

8. FLUJOS VISCOSOS UNIDIRECCIONALES Y CAPA LIMITE

Flujos unidireccionales

La característica básica de la ecuación de Navier-Stokes que causa las mayores dificultades analíticas es el término convectivo no lineal $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$, proveniente de la aceleración de un elemento de fluido en coordenadas Eulerianas. Las dificultades matemáticas que presenta la ecuación completa son tan severas que la mayoría de las soluciones analíticas conocidas se obtienen sólo cuando, por alguna razón, la ecuación se vuelve aproximadamente o exactamente lineal. Entre los casos más simples en que el término $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ se anula exactamente, está aquél en el cual el campo de velocidad tiene la misma dirección en todas partes y no depende de la coordenada en la dirección del movimiento. Esto ocurre, por ejemplo, cuando el flujo se desarrolla en largos conductos rectilíneos y de sección uniforme (o bien con curvaturas y variaciones de sección muy pequeñas sobre distancias del orden del ancho del conducto).

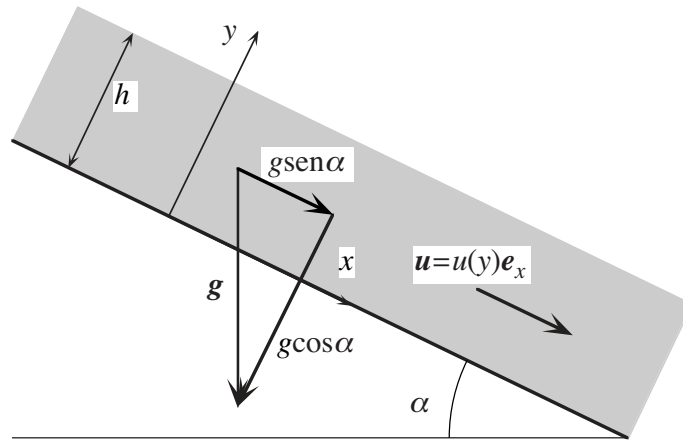


Fig. 8.1 Flujo unidireccional en un conducto inclinado respecto de la horizontal.

Tomaremos el eje x en la dirección del movimiento, de modo que

$$u_x = u \quad , \quad u_y = u_z = 0 \quad , \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \quad (8.1)$$

y entonces la ecuación de Navier-Stokes adopta la forma

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (8.2)$$

Luego $P = P(x)$, y por lo tanto el gradiente de la *presión modificada* es paralelo a las líneas de corriente. Recordemos que $P = p + \rho\varphi$, donde φ es el potencial de la fuerza de volumen, que hemos supuesto conservativa. Cuando esa fuerza se debe a la gravedad tendremos

$$\varphi = -\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} = g(-x \operatorname{sen} \alpha + y \operatorname{cos} \alpha) \quad (8.3)$$

donde α indica el ángulo que forma el eje x con la horizontal (Fig. 8.1), de modo que las (8.2) se escriben

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \rho g \sin \alpha - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \cos \alpha = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (8.4)$$

En el caso estacionario las (8.2) se reducen a

$$\frac{dP}{dx} = \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (8.5)$$

Si hay simetría de revolución respecto del eje del conducto (coincidente con el eje x), tenemos

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) \quad (8.6)$$

Observemos, antes que nada, que el primer miembro de las (8.5) y (8.6) depende solamente de x . Por otra parte, los segundos miembros dependen sólo de y, z (o bien de r). Por lo tanto ambos miembros de las ecuaciones anteriores deben ser, por separado, iguales a una constante común G , cuyo valor queda determinada por las condiciones de contorno. Por ejemplo, si se asigna la diferencia de presión ΔP entre los extremos de un conducto de longitud L , se tiene que

$$G = \Delta P / L \quad (8.7)$$

Si en cambio se asignan datos referentes a la velocidad, la constante G quedará determinada por la ecuación de la velocidad, por ejemplo por medio de

$$\frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = G \quad (8.8)$$

Nótese que el perfil de velocidad depende de la viscosidad μ y del gradiente de presión sólo a través de la combinación constante G/η . Por consiguiente la viscosidad no determina el perfil de la velocidad a través de la sección del conducto: su único rol consiste en establecer qué variación de presión por unidad de longitud del conducto es compatible con el campo de velocidades. Esto se debe al carácter asintótico del flujo estacionario que estamos estudiando: la viscosidad determina cuándo y donde se alcanza el régimen estacionario a partir de un campo de velocidades inicial arbitrario, pero no la forma del campo. Esto se comprenderá mejor más adelante, cuando estudiemos el *efecto de embocadura*.

