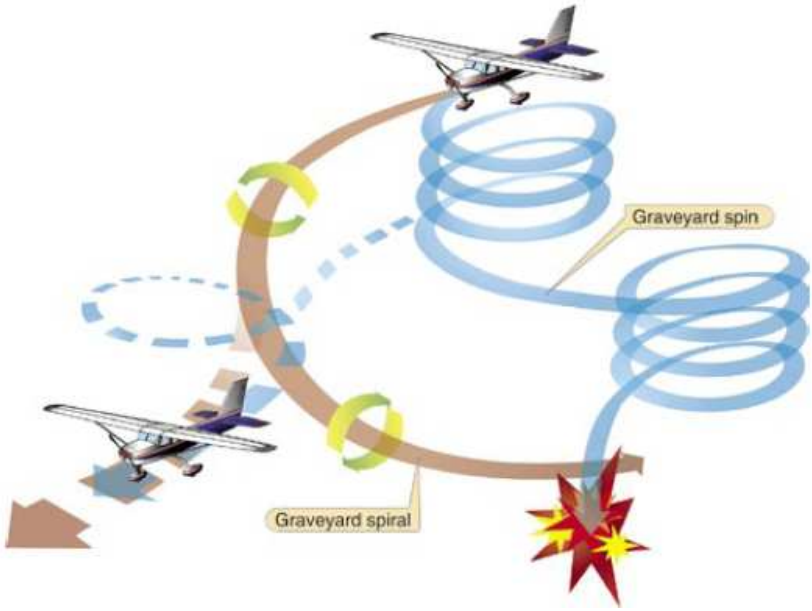

Figura 84 – Efecto producido por el modo espiral [1]

Esta inestabilidad unida a una baja visibilidad puede llevar a lo que en inglés se llama 'Graveyard Spiral', que es un picado del avión como se muestra en la anterior figura. Se puede ver que la curva roja tiene la constante de tiempo más grande que la azul.

La curva azul ocurre cuando existe mucha estabilidad direccional pero una pobre estabilidad lateral. Y la curva roja ocurre cuando no hay suficiente estabilidad direccional.

Es claro que el caso peligroso de este modo es el que se induce una divergencia del movimiento, con lo que tiene que corregirse aunque sea de respuesta muy lenta.

Este efecto se identifica en el modelo matemático cuando hay un polo real muy cerca del origen.

Balanceo del Holandés

Es el modo oscilatorio de respuesta del UAV. Se produce una perturbación en el balanceo del UAV, con lo que tiende a girar hacia un lado. La estabilidad de la aeronave hace que la guiñada gire y tienda a recuperar la posición de equilibrio. Cuando el UAV vuelve a pasar por la posición de equilibrio el balanceo se ha pasado de su valor de equilibrio y tiende a irse hacia el otro lado, con lo que la guiñada vuelve a tender a la

posición de equilibrio. Esto se va repitiendo hasta que finalmente el UAV recupera la posición de equilibrio.

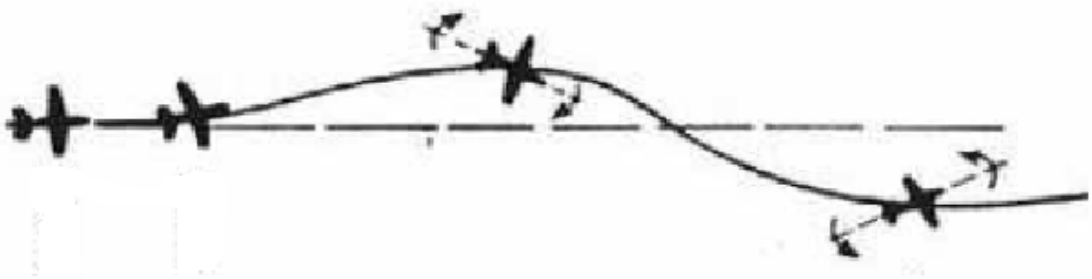

Figura 85 – Movimiento en el balanceo del holandés

Suele tener una constante de tiempo grande. Hay que evitarlo porque si es una aeronave de transporte de pasajeros es bastante molesto, y si es un UAV no se suele querer que esté mucho rato oscilando para recuperar la posición.

Para evitar este tipo de comportamiento hay que amortiguar la guiñada del UAV.

Se identifica este movimiento porque los polos son complejos. A la hora de diseñar el controlador hay que amortiguar mucho este tipo de respuesta.

Se puede visualizar si existe balanceo del holandés mirando la respuesta del sistema en el ángulo de guiñada, β, el régimen de balanceo, p, y el régimen de guiñada, r.

5.2.1. Análisis del control laterodireccional en Lazo Abierto

Como en el modo longitudinal, se usa una entrada de tipo escalón para mirar la respuesta del sistema.

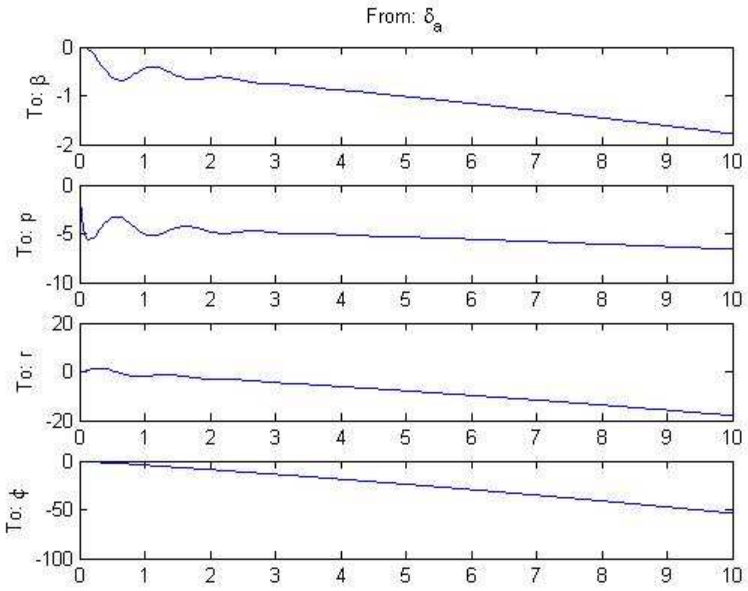

Figura 86 – Respuesta del sistema a una entrada escalón en los alerones

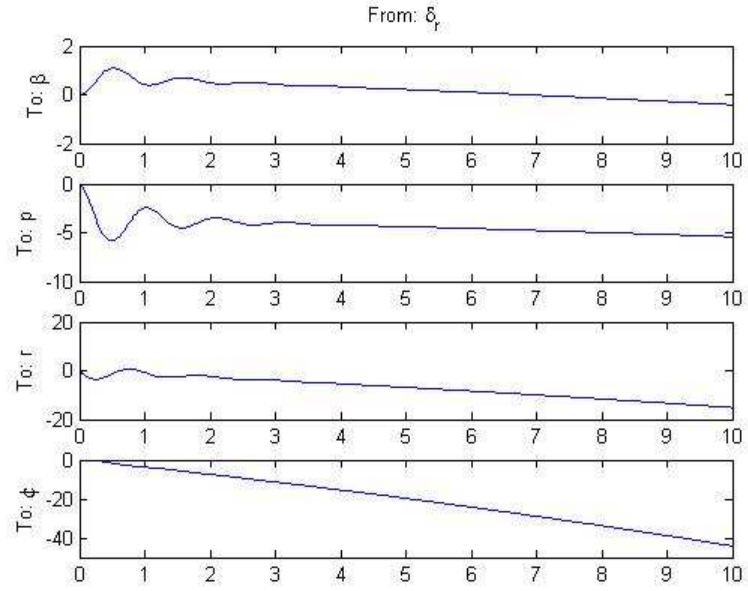

Figura 87 – Respuesta sistema a una entrada escalón en el timón de dirección

Lo primero que se ve es que es un sistema inestable. El modo espiral es divergente y su respuesta afecta a todas las variables de estado.

Existe también el modo de balanceo, que se identifica muy rápido mirando el régimen de balanceo. En muy poco tiempo la respuesta adquiere un valor muy grande.

Finalmente, se puede ver que también existe el balanceo del holandés. Si se miran las respuestas al ángulo de guiñada, el régimen de guiñada y el régimen de balanceo, se puede ver que mantienen diferencias de fase de aproximadamente 90º. Esto indica que cuando uno empieza a rotar hacia un lado los demás empiezan a rotar hacia el lado contrario, produciendo la oscilación.

Se representa el diagrama de polos del sistema para identificar qué polos producen cada modo.

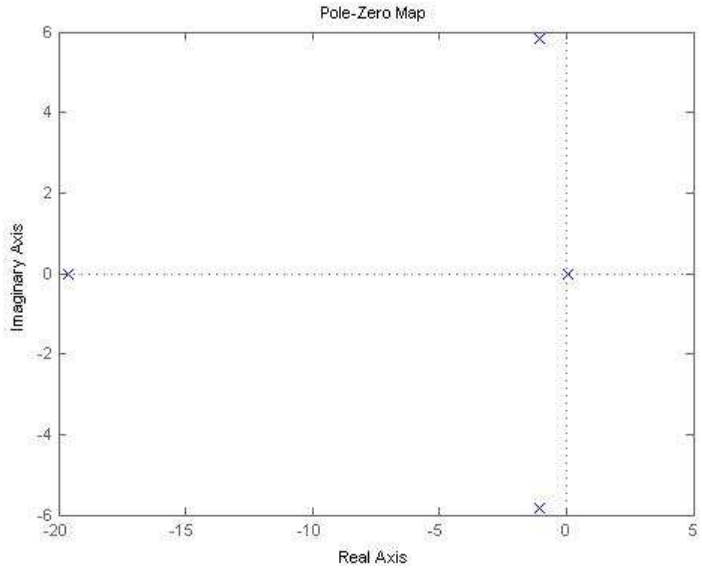

Figura 88 – Diagrama de polos del modo Laterodireccional

Se ve que hay un polo muy alejado del origen, dos polos complejos conjugados y uno que está justo en el origen, de valor positivo después de ver la respuesta del sistema.

Ahora se separan en 3 grupos, un grupo por cada modo de respuesta.

El polo correspondiente al modo Balanceo es:

$$p_1 = -19.5866\,;\ \tau = 0.0511s$$

Este polo tiene una respuesta muy rápida al estar tan alejado del origen. Para mejorar esta respuesta habrá que acercar el polo para obtener una constante de tiempo mayor.

Los polos correspondientes al balanceo del holandés son:

$$p_{2,3} = -1.0664 \pm 5.8505\,j\,;\,\omega_n = 5.9469 rad/s\,;\,\zeta = 0.1793\,;\,\tau = 0.9377 s$$

Se puede ver que el balanceo del holandés del UAV tiene muy poco amortiguamiento, demasiado poco. Si no se quiere que oscile tanto habrá que aumentar el factor de amortiguamiento.

Finalmente el polo correspondiente al modo espiral es:

$$p_4 = 0.0424\,;\;\tau = 23.5849 s$$

Como se podía ver en la respuesta al escalón hay un polo positivo. Es inestable y es el polo dominante del sistema. Se ha visto que todas las variables tienden a inestabilizarse debido a este polo. También se ve que tiene una constante de tiempo muy grande. Se podría dar por bueno y dejar en manos del piloto el corregir el movimiento, pero es mejor estabilizarlo y seguir algún criterio para aumentar la velocidad de respuesta del sistema.

Ahora se va a analizar el diagrama de Bode de este sistema.

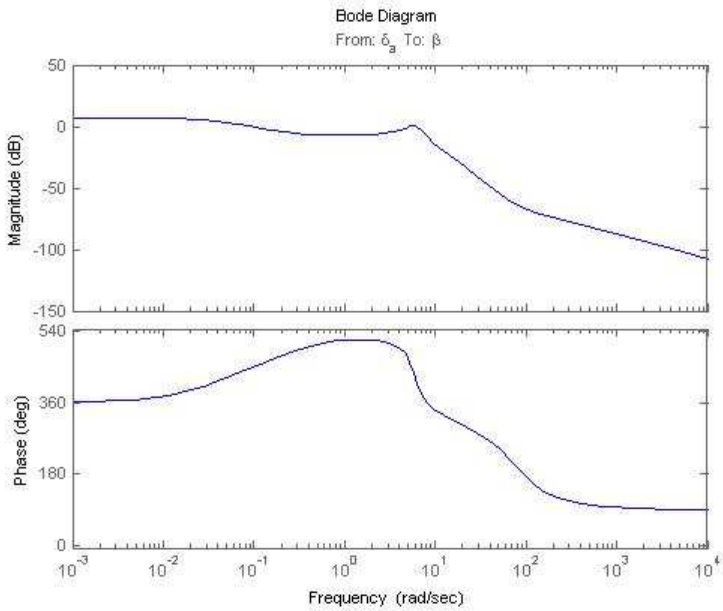

Figura 89 – Diagrama de Bode de la respuesta de β vs alerones

Se puede ver que la ganancia se mantiene prácticamente constante hasta que se alcanza la frecuencia de oscilación del balanceo del holandés, a partir de la cual empieza a caer.

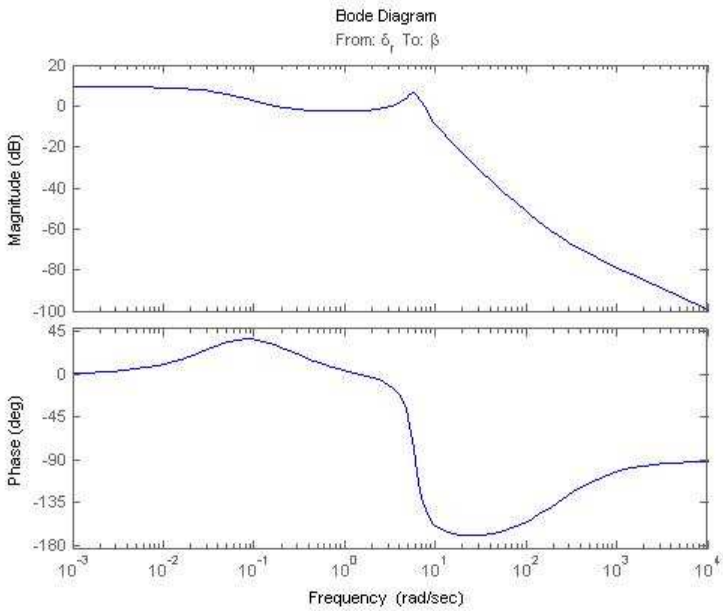

Figura 90 – Diagrama de Bode de la respuesta de β vs timón de dirección

La respuesta del ángulo de guiñada al timón de dirección es prácticamente igual que la misma respuesta al movimiento de los alerones.

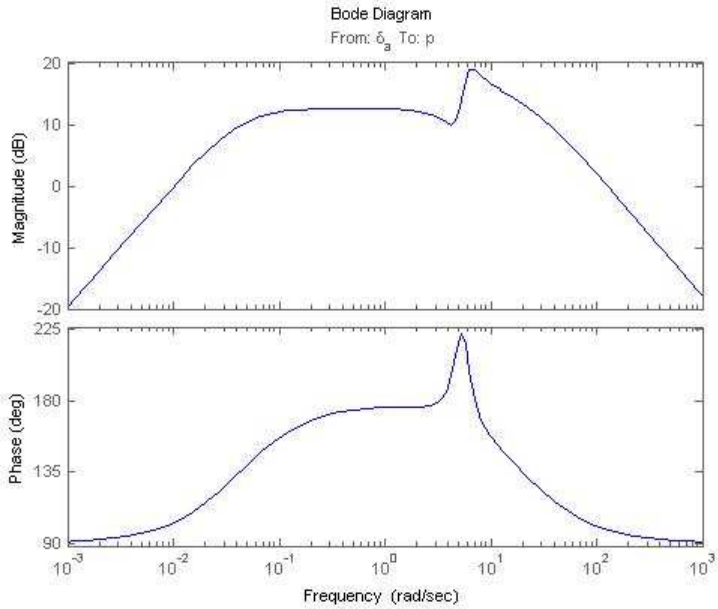

Figura 91 – Diagrama de Bode de la respuesta de p vs alerones

El régimen de balanceo actúa como un filtro paso banda. A bajas y a altas frecuencias no tiene casi régimen de balanceo, es decir el modo espiral y el modo balanceo le afectan poco. Aunque si se mira a frecuencias altas la diferencia de ganancia no es tan alta como en el resto de salidas del control laterodireccional. El modo balanceo existe, pero de baja magnitud.

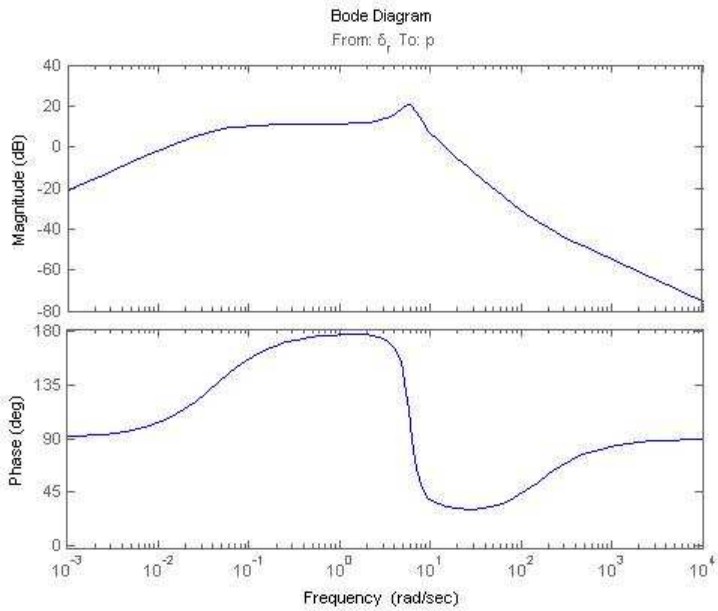

Figura 92 – Diagrama de Bode de la respuesta de p vs timón de dirección

El régimen de balanceo también actúa como un filtro paso banda como respuesta al timón de dirección. Pero además en este caso el modo balanceo tiene aún menor magnitud, casi inexistente.

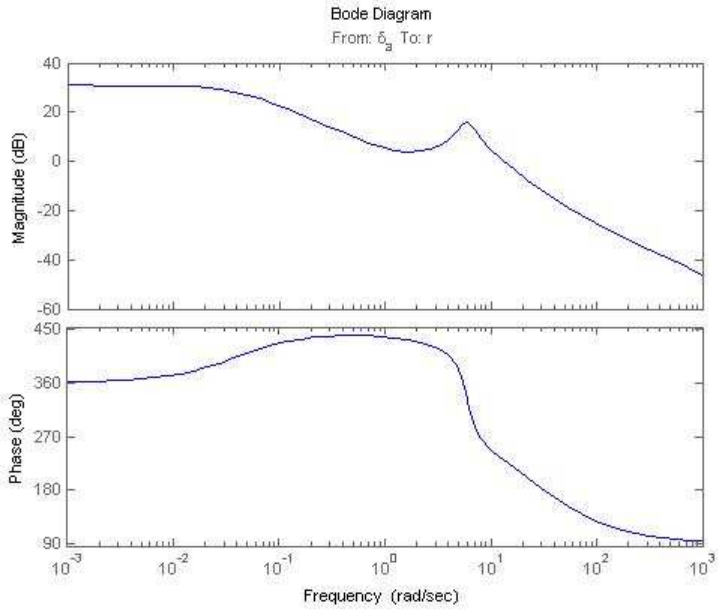

Figura 93 – Diagrama de Bode de la respuesta de r vs alerones

El régimen de guiñada tiene una pequeña resonancia en la frecuencia natural del balanceo del holandés, pero es pequeña comparada con la ganancia a más bajas frecuencias. Esto nos indica que el régimen de guiñada se verá más afectado por el modo espiral que por el balanceo del holandés, y mucho menos por el modo balanceo.

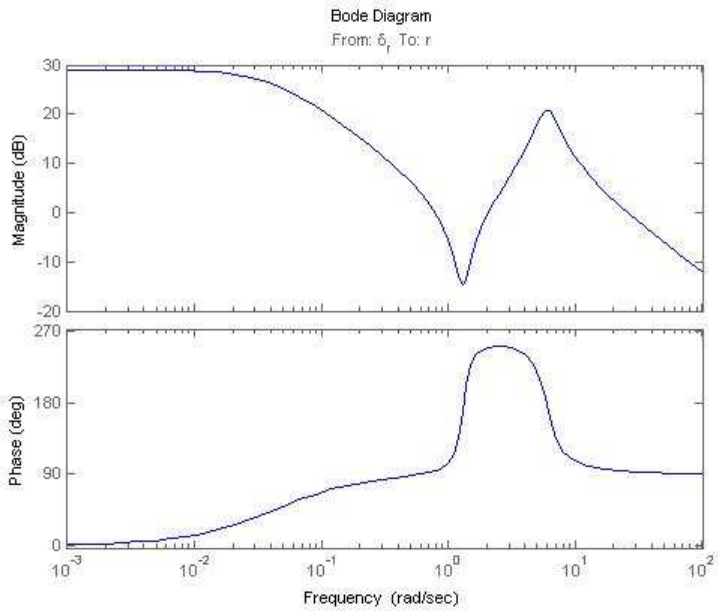

Figura 94 – Diagrama de Bode de la respuesta de r vs timón de dirección

Cuando la superficie de control usada es el timón de dirección también hay una resonancia en la frecuencia del balanceo del holandés. Así se ve que a la respuesta del régimen de guiñada afectan el modo espiral y el balanceo del holandés. Aunque a diferencia de los alerones, una frecuencia intermedia entre estos modos no da respuesta al sistema ya que la ganancia se reduce mucho.

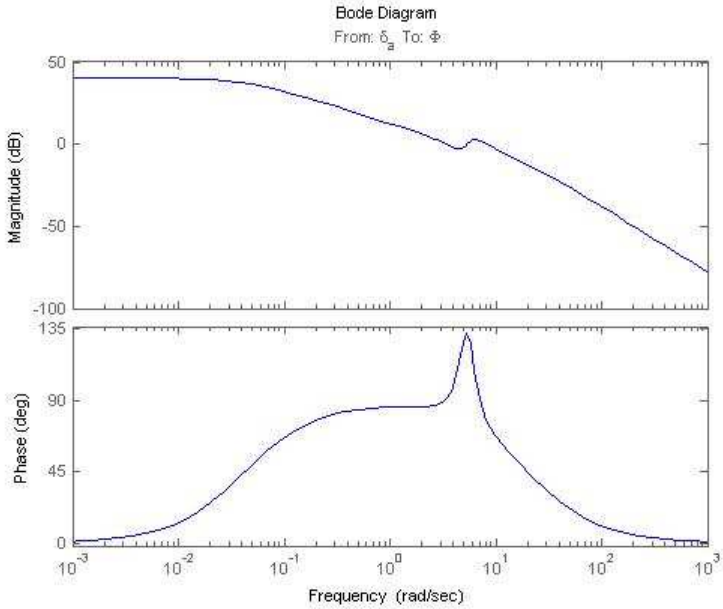

Figura 95 – Diagrama de Bode de la respuesta de Φ vs alerones

Se puede ver que la única respuesta que afecta al ángulo de guiñada es la que produce el modo espiral, ya que la ganancia cae en picado a medida que empieza a aumentar la frecuencia.

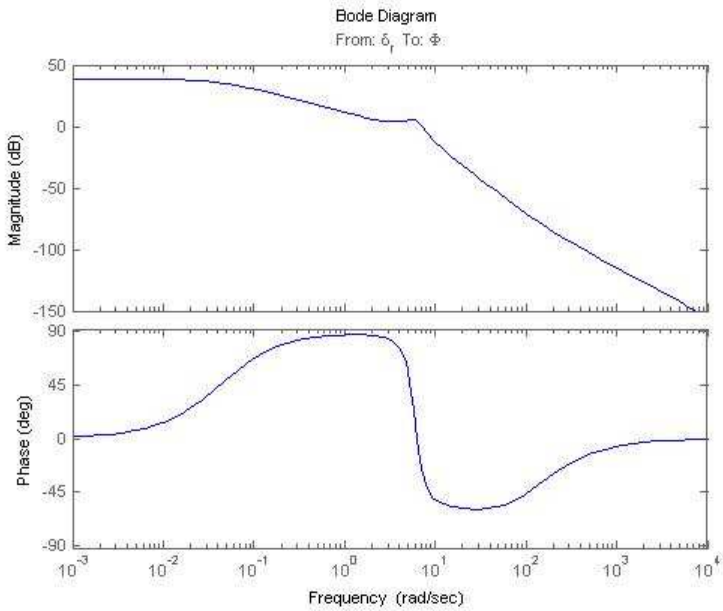

Figura 96 – Diagrama de Bode de la respuesta de Φ vs timón de dirección

Se puede ver que la respuesta del ángulo de balanceo con el timón de dirección y con los alerones es muy parecida.

5.2.2. Análisis del control laterodireccional en Lazo Cerrado

Diseño de un controlador mediante asignación de polos

Se va a realizar un controlador mediante asignación de polos. Para ello se va a seguir el criterio que se puede encontrar en el libro 'Flight Stability and Automatic Control'.