Flujo entre dos placas planas y paralelas

Consideremos el flujo entre dos placas planas ubicadas en $y = 0$ y en $y = h$. Por simetría, la coordenada z es ignorable y entonces $u = u(y)$ y $P = P(x)$. Por lo que acabamos de ver tenemos

$$\frac{dP}{dx} = -G, \quad \eta \frac{d^2 u}{dy^2} = -G; \quad G = \text{cte.} \quad (8.9)$$

de donde obtenemos por integración

$$P = P_0 - Gx, \quad u = -\frac{G}{2\eta} y^2 + by + c \quad (8.10)$$

donde P_0 , b y c son constantes de integración. Las condiciones de contorno son

$$u(0) = 0 \quad , \quad u(h) = 0 \quad (8.11)$$

y por lo tanto $c = 0$ y $b = -Gh/2\eta$ de modo que resulta

$$u = \frac{G}{2\eta} y(h - y) \quad (8.12)$$

De esta manera, la presión cae linealmente con x , y el perfil de velocidad adopta una forma parabólica en cada sección transversal (Fig. 8.2).

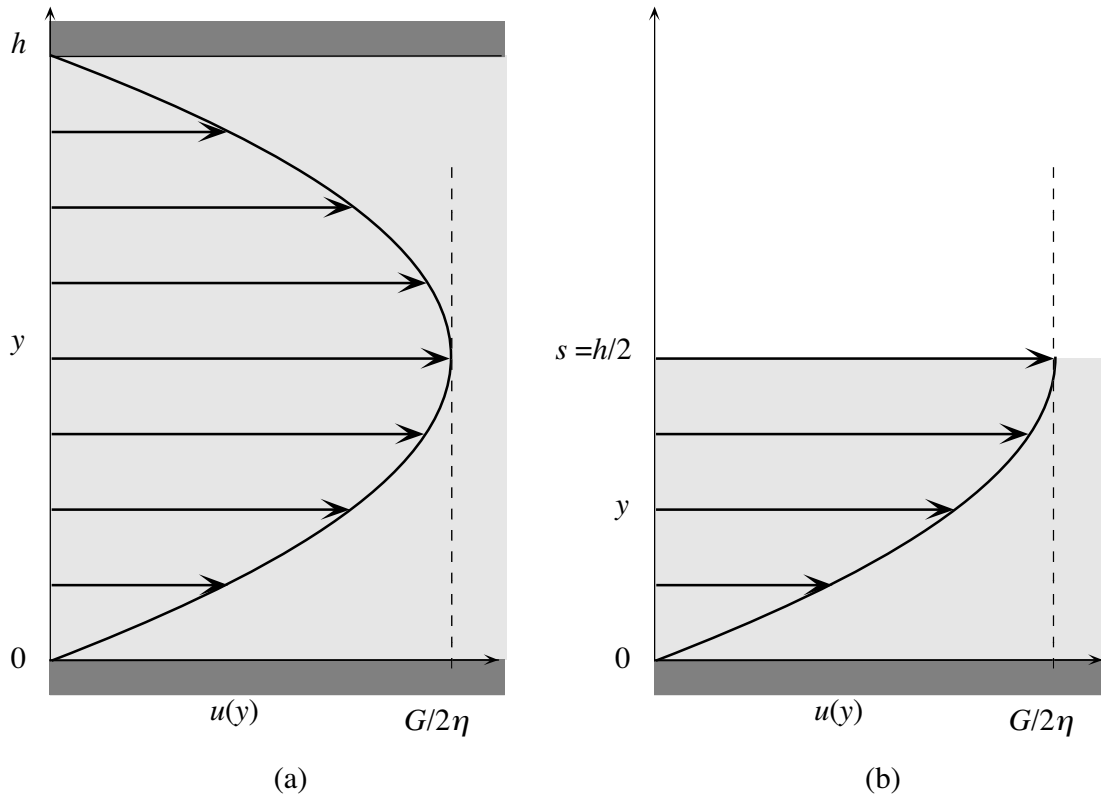


Fig. 8.2. Perfil parabólico de velocidad: (a) del flujo entre dos placas planas y paralelas, (b) del flujo sobre un plano.

La fuerza de arrastre por unidad de área sobre cada una de las placas es

$$\eta \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0,h} = \frac{Gh}{2} \quad (8.13)$$

y la fuerza total sobre un área $\Delta_x \Delta_z$ del conducto es igual a $Gh\Delta_x \Delta_z$. La fuerza total ejercida por la presión es

$$\Delta p h \Delta_z = Gh \Delta_x \Delta_z \quad (8.14)$$

y por lo tanto es igual al arrastre.

Por supuesto, no es difícil resolver problemas análogos en los que una de las placas (por ejemplo la que está ubicada en $y = h$) se mueve con una velocidad arbitraria.

Más interesante es el caso de escurrimiento de una capa líquida de profundidad s sobre un plano fijo cuando la superficie superior es libre. En la superficie libre se debe cumplir $du/dy = 0$. Luego se obtiene el mismo perfil que en el caso anterior (ec. (8.12)), si se identifica s con $y = h/2$. Resulta por lo tanto

$$u = -\frac{1}{\eta} \frac{dP}{dx} y(2s - y) \quad (8.15)$$