Para el modo de balanceo se sigue el criterio de esta tabla:

Valor máximo de la constante de tiempo				
Clase I & IV	Categoría A	Nivel 1: 1 s	Nivel 2: 1.4 s	Nivel 3: 10 s
Clase II & III	Categoría A & B	Nivel 1: 1.4 s	Nivel 2: 3 s	Nivel 3: 10 s
Todas las clases	Categoría B	Nivel 1: 1.4 s	Nivel 2: 3 s	Nivel 3: 10 s
Clase I & IV	Categoría C	Nivel 1: 1 s	Nivel 2: 1.4 s	Nivel 3: 10 s
Clase II & III	Categoría C	Nivel 1: 1.4 s	Nivel 2: 3 s	Nivel 3: 10 s

Tabla 5 – Criterios para el modo de balanceo

Como el UAV se ha considerado de nivel 1, de clase I y de categoría A la constante de tiempo escogida es de 1s. Con esto el nuevo polo del modo balanceo deseado es:

$$p_1 = -1; \tau = 1s$$

Para el modo espiral se sigue el criterio de esta tabla:

Tiempo mínimo para doblar la amplitud				
Clase I & IV	Categoría A	Nivel 1: 12 s	Nivel 2: 12 s	Nivel 3: 4 s
Clase I & IV	Categorías B & C	Nivel 1: 20 s	Nivel 2: 12 s	Nivel 3: 4 s
Clase II & III	Categorías A & B & C	Nivel 1: 20 s	Nivel 2: 12 s	Nivel 3: 4 s

Tabla 6 – Criterios para el modo espiral

El tiempo para doblar la amplitud viene dado por la fórmula:

$$T_2 = \frac{0.693}{|\lambda_{espiral}|} s$$

Según la tabla el tiempo mínimo es de 12s, con lo que:

$$12s < \frac{0.693}{|\lambda_{espiral}|} \Rightarrow |\lambda_{espiral}| < 0.05775$$

Para este modo, se ha escogido el valor con 2 decimales, menor del máximo según el criterio, con lo que el nuevo polo es:

$$p_4 = -0.05\,;\tau = 20s$$

Para el balanceo del holandés se sigue el criterio de esta tabla:

Balanceo del holandés					
Nivel 1	Categoría A	Clase I & IV	ζ>0.19	$\zeta\omega_n$>0.35	ω_n>1
Nivel 1	Categoría A	Clase II & III	ζ>0.19	$\zeta\omega_n$>0.35	ω_n>0.4
Nivel 1	Categoría B	Todas Clases	ζ>0.08	$\zeta\omega_n$>0.15	ω_n>0.4
Nivel 1	Categoría C	Clase I,IIC & III	ζ>0.08	$\zeta\omega_n$>0.15	ω_n>1
Nivel 1	Categoría C	Clase IIL & IV	ζ>0.08	$\zeta\omega_n$>0.15	ω_n>0.4
Nivel 2	Categorías A&B&C	Todas Clases	ζ>0.02	$\zeta\omega_n$>0.05	ω_n>0.4
Nivel 3	Categorías A&B&C	Todas Clases	ζ>0.02	-	ω_n>0.4
C es despegue desde otro avión					
L es despegue desde la base					

Tabla 7 – Criterios para el balanceo del holandés

La frecuencia del balanceo del holandés cumple con este criterio, pero no el amortiguamiento, con lo que hay que aumentarlo. Se ha decidido:

$$\omega_n = 5.9469 rad/s$$
$$\zeta = 0.5$$

Con lo que los nuevos polos son:

$$p_{2,3} = -2.9735 \pm 5.15j\,;\omega_n = 5.9469 rad/s\,;\zeta = 0.5\,;\tau = 0.3363s$$

Una vez decididos los nuevos polos del sistema se calcula la matriz de control K mediante Matlab, con lo que obtenemos:

$$K = \begin{bmatrix} 0.0319 & 0.1441 & -0.0148 & -0.0230 \\ 0.0039 & 0.0660 & -0.1559 & 0.0664 \end{bmatrix}$$

Se introduce la matriz de control en el modelo de Simulink y se obtiene:

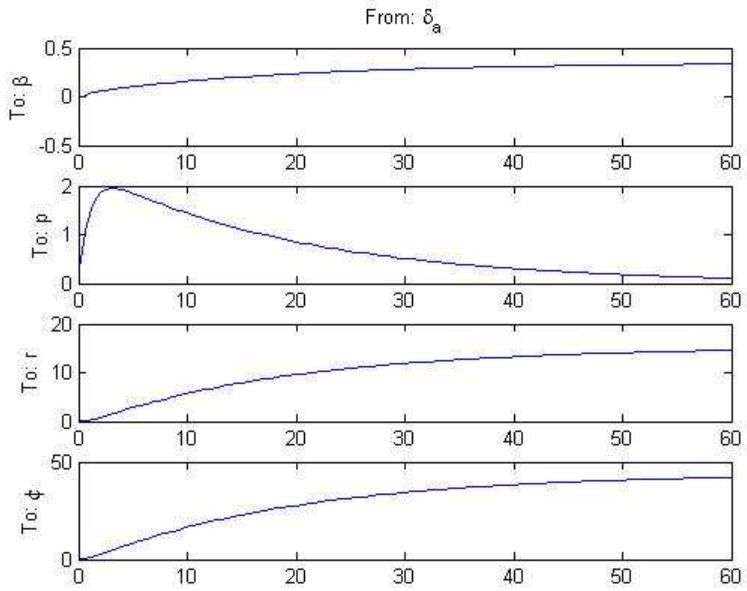

Figura 97 – Respuesta del control laterodireccional por asignación de polos respecto a los alerones

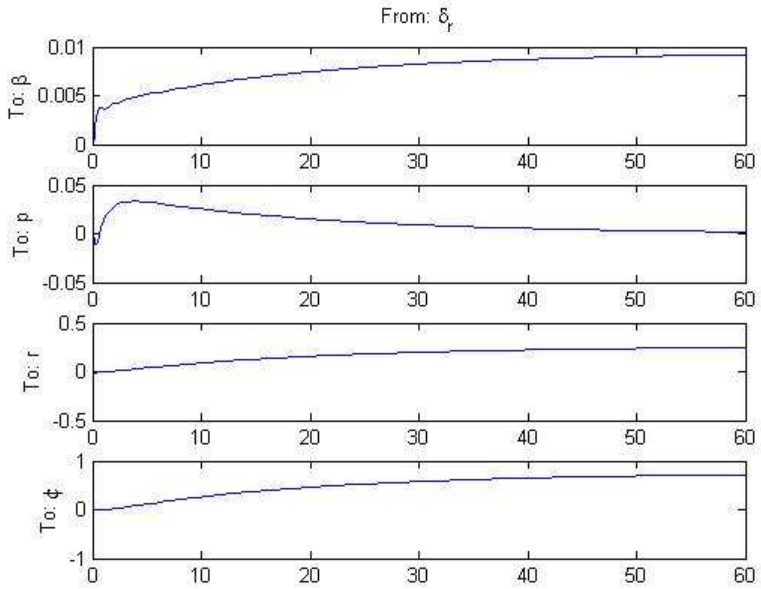

Figura 98 – Respuesta del control laterodireccional respecto al timón de dirección

Mirando el régimen de balanceo se ve que el modo balanceo prácticamente ya no afecta. La respuesta se ha vuelto mucho más lenta.

El modo espiral ahora es convergente, con una constante de tiempo muy larga también.

Finalmente el balanceo del holandés está tan amortiguado que como respuesta a los alerones ni aparece. Como respuesta al timón de dirección sí que se puede ver en el ángulo de guiñada y en el régimen de balanceo, pero también se ve muy amortiguado.

Se representa el diagrama de polos del sistema:

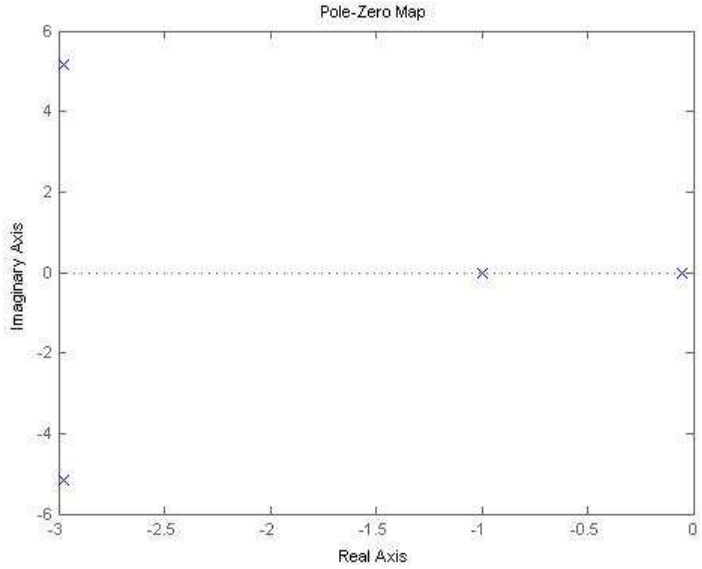

Figura 99 – Diagrama de polos del modo Laterodireccional con controlador por asignación de polos

Se puede ver que efectivamente los polos se han desplazado a los valores deseados. Ahora el polo dominante sigue siendo el que induce el modo espiral, pero ahora el modo con menos fuerza sobre la respuesta del sistema es el que induce el balanceo del holandés.

Finalmente se va a analizar el nuevo diagrama de Bode:

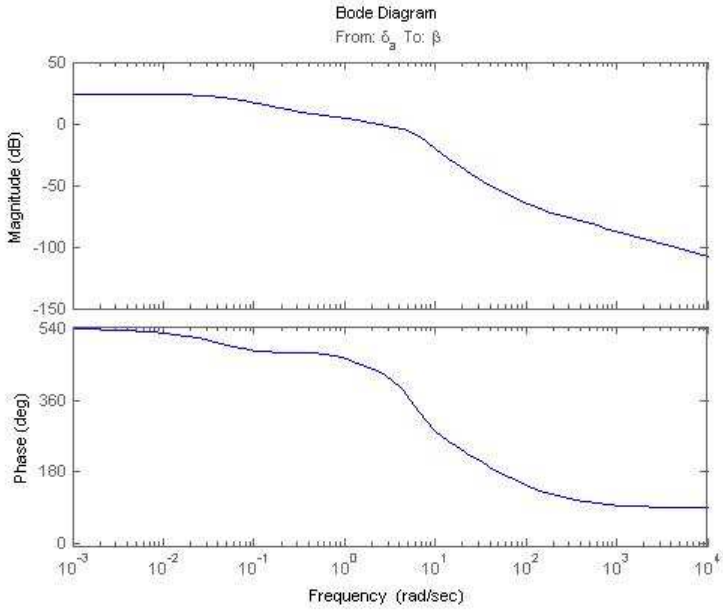

Figura 100 – Diagrama de Bode β vs alerones con controlador por asignación de polos

Al amortiguar los polos del balanceo del holandés se ha perdido la resonancia, tal y como se ha visto en la respuesta al escalón.

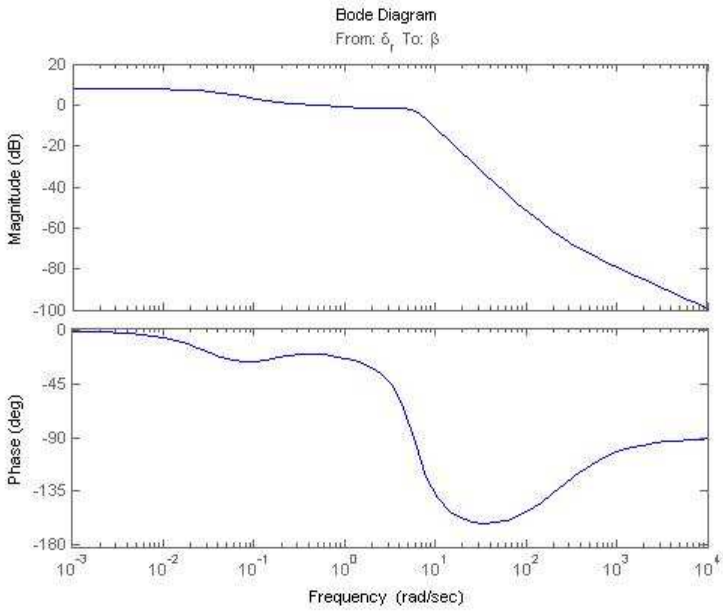

Figura 101 – Diagrama de Bode β vs timón de dirección con controlador por asignación de polos

Tal y como se veía en la respuesta al escalón, cuando la entrada es el timón de dirección sigue habiendo balanceo del holandés, de magnitud parecida a como era en lazo abierto.

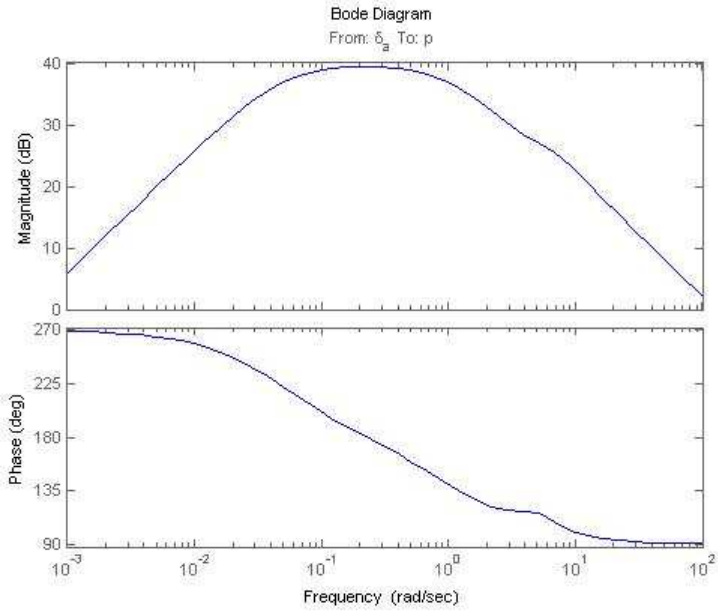

Figura 102 – Diagrama de Bode p vs alerones con controlador por asignación de polos

Si se compara el diagrama en lazo cerrado con lazo abierto de p con entrada en los alerones se puede ver que la ganancia ha aumentado mucho, aunque mantiene la misma forma y las mismas propiedades que en lazo abierto.

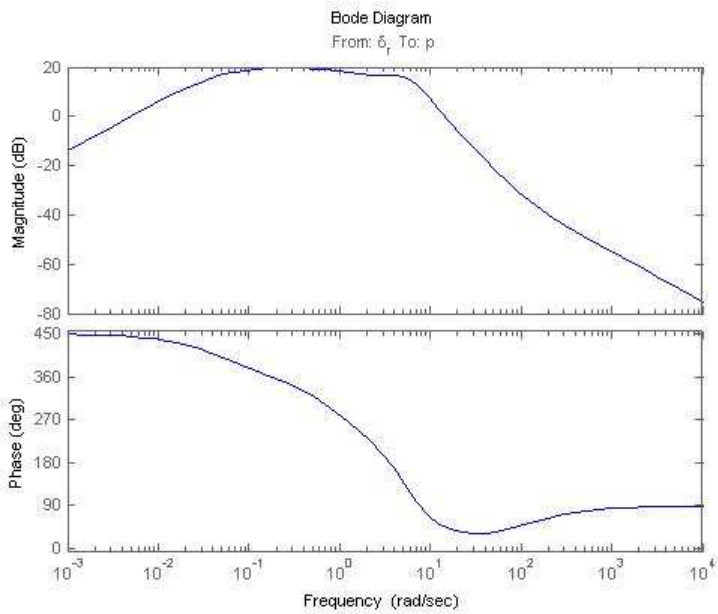

Figura 103 – Diagrama de Bode p vs timón de dirección con controlador por asignación de polos

El régimen de balanceo en lazo cerrado ahora ha perdido la resonancia a la frecuencia del balanceo del holandés. Pero ha aumentado la ganancia a frecuencias bajas.

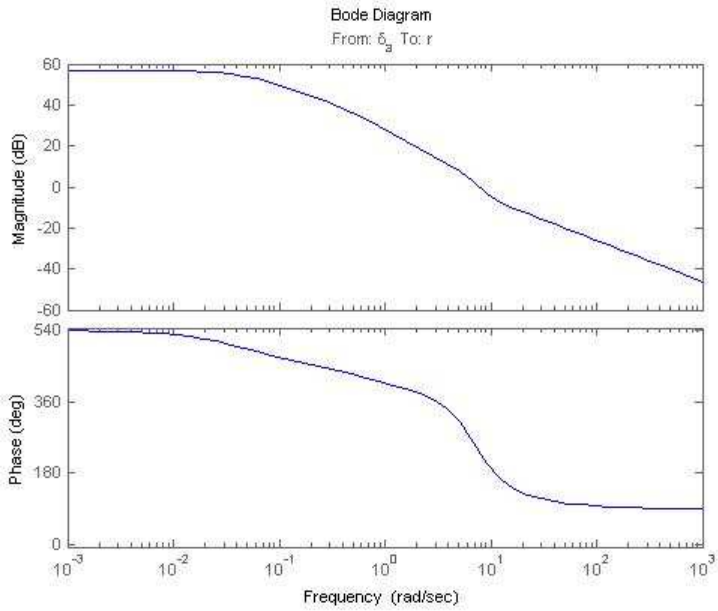

Figura 104 – Diagrama de Bode r vs alerones con controlador por asignación de polos

Se puede ver en este diagrama que también ha desaparecido la resonancia a la frecuencia del balanceo del holandés. Con lo que el régimen de guiñada sólo se ve afectado por frecuencias bajas, es decir por el modo espiral.

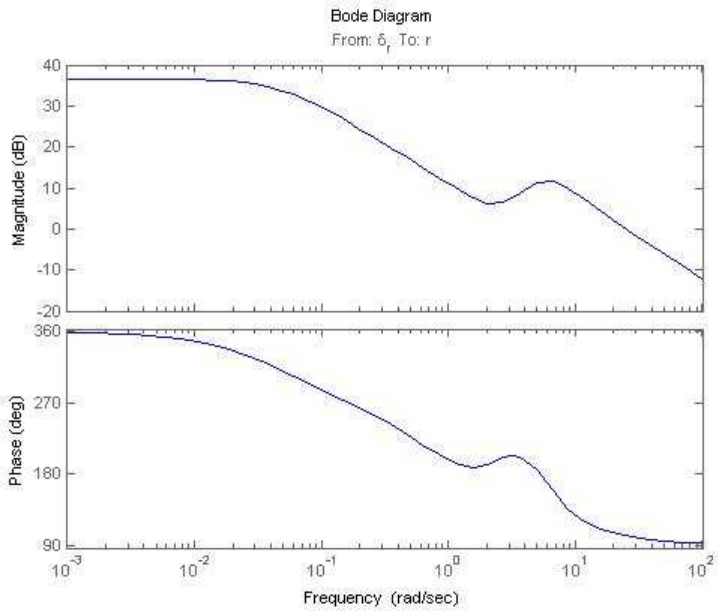

Figura 105 – Diagrama de Bode r vs timón de dirección con controlador por asignación de polos

En lazo abierto había una fuerte resonancia a la frecuencia del balanceo del holandés. Ahora prácticamente ha desaparecido y la ganancia se mantiene muy baja. Hay un poco de respuesta a esta frecuencia, tal y como se ha visto en la figura de respuesta al escalón.

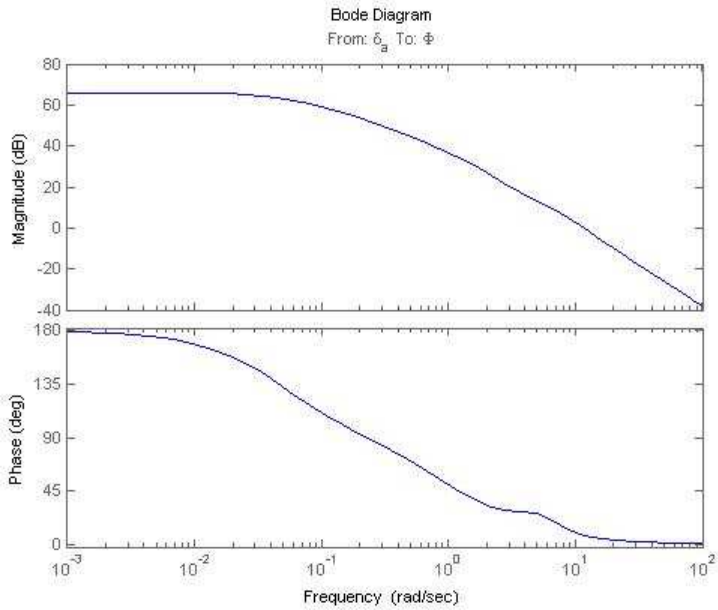

Figura 106 – Diagrama de Bode Φ vs alerones con controlador por asignación de polos

Se puede ver que la ganancia total a frecuencias bajas es mayor que la que había en lazo abierto.

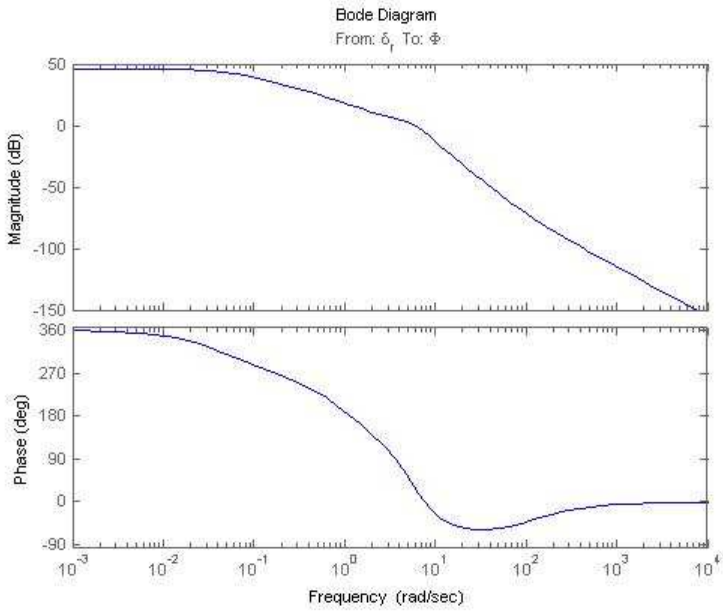

Figura 107 – Diagrama de Bode Φ vs timón de dirección con controlador por asignación de polos

La respuesta del ángulo de balanceo respecto al timón de dirección se mantiene prácticamente igual en términos de magnitud.

En todos los diagramas se puede observar que el diagrama de Bode del ángulo cambia en todos. Esto se debe a que en lazo abierto el sistema era inestable y ahora ya no.

Diseño de un controlador óptimo cuadrático

Como se ha comentado, para diseñar el controlador LQR son necesarias las matrices Q y R.

Primero se diseñará la matriz R. Tal y como está definida será una matriz diagonal con la inversa de los valores máximos al cuadrado que puede tomar cada entrada. Es decir, se debe poner el ángulo límite de deflexión de los alerones y del timón de dirección del UAV. Se han escogido 15º:

$$R = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\left(15^{o}\dfrac{\pi}{180^{o}}\right)^{2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\left(15^{o}\dfrac{\pi}{180^{o}}\right)^{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.06854 & 0 \\ 0 & 0.06854 \end{pmatrix}$$

Para diseñar la matriz Q se necesitan los valores máximos que se van a permitir adquirir a las variables de estado v, p, r y Φ. Se han escogido los valores:

$$\left.\begin{array}{l} v_{máx} = 15\,\text{m/s} \\ p_{máx} = 1\,\text{rad/s} \\ r_{máx} = 1\,\text{rad/s} \\ \Phi_{máx} = 0.5236\,\text{rad} \end{array}\right\} \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 0.00444 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.64755 \end{pmatrix}$$

El valor de v se ha escogido para que el UAV no haga movimientos bruscos de más de 30º con una entrada de referencia de 15º, redondeando al alza. El valor de p y r se ha escogido para que la velocidad de respuesta no sea demasiado grande. Finalmente, el valor de Φ se ha escogido para que el UAV no haga movimientos bruscos de más de 30º con una entrada de referencia de 15º, igual que con v.

Después de unas pruebas se ha comprobado que el valor de la variable $\overline{p}$ no afecta mucho a la respuesta, así se ha decidido un valor unitario.