Aquí dP/dx es el gradiente de la *presión modificada*, que debe ser igual al gradiente de la presión más el gradiente de la presión hidrostática debida al desnivel. Si no hay gradiente de presión hidrostática (habitualmente podemos despreciar la diferencia de presión atmosférica) tenemos

$$\frac{dP}{dx} = \rho g \sin \alpha \quad (8.16)$$

Conducto de sección circular: flujo de Poiseuille

Sea un flujo en tubo de sección circular de radio a . Las ecuaciones adecuadas son:

$$\frac{dP}{dx} = -G \quad , \quad \eta \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = -G \quad (8.17)$$

Integrando, obtenemos

$$P = P_0 - Gx \quad , \quad u = -\frac{G}{4\eta} r^2 + A \ln r + B \quad (8.18)$$

Puesto que u es finito en $r = 0$, debe ser $A = 0$; por otra parte, $u(a) = 0$ y entonces $B = (G/4\eta)a^2$. Por lo tanto resulta un perfil parabólico dado por

$$u = \frac{G}{4\eta} (a^2 - r^2) \quad (8.19)$$

Por simplicidad, supongamos que el conducto es horizontal. Entonces $G = \Delta p / L$, donde Δp es la caída de presión sobre una longitud L del conducto; luego

$$u = \frac{\Delta p}{4\eta L} (a^2 - r^2) \quad (8.20)$$

Para hallar el caudal, debemos calcular la integral del flujo sobre la sección S del conducto:

$$Q = \int_S \rho u dS = 2\pi \int_0^a \rho u r dr \quad (8.21)$$

Reemplazando la expresión (8.20) de u resulta

$$Q = \frac{\pi \rho}{8\eta} \frac{\Delta p}{L} a^4 \quad (8.22)$$

De este modo, la velocidad media $\langle u \rangle$ definida como $\langle u \rangle \equiv Q / \rho S$ con $S = \pi a^2$, queda como

$$\langle u \rangle = \frac{\Delta p}{8\pi L} a^2 \quad (8.23)$$

El esfuerzo viscoso sobre la pared del tubo es

$$\sigma_{xr} = \eta \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = -\frac{\Delta p}{2L} a \quad (8.24)$$

Luego la fuerza de arrastre sobre un tubo de longitud L es

$$F = 2\pi a L \sigma_{xr} = -\pi a^2 \Delta p \quad (8.25)$$

Nótese que, al igual que en el ejemplo anterior, esta fuerza compensa exactamente la fuerza ejercida por la diferencia de presiones sobre las dos secciones del conducto.

Es habitual definir un *coeficiente de arrastre* sin dimensiones C como

$$C = \frac{F/L}{\frac{1}{2} \rho U^2 a} \quad (8.26)$$

donde

$$U = \frac{\Delta p}{4\eta L} a^2 \quad (8.27)$$

es la velocidad (máxima) en el centro del tubo. Si definimos el número de Reynolds del flujo como

$$\text{Re} = \frac{\rho U a}{\eta} \quad (8.28)$$

se obtiene

$$C = \frac{8\pi}{\text{Re}} \quad (8.29)$$

Esta ley de variación del coeficiente de arrastre con Re es típica de los flujos en los cuales los efectos convectivos asociados con el término $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ son nulos (como en este caso) o despreciables frente al término viscoso $\eta \nabla^2 \mathbf{u}$. En el caso límite opuesto de grandes números de Reynolds, cuando el flujo en el conducto se vuelve turbulento, se obtiene en cambio un coeficiente mayor por varios órdenes de magnitud al dado por la (8.29), y que varía lentamente con Re . Por lo tanto el coeficiente C tiene interés especialmente para las aplicaciones a flujos con número de Reynolds grande. Más adelante volveremos sobre este tema, dada la gran importancia práctica del mismo.

La capa límite laminar

La noción de capa límite laminar interviene cuando se estudian flujos estacionarios con número de Reynolds muy grande en el entorno de un cuerpo sólido. Lejos del cuerpo, y mientras el flujo

incidente no sea turbulento, los términos de fuerzas viscosas de la ecuación de Navier-Stokes son despreciables; entonces el campo de velocidades del flujo es consistente con la ecuación de Euler. El empalme entre esta solución y la condición de velocidad nula en las paredes del sólido tiene lugar en una zona denominada *capa límite*, cuyo espesor es tanto más pequeño cuanto más grande es el número de Reynolds, en la cual se deben tener en cuenta tanto los términos convectivos como los términos viscosos.

Veremos que la vorticosidad generada en las paredes es arrastrada corriente abajo dentro de una estela y que los gradientes de velocidad quedan concentrados dentro de una pequeña porción del volumen total del flujo. De esta manera, el estudio de los flujos ideales queda justificado *a posteriori*, ya que los efectos de la viscosidad sólo se manifiestan en la capa límite en la vecindad del cuerpo sólido, y en la estela que se extiende corriente abajo a partir del cuerpo.

En este capítulo nos limitaremos al estudio de capas límites laminares, dentro de las cuales el campo de velocidad varía lentamente con el tiempo. Esta noción, debida a Prandtl (1905), se debe adaptar para la mayoría de las situaciones prácticas, por ejemplo flujos turbulentos incidentes sobre un cuerpo o cuerpos sólidos con formas no aerodinámicas, en los cuales la capa límite existe sólo sobre una parte de la superficie del cuerpo, y se forma una estela turbulenta de extensión comparable a las dimensiones del cuerpo. En este caso ocurre el fenómeno de la separación de la capa límite y el flujo corriente abajo ya no tiene nada que ver con la solución no viscosa, dando lugar una fuerza de arrastre mucho mayor.

Consideremos un flujo uniforme que incide sobre una placa plana semiinfinita, paralela a la dirección de la velocidad U (ver Fig.8.3). Si U es suficientemente grande, la influencia de la placa no se hace sentir corriente arriba del borde; en efecto, la vorticosidad no alcanza a difundir corriente arriba del borde la placa pues es arrastrada corriente abajo por el flujo. En consecuencia la vorticosidad y los gradientes de velocidad están concentrados muy cerca de la placa.