Se ha obtenido la matriz de control:

$$K = \begin{bmatrix} 0.0076 & -3.6823 & -0.0748 & -7.3745 \\ 0.1817 & 0.0795 & -3.7893 & 0.5536 \end{bmatrix}$$

Se introduce la matriz en el modelo de Simulink y se obtiene:

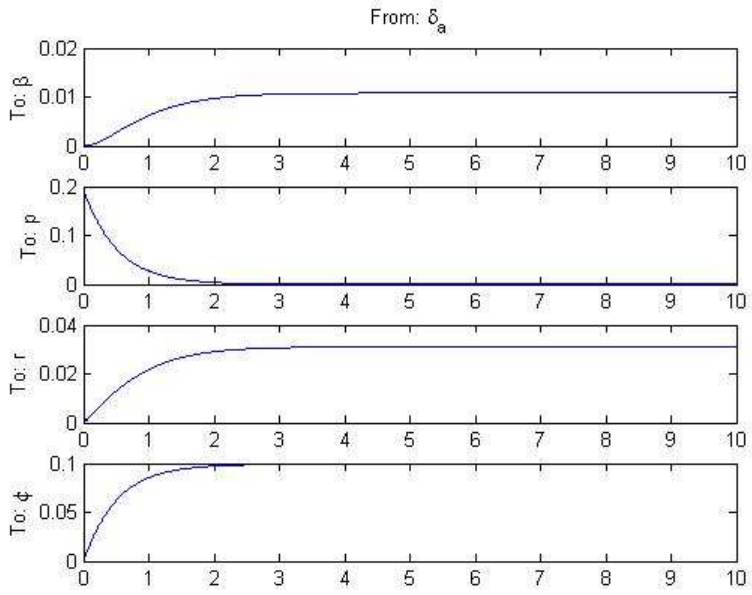

Figura 108 – Respuesta del sistema a los alerones con controlador LQR

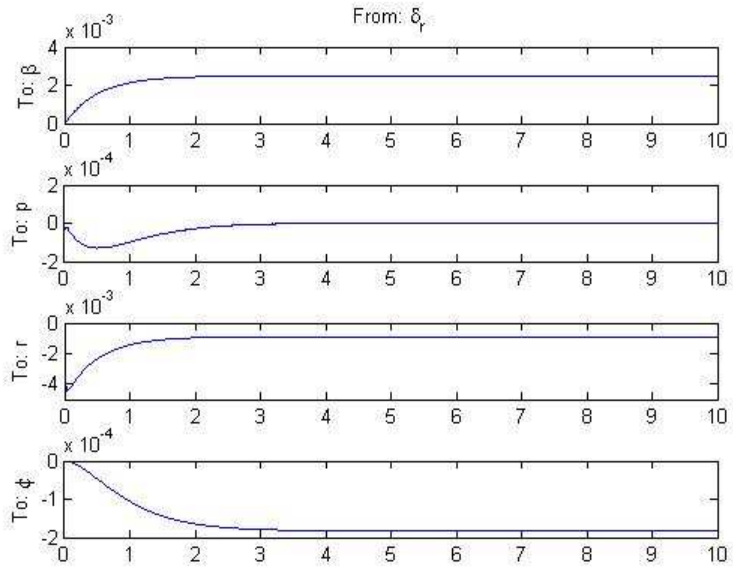

Figura 109 – Respuesta del sistema al timón de dirección con controlador LQR

Lo primero que se observa es que la respuesta es mucho más rápida que la que había en lazo abierto, se estabiliza en 4 o 5 segundos.

Si se mira el modo balanceo, que se puede apreciar en la figura 107, la respuesta al régimen de balanceo es tan rápida que ni se ve, aunque se intuye. En muy poco tiempo adquiere el valor de amplitud 0.2 rad/s.

Si se mira el modo espiral se ve que ahora es estable y es muy rápido, es decir tiene una constante de tiempo muy pequeña.

Finalmente, se puede ver que prácticamente no hay balanceo del holandés. El amortiguamiento ahora es muy alto con lo que no oscila o no da tiempo a oscilar.

Se representa el diagrama de polos del sistema:

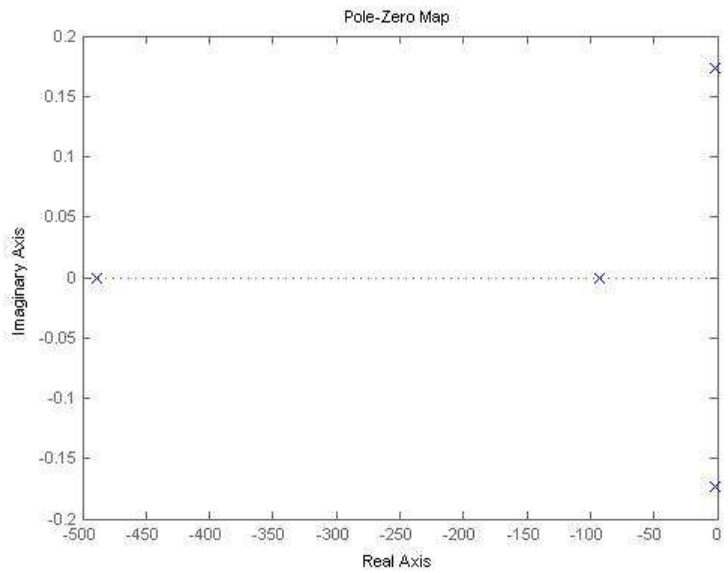

Figura 110 – Diagrama de polos del sistema Laterodireccional con controlador LQR

Se puede ver lo que se imaginaba al ver la respuesta del sistema al escalón. Los polos se han desplazado mucho a la izquierda, haciendo sus respuestas muy rápidas.

El nuevo polo del modo Balanceo es:

$$p_1 = -489; \tau = 0.0020s$$

La respuesta que produce este polo es muy rápida. Como en el caso del controlador longitudinal, el controlador LQR hace que los polos tomen valores muy estables, con lo que produce respuestas muy rápidas.

El nuevo polo del modo Espiral es:

$$p_1 = -93; \tau = 0.0108s$$

El nuevo polo del modo Espiral se ha alejado tanto del origen que es muy estable. Esto hace que ahora sea un modo convergente espiral muy rápido.

Los nuevos polos del balanceo del holandés son:

$$p_{2,3} = -1.93 \pm 0.174\,j\,;\,\omega_n = 1.94 rad/s\,;\,\zeta = 0.996\,;\,\tau = 0.5181 s$$

Como se preveía, el amortiguamiento se ha aumentado mucho. Con este amortiguamiento prácticamente no oscila, como ya se ha visto. Se puede ver que no sólo se ha aumentado el amortiguamiento, sino que se ha reducido mucho la frecuencia.

Ahora se va a analizar el diagrama de Bode de este sistema:

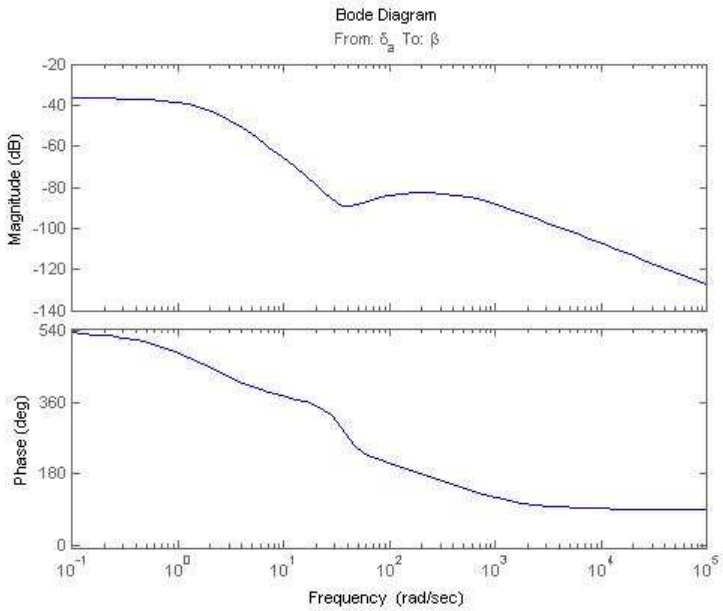

Figura 111 – Diagrama de Bode β vs alerones con controlador LQR

La respuesta del diagrama de bode es parecida a la que había en lazo abierto. Se ha perdido la resonancia a la frecuencia del balanceo del holandés ya que ahora está muy amortiguado.

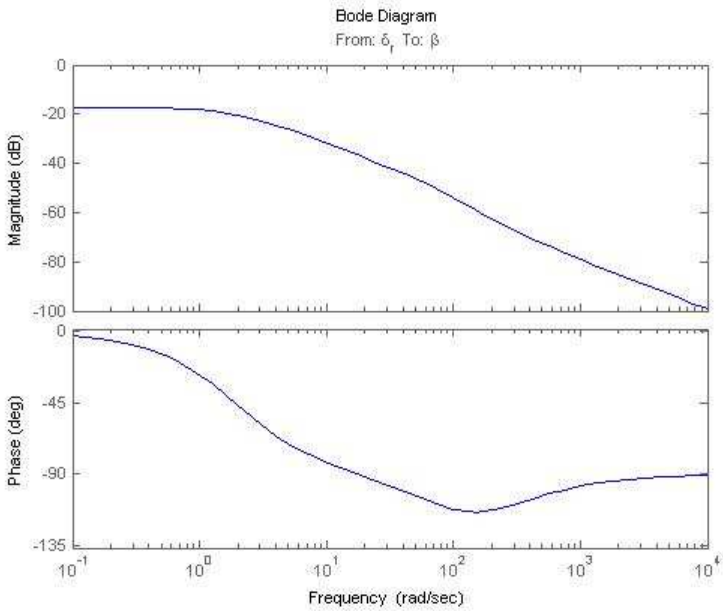

Figura 112 – Diagrama de Bode β vs timón de dirección con controlador LQR

Igual que en la respuesta de los alerones, la respuesta es muy parecida a la que había en lazo abierto, sólo que más suave.

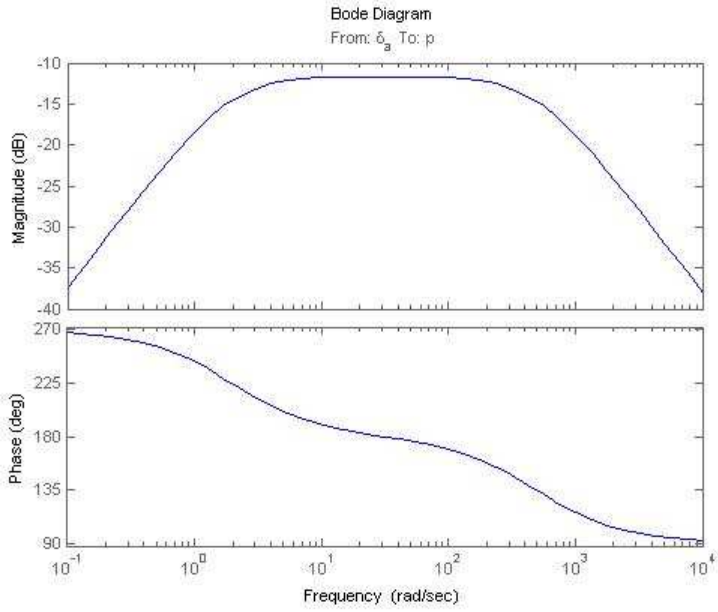

Figura 113 – Diagrama de Bode p vs alerones con controlador LQR

Se puede ver que también se ha suavizado la respuesta en frecuencia del régimen de balanceo cuando se controla desde los alerones.

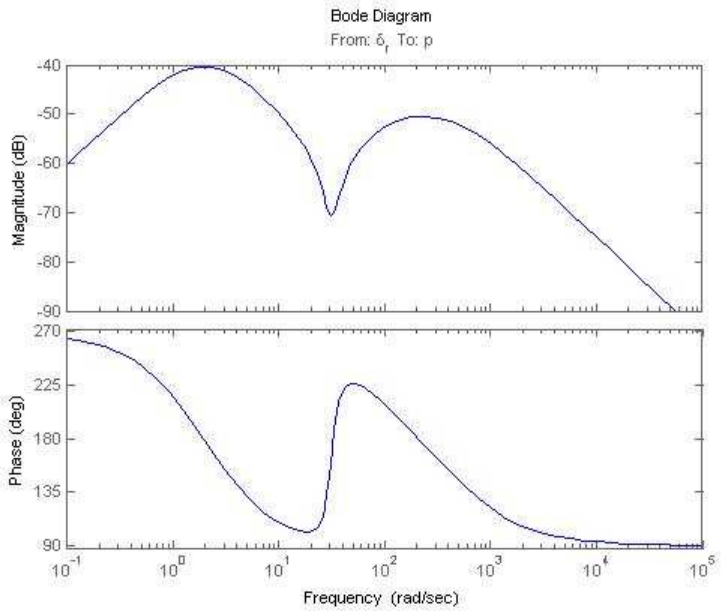

Figura 114 – Diagrama de Bode p vs timón de dirección con controlador LQR

La respuesta en frecuencia del régimen de balanceo controlado por el timón de dirección se ha estropeado con respecto a la que había en lazo abierto. Ha aparecido un cero a una alta frecuencia, lo que hace que deje de tener una forma suave y medio uniforme hasta que empieza a caer su ganancia.

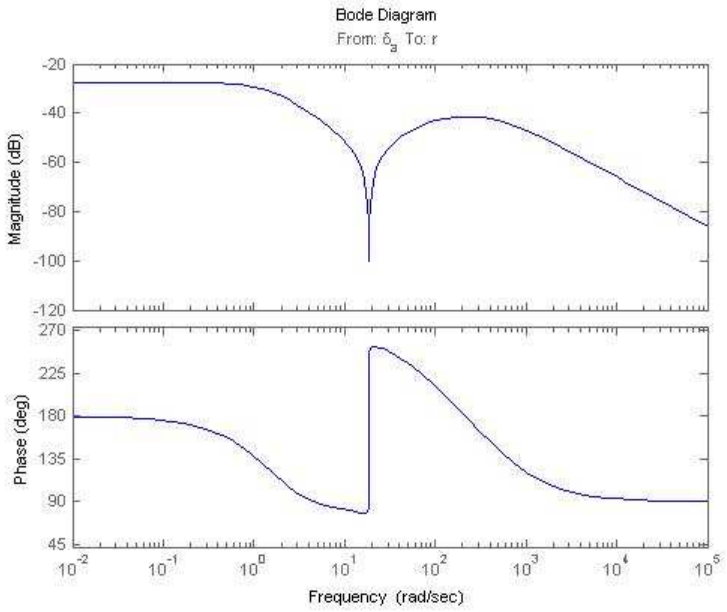

Figura 115 – Diagrama de Bode r vs alerones con controlador LQR

En el régimen de guiñada también ha aparecido un cero a una frecuencia alta.

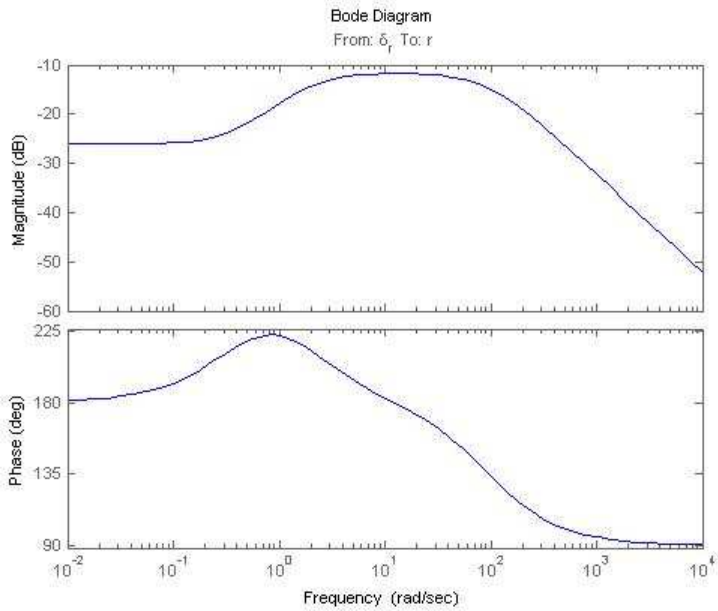

Figura 116 – Diagrama de Bode r vs timón de dirección con controlador LQR

La respuesta del régimen de guiñada con respecto al timón de dirección ha cambiado completamente. Ahora es más alta a frecuencias altas que a frecuencias muy bajas.

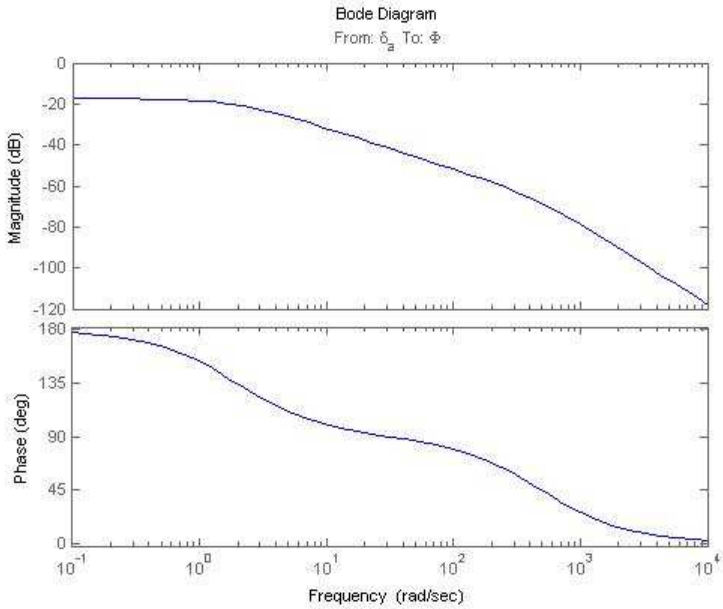

Figura 117 – Diagrama de Bode Φ vs alerones con controlador LQR

La respuesta en frecuencia del ángulo de balanceo con respecto a los alerones no ha cambiado, tiene la misma forma, pero más suavizada.

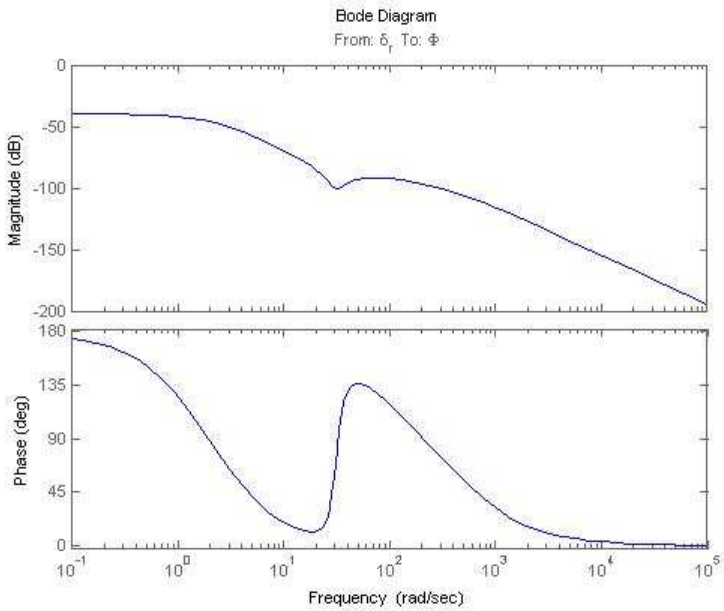

Figura 118 – Diagrama de Bode Φ vs timón de dirección con controlador LQR

En la respuesta del ángulo de balanceo respecto al timón de dirección también aparece el cero a esa frecuencia alta.

Viendo todos los diagramas de Bode del control laterodireccional realimentado con un controlador LQR se puede decir que sólo se deben usar señales de control a una frecuencia muy baja. Si se usan frecuencias altas de órdenes para controlar el UAV se puede incurrir en los ceros que han aparecido, de modo que la respuesta del sistema no sea, ni se parezca a la deseada.

5.2.3. Comparación de resultados obtenidos

A continuación se van a comparar los polos en lazo abierto con los que se han obtenido en lazo cerrado.

Primero para el modo de balanceo:

Controlador	Polo	τ (s)
Lazo Abierto	-19.5866	0.0511
Asignación de polos	-1	1
LQR	-489	0.0020

Tabla 8 – Comparativa de los polos del modo de balanceo

El modo de balanceo propio del UAV tiene una constante de tiempo muy pequeña, con lo que tiene una respuesta demasiado rápida si el valor que adquiere es grande. Para ello se han diseñado un nuevo polo que haga la respuesta más lenta. El controlador LQR

obtenido aumenta mucho la velocidad de este modo, pero se ha diseñado para que no supere un valor máximo de régimen de balanceo.

Para el modo espiral:

Controlador	Polo	τ (s)
Lazo Abierto	0.0424	23.5849
Asignación de polos	-0.05	20
LQR	-93	0.0108

Tabla 9 – Comparativa de los polos del modo espiral

El modo espiral propio del UAV es divergente, es decir inestable, aunque con una constante de tiempo suficientemente grande como para corregirla. Se ha diseñado un nuevo polo con el que se estabilice este modo, manteniendo una constante de tiempo similar. El controlador LQR obtenido estabiliza mucho este modo, de manera que la velocidad sea muy grande, con una constante de tiempo del orden de 1000 veces menor.

Y para el balanceo del holandés:

Controlador	Polo	ω_n (rad/s)	ζ	τ (s)
Lazo Abierto	-1.0664±5.8505j	5.9469	0.1793	0.9377
Asignación de polos	-2.9735±5.15j	5.9469	0.5	0.3363
LQR	-1.93±0.174j	1.94	0.996	0.5181

Tabla 10 – Comparativa de los polos del balanceo del holandés

El balanceo del holandés propio del UAV es bastante rápido y tiene poco amortiguamiento, con lo que hace que sea difícil de controlar. Para mejorarlo se han diseñado unos nuevos polos con los que se aumente bastante el amortiguamiento y se estabilice antes. El controlador LQR obtenido aumenta mucho más el amortiguamiento y hace que la oscilación sea más lenta, mejorando mucho este modo.

En definitiva:

- El controlador diseñado mediante asignación de polos hace que los modos de balanceo y espiral sean más lentos y más fáciles de controlar por el piloto del UAV que los que habían en lazo abierto y con el controlador LQR.

- El controlador óptimo cuadrático hace que los modos del UAV sean, en general, mucho más estables y mucho más rápidos que los diseñados por asignación de polos y los que había en lazo abierto.

6. Conclusiones

Desde hace unos años, se está invirtiendo mucho en UAV. Cada vez se desarrollan modelos matemáticos y leyes de control mejores. Un UAV puede ser controlado desde un operador en tierra o, como se está investigando mucho, puede ser autónomo, con una misión ejecutada sin operador. En este proyecto se trata el UAV como una aeronave no tripulada pero operada desde tierra, con lo que la ley de control puede ser más flexible que en un UAV autónomo, pero debe ser más estricta que la de una aeronave tripulada.

Durante mucho tiempo se ha tratado el UAV desde el punto de vista del control clásico, es decir mediante funciones de transferencia y realimentaciones de las salidas. El control clásico tiene la ventaja de poder controlar una sola variable muy bien. Pero no permite controlar todas las variables a la vez sin un gran cálculo de por medio, realimentando una salida detrás de otra y operando. En este punto, la ingeniería de control moderna ofrece grandes soluciones y gran facilidad de cálculo. Al modelizar un sistema en un espacio de estados se permite controlar todas las salidas del sistema de forma única, ahorrando mucho tiempo de cálculo.

Para poder realizar satisfactoriamente una ley de control para nuestro sistema, es también necesario que nuestro sistema sea lo más parecido posible al real. En este proyecto se ha modelado matemáticamente el UAV, del departamento de aerotécnia de la EUITA, mediante unas condiciones de vuelo determinadas y aproximación a pequeñas perturbaciones. Con éstos métodos se consigue tener unos modelos matemáticos muy fiables, pero a coste de perder cierta maniobrabilidad. Al aproximar a pequeñas perturbaciones, se diseña un modelo matemático que responde fielmente a ángulos de deflexión, de las superficies de control, pequeños. Este modelo matemático está diseñado para condiciones de vuelo de crucero y con altitud constante, con lo que no permite operar la altura directamente y sólo funciona para la altura a la que se ha diseñado.

Aunque el modelo esté limitado, estas limitaciones se compensan con creces con la facilidad de cálculo que se obtiene a cambio.

Al analizar el modelo en espacio de estados del movimiento longitudinal en lazo abierto se ha visto que el modo de oscilación fugoide estaba poco amortiguado y que el modo de periodo corto era demasiado rápido. Para mejorarlo se han seguido unos criterios de vuelo, basados en el tipo de aeronave que es este UAV y el tipo de vuelo que realice, y se han decidido los nuevos polos del sistema en lazo cerrado. Se ha diseñado una ley de control mediante asignación de polos, la cual ha producido una respuesta mucho más suave y lenta que la que había en lazo abierto. Como alternativa, se han escogido unos valores máximos para las variables de estado y para la entrada del sistema, para diseñar

una ley de control óptimo cuadrático, o LQR. La ley de control LQR que se ha obtenido ha producido una respuesta mucho más brusca y rápida que la que había en lazo abierto.

Al analizar el modelo en espacio de estados del movimiento laterodireccional en lazo abierto se ha visto que tenía una respuesta inestable. El modo balanceo estaba presente y muy rápido, había balanceo del holandés poco amortiguado y un modo espiral divergente, el cual nos producía la respuesta inestable. Para corregir estos modos, se han seguido unos criterios de diseño, para calcular unos nuevos polos en lazo cerrado. Esta ley de control se ha diseñado mediante la técnica de asignación de polos, con la cual se ha obtenido una respuesta mucho más lenta, suave y estable. Como alternativa, se ha diseñado una ley de control óptimo cuadrático, la cual ha producido una respuesta, en general, más rápida que la que se ha obtenido mediante asignación de polos.

La técnica de asignación de polos es muy útil. Si se diseñan los nuevos polos con cuidado, se consigue obtener una respuesta del sistema estable, lenta y fácilmente corregible por el piloto. En este proyecto se han diseñado los nuevos polos mediante un criterio para aeronaves pilotadas, con lo que el tipo de respuesta que se ha obtenido es generalmente lenta por que las fases de crucero son muy largas y con poca desviación de ruta.

La técnica del controlador óptimo cuadrático es muy potente. La gran ventaja de este tipo de controlador es que independientemente del tipo de matrices Q y R que se seleccionen siempre se obtendrá una respuesta estable del sistema. Al relacionar las variables de estado del sistema con la matriz Q, se establecen unos valores máximos que no se quieren superar, con lo que la nueva posición de los polos puede llegar a ser secundario a la hora del diseño de esta ley de control. En general esta técnica da como resultado unos polos muy estables, es decir muy alejados del origen. Al estar los polos tan alejados del origen, la respuesta temporal del sistema es muy rápida, normalmente demasiado para el tipo de control que se quiere en un UAV.

El programa Simulink ha resultado de mucha utilidad a la hora de analizar, modelar y simular los modelos matemáticos obtenidos. Una vez se ha diseñado el modelo en lazo abierto y en lazo cerrado sólo ha hecho falta ir cambiando el valor del controlador K e ir probando. Así, se han verificado muchos controladores distintos, de forma rápida y fácil, hasta llegar a los resultados finales aquí mostrados.

Finalmente, en este proyecto se han desarrollado dos leyes de control estáticas, con controladores sencillos. Con lo que se han obtenido los 2 extremos en los tipos de respuesta, o muy lentas o muy rápidas. Para obtener un tipo de respuesta diferente se podría diseñar otro tipo de controlador, como un controlador dinámico. Por ejemplo, añadiendo un integrador, o un derivador, o ambos y diseñar un tipo de controlador PID.

Bibliografía

Automatic Control of Aicraft and Missiles. Second Edition. John H. Blakelock.

Sistemas de Control Moderno. 10ª Edición. Richard C. Dorf & Robert H. Bishop.

Introduction to Mathematical Control Theory. Second Edition. S. Barnett & R. G. Cameron

[2] Flight Mechanics Modeling and Analysis, Jitendra R. Raol & Jatinder Singh

[1] Pilot's Handbook of Aeronautical Knowledge. 2008 edition. Federal Aviation Administration

Ingeniería de Control Moderna. 4ª Edición. Katsuhiko Ogata

Flight Stability and Automatic Control. 1989 Edition. Dr. Robert C. Nelson

Flight Control Systems: practical issues in design and implementation. Roger Pratt, Institution of Electrical Engineers.

http://www.inta.es/programasAltaTecnologia.aspx?Id=1&SubId=3

http://www.pbs.org/wgbh/nova/spiesfly/uavs.html

http://www.ateneadigital.es/RevistaAtenea/REVISTA/articulos/GestionNoticias_1887_ESP.asp

ANEXO I – Archivo.m Modelo longitudinal

```
%----Modelo Longitudinal

% Primera parte: Coeficientes propios del UAV y condiciones de vuelo

S = 0.55; %Superficie alar
c = 0.189941; %Cuerda media aerodinámica
b = 2.8956; %Envergadura
e = 0.75; %Factor de Oswald
m = 13.5; %Masa

Iy = 1.135; %Inercia YY

CLo = 0.23; %Sustentación vs u
CLa = 5.6106; %Sustentación vs alpha
CLq = 7.9543; %Sustentación vs q
CLad = 1.9724; %Sustentación vs alpha'
CLde = 0.13; %Sustentación vs timón de profundidad

CDo = 0.0434; %Resistencia vs u
CDde = 0.0135; %Resistencia vs timón de profundidad
CT=-0.04; %Empuje vs u

Cmo = 0.135; %Momento de cabeceo vs u
Cma = -2.7397; %Momento de cabeceo vs alpha
Cmq = -38.2067; %Momento de cabeceo vs q
Cmad = -10.3796; %Momento de cabeceo vs alpha'
Cmde = -0.9918; %Momento de cabeceo vs timón de profundidad

g = 9.8; %Gravedad
z = 2000; %Altitud
U = 100/3.6; % Velocidad 100km/h a m/s
rho = 1.225*((288-0.0065*z)/288)^(g/(287*0.0065)-1); %Densidad
q = 0.5*rho*U^2; %Presión dinámica

% Segunda parte: Coeficientes de las matrices de estado

%-Variables Matriz A y B variable de estado u
CXu = (q*S/(m*U))*(-2*CDo+CT);
CXw = (q*S/(m*U))*(CLo-2*CLo/(pi*e));
CXde = -(q*S/m)*CDde;

%-Variables Matriz A y B variable de estado w
CZwd = -c*(q*S/(m*U^2))*CLad/2;

CZu = -2*(q*S/(m*U))*CLo;
Zu = CZu/(1-CZwd);

CZw = -(q*S/(m*U))*(CLa+CDo);
Zw = CZw/(1-CZwd);

CZq=-c*(q*S/(m*U))*CLq/2;
Zq = (CZq+U)/(1-CZwd);
```

```
CZde = -(q*S/m)*CLde;
Zde = CZde/(1-CZwd);

%-Variables Matriz A y B variable de estado q
CMwd = 0.5*(q*S*c^2/(U*Iy))*Cma;

CMu = 2*(q*S*c/(U*Iy))*Cmo;
Mu=CMu+CMwd*Zu;

CMw = (q*S*c/(U*Iy))*Cma;
Mw=CMw+CMwd*Zw;

CMq = 0.5*(q*S*c^2/(U*Iy))*Cmq;
Mq=CMq+CMwd*Zq;

CMde = (q*S*c/Iy)*Cmde;
Mde=CMde+CMwd*Zde;

% Matrices del espacio de estados

A=[CXu,CXw,0,-g; Zu,Zw,Zq,0; Mu,Mw,Mq,0; 0,0,1,0];

B=[CXde; Zde; Mde; 0];

C=eye(4);
C(2,2)=1/U;

D=zeros(4,1);

% Estas matrices se introducen en simulink para la respuesta al
escalón
% También se hace el espacio de estados para operar con él en matlab
estados = {'u','w','q','\theta'};
entradas = {'\delta_e'};
salidas = {'u','\alpha','q','\theta'};

SYS = ss(A,B,C,D,'statename',estados,'inputname',entradas,...
    'outputname',salidas);

%-----------------------------------------------------------------
% Análisis en lazo Abierto
%-----------------------------------------------------------------

% Al hacer la simulación con Simulink se reciben los datos de
% la simulación en la variable Y. Es una variable tipo 'struct'
% con lo que hay que operar para hacer las gráficas

t=Y.time;
u=Y.signals.values(1:length(t),1);
alpha=Y.signals.values(1:length(t),2);
q=Y.signals.values(1:length(t),3);
theta=Y.signals.values(1:length(t),4);

%Respuesta al escalón de simulink
figure
subplot(4,1,1), plot(t,u), ylabel('To: u'), title('From: \delta_e')
subplot(4,1,2), plot(t,alpha), ylabel('To: \alpha')
```

```
subplot(4,1,3), plot(t,q), ylabel('To: q')
subplot(4,1,4), plot(t,theta), ylabel('To: \theta')

[Wn,Z,P] = DAMP(SYS) %Cálculo de Polos

figure
pzmap(SYS) %diagrama de polos y ceros

figure
bode(SYS(1)) %diagrama de bode u
figure
bode(SYS(2)) %diagrama de bode alpha
figure
bode(SYS(3)) %diagrama de bode q
figure
bode(SYS(4)) %diagrama de bode theta

%-----------------------------------------------------------------
% Análisis en Lazo Cerrado, Asignación de polos
%-----------------------------------------------------------------

W=3.14; %frecuencia polo periodo corto
am=0.9; %amortiguamiento polo periodo corto

polospc=[-W*am-W*sqrt(am^2-1), -W*am+W*sqrt(am^2-1)];

W=0.4244; %frecuencia polo fugoide
am=0.5;

polosf=[-W*am-W*sqrt(am^2-1), -W*am+W*sqrt(am^2-1)];

%se redondean y se introducen en el vector polos:
polos=[-2.82+1.37j,-2.82-1.37j, -0.2122+0.3675j, -0.2122-0.3675j];

K=place(A,B,polos) %cálculo de la matriz de control K

%------------- Fijar BREAKPOINT
% Se introduce en Simulink y se simula, recibiendo los datos en Y

t=Y.time;
u=Y.signals.values(1:length(t),1);
alpha=Y.signals.values(1:length(t),2);
q=Y.signals.values(1:length(t),3);
theta=Y.signals.values(1:length(t),4);

%Respuesta al escalón de simulink
figure
subplot(4,1,1), plot(t,u), ylabel('To: u'), title('From: \delta_e')
subplot(4,1,2), plot(t,alpha), ylabel('To: \alpha')
subplot(4,1,3), plot(t,q), ylabel('To: q')
subplot(4,1,4), plot(t,theta), ylabel('To: \theta')

% Para ver el valor de los nuevos polos, el diagrama de polos y ceros
% y los diagramas de bode hay que hacer una realimentación

aux=augstate(SYS); %se puede acceder a las variables de estado
%variables de estado en posiciones 5:8
```

```
SYS_AP=feedback(aux,K,1,5:8); %espacio de estados en lazo cerrado

[Wn,Z,P] = DAMP(SYS_AP) %Cálculo de Polos

figure
pzmap(SYS_AP) %diagrama de polos y ceros

figure
bode(SYS_AP(1)) %diagrama de bode u
figure
bode(SYS_AP(2)) %diagrama de bode alpha
figure
bode(SYS_AP(3)) %diagrama de bode q
figure
bode(SYS_AP(4)) %diagrama de bode theta

%-----------------------------------------------------------------
% Análisis en Lazo Cerrado, LQR
%-----------------------------------------------------------------

angulo=15; %angulo de máxima deflexión del timón de profundidad
R=1/(angulo*pi/180)^2; %matriz R

umax=2; %máxima velocidad en m/s
wmax=15; %máxima velocidad en m/s, a partir del ángulo alpha (30º)
qmax=1; %máximo régimen de cabeceo en rad/s
thetamax=0.5236; %máximo ángulo en radianes (30º)

Q=eye(4);
Q(1,1)=1/umax^2;
Q(2,2)=1/wmax^2;
Q(3,3)=1/qmax^2;
Q(4,4)=1/thetamax^2;

p=1; %valor de p según la fórmula LQR

[K,S,E] = LQR(sys,Q,p*R); %matriz de control K en LQR

%------------- Fijar BREAKPOINT
% Se introduce en Simulink y se simula, recibiendo los datos en Y

t=Y.time;
u=Y.signals.values(1:length(t),1);
alpha=Y.signals.values(1:length(t),2);
q=Y.signals.values(1:length(t),3);
theta=Y.signals.values(1:length(t),4);

%Respuesta al escalón de simulink
figure
subplot(4,1,1), plot(t,u), ylabel('To: u'), title('From: \delta_e')
subplot(4,1,2), plot(t,alpha), ylabel('To: \alpha')
subplot(4,1,3), plot(t,q), ylabel('To: q')
subplot(4,1,4), plot(t,theta), ylabel('To: \theta')

SYS_LQR=feedback(aux,K,1,5:8); %espacio de estados en lazo cerrado
```

```
[Wn,Z,P] = DAMP(SYS_LQR) %Cálculo de Polos

figure
pzmap(SYS_LQR) %diagrama de polos y ceros

figure
bode(SYS_LQR(1)) %diagrama de bode u
figure
bode(SYS_LQR(2)) %diagrama de bode alpha
figure
bode(SYS_LQR(3)) %diagrama de bode q
figure
bode(SYS_LQR(4)) %diagrama de bode theta
```

ANEXO II – Archivo.m Modelo laterodireccional

```
%----Modelo Laterodireccional

% Primera parte: Coeficientes propios del UAV y condiciones de vuelo

S = 0.55; %Superficie alar
c = 0.189941; %Cuerda media aerodinámica
b = 2.8956; %Envergadura
e = 0.75; %Factor de Oswald
m = 13.5; %Masa

Ix = 0.8244; %Inercia XX
Iz = 1.759; %Inercia ZZ
Ixz = 0.1204; %Inercias XZ-ZX

Clb = -0.13; %Momento de balanceo vs beta
Clp = -0.5051; %Momento de balanceo vs régimen de balanceo
Clr = 0.2519; %Momento de balanceo vs régimen de guiñada
Clda = -0.1695; %Momento de balanceo vs alerones
Cldr = 0.0024; %Momento de balanceo vs timón de dirección

CYb = -0.83; %Fuerzas laterales vs beta
CYda = -0.075; %Fuerzas laterales vs alerones
CYdr = 0.1914; %Fuerzas laterales vs timón de dirección

Cnb = 0.0726; %Momento de guiñada vs beta
Cnp = -0.069; %Momento de guiñada vs régimen de balanceo
Cnr = -0.0946; %Momento de guiñada vs régimen de guiñada
Cnda = 0.0108; %Momento de guiñada vs alerones
Cndr = -0.0693; %Momento de guiñada vs timón de dirección

g = 9.8; %Gravedad
z = 2000; %Altitud
U = 100/3.6; % Velocidad 100km/h a m/s
rho = 1.225*((288-0.0065*z)/288)^(g/(287*0.0065)-1); %Densidad
q = 0.5*rho*U^2; %Presión dinámica

% Segunda parte: Coeficientes de las matrices de estado

%-Variables Matriz A y B variable de estado v
CYv = (q*S/(m*U))*CYb;
Yda = (q*S/m)*CYda;
Ydr = (q*S/m)*CYdr;

%-Variables Matriz A y B variable de estado p y r
CLv = (q*S*b/(Ix*U))*Clb;
CLp = 0.5*(q*S*b^2/(Ix*U))*Clp;
CLr = 0.5*(q*S*b^2/(Ix*U))*Clr;
CLda = (q*S*b/Ix)*Clda;
CLdr = (q*S*b/Ix)*Cldr;

CNv = (q*S*b/(Iz*U))*Cnb;
CNp = 0.5*(q*S*b^2/(Iz*U))*Cnp;
CNr = 0.5*(q*S*b^2/(Iz*U))*Cnr;
CNda = (q*S*b/Iz)*Cnda;
```

```
CNdr = (q*S*b/Iz)*Cndr;

ci = Ix*Iz/(Ix*Iz-Ixz^2);

%Variables P
Lv = ci*(CLv+Ixz*CNv/Ix);
Lp = ci*(CLp+Ixz*CNp/Ix);
Lr = ci*(CLr+Ixz*CNr/Ix);
Lda = ci*(CLda+Ixz*CNda/Ix);
Ldr = ci*(CLdr+Ixz*CNdr/Ix);
%Variables r
Nv = ci*(CNv+Ixz*CLv/Iz);
Np = ci*(CNp+Ixz*CLp/Iz);
Nr = ci*(CNr+Ixz*CLr/Iz);
Nda = ci*(CNda+Ixz*CLda/Iz);
Ndr = ci*(CNdr+Ixz*CLdr/Iz);

% Matrices del espacio de estados
A = [CYv, 0, -U, g;Lv, Lp, Lr, 0;Nv, Np, Nr, 0;0, 1, 0, 0];

B = [Yda, Ydr;Lda, Ldr;Nda, Ndr;0, 0];

C = eye(4);
C(1,1) = 1/U;

D = zeros(4,2);

% Estas matrices se introducen en simulink para la respuesta al
escalón
% También se hace el espacio de estados para operar con él en matlab
estados = {'v','p','r','\Phi'};
entradas = {'\delta_a','\delta_r'};
salidas = {'\beta','p','r','\Phi'};

SYS = ss(A,B,C,D,'statename',estados,'inputname',entradas,...
    'outputname',salidas);

%-----------------------------------------------------------------
% Análisis en Lazo Abierto
%-----------------------------------------------------------------

% Al hacer la simulación con Simulink se reciben los datos de
% la simulación en la variable Y. Es una variable tipo 'struct'
% con lo que hay que operar para hacer las gráficas

%BREAKPOINT - Simulación alerones como entrada
t=Y.time;
beta=Y.signals.values(1:length(t),1);
p=Y.signals.values(1:length(t),2);
r=Y.signals.values(1:length(t),3);
phi=Y.signals.values(1:length(t),4);

%Respuesta al escalón de simulink entrada alerones
figure
subplot(4,1,1),   plot(t,beta),   ylabel('To:   \beta'),   title('From:
\delta_a')
subplot(4,1,2), plot(t,p), ylabel('To: p')
subplot(4,1,3), plot(t,r), ylabel('To: r')
```

```
subplot(4,1,4), plot(t,phi), ylabel('To: \phi')

%BREAKPOINT - Simulación timón de dirección como entrada
t=Y.time;
beta=Y.signals.values(1:length(t),1);
p=Y.signals.values(1:length(t),2);
r=Y.signals.values(1:length(t),3);
phi=Y.signals.values(1:length(t),4);
%Respuesta al escalón de simulink entrada timón de dirección
figure
subplot(4,1,1),   plot(t,beta),   ylabel('To:   \beta'),   title('From:
\delta_r')
subplot(4,1,2), plot(t,p), ylabel('To: p')
subplot(4,1,3), plot(t,r), ylabel('To: r')
subplot(4,1,4), plot(t,phi), ylabel('To: \phi')


[Wn,Z,P] = DAMP(SYS) %Cálculo de Polos

figure
pzmap(SYS) %diagrama de polos y ceros

figure
bode(SYS(1,1)) %diagrama de bode beta vs alerones
figure
bode(SYS(2,1)) %diagrama de bode régimen balanceo vs alerones
figure
bode(SYS(3,1)) %diagrama de bode régimen guiñada vs alerones
figure
bode(SYS(4,1)) %diagrama de bode phi vs alerones

figure
bode(SYS(1,2)) %diagrama de bode beta vs timón de dirección
figure
bode(SYS(2,2))  %diagrama  de  bode  régimen  balanceo  vs  timón  de
dirección
figure
bode(SYS(3,2)) %diagrama de bode régimen guiñada vs timón de dirección
figure
bode(SYS(4,2)) %diagrama de bode phi vs timón de dirección

%-----------------------------------------------------------------
% Análisis en Lazo Cerrado, Asignación de polos
%-----------------------------------------------------------------

tb=1; %constante de tiempo modo balanceo
polob=-1/tb;

poloe=-0.05; %polo modo espiral

W=5.9469; %frecuencia balanceo del holandés
am=0.5;

polobal=[-W*am-W*sqrt(am^2-1), -W*am+W*sqrt(am^2-1)];

polos=[polob,poloe,polobal];
```

```
K=place(A,B,polos) %cálculo de la matriz de control K

% Se introduce en Simulink y se simula, recibiendo los datos en Y
%BREAKPOINT - Simulación alerones como entrada
t=Y.time;
beta=Y.signals.values(1:length(t),1);
p=Y.signals.values(1:length(t),2);
r=Y.signals.values(1:length(t),3);
phi=Y.signals.values(1:length(t),4);

%Respuesta al escalón de simulink entrada alerones
figure
subplot(4,1,1),   plot(t,beta),   ylabel('To:   \beta'),   title('From:
\delta_a')
subplot(4,1,2), plot(t,p), ylabel('To: p')
subplot(4,1,3), plot(t,r), ylabel('To: r')
subplot(4,1,4), plot(t,phi), ylabel('To: \phi')

%BREAKPOINT - Simulación timón de dirección como entrada
t=Y.time;
beta=Y.signals.values(1:length(t),1);
p=Y.signals.values(1:length(t),2);
r=Y.signals.values(1:length(t),3);
phi=Y.signals.values(1:length(t),4);
%Respuesta al escalón de simulink entrada timón de dirección
figure
subplot(4,1,1),   plot(t,beta),   ylabel('To:   \beta'),   title('From:
\delta_r')
subplot(4,1,2), plot(t,p), ylabel('To: p')
subplot(4,1,3), plot(t,r), ylabel('To: r')
subplot(4,1,4), plot(t,phi), ylabel('To: \phi')

% Para ver el valor de los nuevos polos, el diagrama de polos y ceros
% y los diagramas de bode hay que hacer una realimentación

aux=augstate(SYS); %se puede acceder a las variables de estado
%variables de estado en posiciones 5:8

SYS_AP=feedback(aux,K,1:2,5:8); %espacio de estados en lazo cerrado

[Wn,Z,P] = DAMP(SYS_AP) %Cálculo de Polos

figure
pzmap(SYS_AP) %diagrama de polos y ceros

figure
bode(SYS_AP(1,1)) %diagrama de bode beta vs alerones
figure
bode(SYS_AP(2,1)) %diagrama de bode régimen balanceo vs alerones
figure
bode(SYS_AP(3,1)) %diagrama de bode régimen guiñada vs alerones
figure
bode(SYS_AP(4,1)) %diagrama de bode phi vs alerones

figure
bode(SYS_AP(1,2)) %diagrama de bode beta vs timón de dirección
figure
```

```
bode(SYS_AP(2,2)) %diagrama de bode régimen balanceo vs timón de
dirección
figure
bode(SYS_AP(3,2)) %diagrama de bode régimen guiñada vs timón de
dirección
figure
bode(SYS_AP(4,2)) %diagrama de bode phi vs timón de dirección

%-----------------------------------------------------------------
% Análisis en Lazo Cerrado, LQR
%-----------------------------------------------------------------

damax=15; %angulo de máxima deflexión de los alrones
drmax=15; %angulo de máxima deflexión del timón de dirección

R=eye(2);
R(1,1)=1/(damax*pi/180)^2;
R(1,1)=1/(drmax*pi/180)^2; %matriz R

vmax=15; %máxima velocidad en m/s, a partir de beta (30º)
pmax=1; %máximo régimen de balanceo en rad/s
rmax=1; %máximo régimen de guiñada en rad/s
phimax=0.5236; %máximo ángulo en radianes (30º)

Q=eye(4);
Q(1,1)=1/vmax^2;
Q(2,2)=1/pmax^2;
Q(3,3)=1/rmax^2;
Q(4,4)=1/phimax^2;

varp=1; %valor de 'p' según la fórmula LQR teoria general de control

[K,S,E] = LQR(sys,Q,varp*R); %matriz de control K en LQR

% Se introduce en Simulink y se simula, recibiendo los datos en Y
%BREAKPOINT - Simulación alerones como entrada
t=Y.time;
beta=Y.signals.values(1:length(t),1);
p=Y.signals.values(1:length(t),2);
r=Y.signals.values(1:length(t),3);
phi=Y.signals.values(1:length(t),4);

%Respuesta al escalón de simulink entrada alerones
figure
subplot(4,1,1), plot(t,beta), ylabel('To: \beta'), title('From:
\delta_a')
subplot(4,1,2), plot(t,p), ylabel('To: p')
subplot(4,1,3), plot(t,r), ylabel('To: r')
subplot(4,1,4), plot(t,phi), ylabel('To: \phi')

%BREAKPOINT - Simulación timón de dirección como entrada
t=Y.time;
beta=Y.signals.values(1:length(t),1);
p=Y.signals.values(1:length(t),2);
r=Y.signals.values(1:length(t),3);
phi=Y.signals.values(1:length(t),4);
%Respuesta al escalón de simulink entrada timón de dirección
figure
```

```
subplot(4,1,1),   plot(t,beta),   ylabel('To:   \beta'),   title('From:
\delta_r')
subplot(4,1,2), plot(t,p), ylabel('To: p')
subplot(4,1,3), plot(t,r), ylabel('To: r')
subplot(4,1,4), plot(t,phi), ylabel('To: \phi')

% Para ver el valor de los nuevos polos, el diagrama de polos y ceros
% y los diagramas de bode hay que hacer una realimentación

aux=augstate(SYS); %se puede acceder a las variables de estado
%variables de estado en posiciones 5:8

SYS_LQR=feedback(aux,K,1:2,5:8); %espacio de estados en lazo cerrado

[Wn,Z,P] = DAMP(SYS_LQR) %Cálculo de Polos

figure
pzmap(SYS_LQR) %diagrama de polos y ceros

figure
bode(SYS_LQR(1,1)) %diagrama de bode beta vs alerones
figure
bode(SYS_LQR(2,1)) %diagrama de bode régimen balanceo vs alerones
figure
bode(SYS_LQR(3,1)) %diagrama de bode régimen guiñada vs alerones
figure
bode(SYS_LQR(4,1)) %diagrama de bode phi vs alerones

figure
bode(SYS_LQR(1,2)) %diagrama de bode beta vs timón de dirección
figure
bode(SYS_LQR(2,2))  %diagrama  de  bode  régimen  balanceo  vs  timón  de
dirección
figure
bode(SYS_LQR(3,2))  %diagrama  de  bode  régimen  guiñada  vs  timón  de
dirección
figure
bode(SYS_LQR(4,2)) %diagrama de bode phi vs timón de dirección
```