Cuando estudiamos el problema de la placa que se pone en movimiento paralelamente a si misma (Capítulo 7) vimos que los gradientes de velocidad se atenúan con el tiempo y la distribución espacial de vorticosidad difunde desde la pared hasta una distancia del orden de

$$\Delta \cong \sqrt{\nu t} \quad (8.30)$$

donde ν es la viscosidad cinemática. Sin embargo, en el presente caso el fluido es al mismo tiempo arrastrado paralelamente a la placa con una velocidad del orden de U ; luego, una parcela de fluido que ha llegado hasta una distancia x del extremo de la placa ha interactuado con la placa durante el tiempo t que demoró en recorrer esa distancia, esto es, $t \approx x/U$. Por lo tanto los gradientes de velocidad están concentrados en una zona cuyo espesor

$$\Delta(x) \approx \sqrt{\nu x / U} \quad (8.31)$$

depende de la distancia al extremo. Aquí $\Delta(x)$ representa el espesor de la capa límite dentro de la cual tiene lugar la transición entre el flujo ideal lejos de la pared y el flujo real cerca de ella. La importancia de este espesor está dada por la razón

$$\frac{\Delta(x)}{x} \approx \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}(x)}} \quad , \quad \text{Re}(x) = \frac{Ux}{\nu} \quad (8.32)$$

donde $Re(x)$ es el número de Reynolds *local* obtenido con la distancia x desde el extremo de la placa. Así, cuando $Re(x) \rightarrow \infty$, el espesor máximo de la capa límite se vuelve despreciable respecto de la dimensión característica global de la placa. Este resultado explica porqué, cuando el número de Reynolds tiende a infinito, el régimen de flujo externo no turbulento de un fluido viscoso se aproxima al de un fluido perfecto. Sin embargo, esto no significa que los efectos de la capa límite son despreciables, por más delgada que sea.

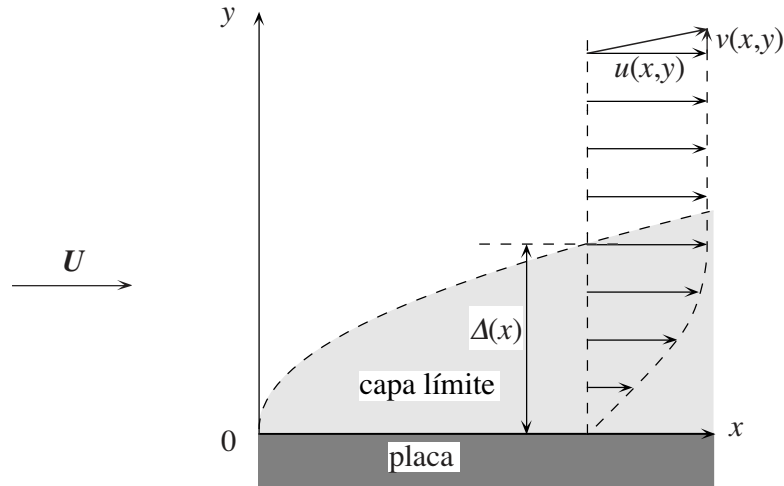


Fig. 8.3. Capa límite sobre una placa plana semiinfinita paralela a la dirección del flujo uniforme incidente.

Un estudio más detallado de la capa límite muestra que el contorno de la misma no es una línea de corriente y que el caudal en su interior aumenta como $x^{1/2}$. Además, cuando $Re(x)$ se hace muy grande la capa límite se vuelve inestable y turbulenta; cuando esto ocurre las estimaciones precedentes dejan de ser válidas, pues el transporte de cantidad de movimiento por convección turbulenta hace que Δ aumente más rápidamente que en el caso laminar.

Efecto de entrada

Un fenómeno estrechamente vinculado con el desarrollo de la capa límite es el *efecto de entrada* (o de *embocadura*), debido al cual el perfil estacionario asintótico que estudiamos precedentemente se establece recién a cierta distancia de la embocadura del conducto. La Fig. 8.4 esquematiza este proceso para el flujo entre dos caras paralelas semiinfinitas separadas por una distancia h .

A una pequeña distancia x desde la embocadura, se tiene una perfil de velocidad casi uniforme cuyo módulo es igual a U , la velocidad corriente arriba. La transición con la condición de velocidad nula en la superficie de las placas tiene lugar dentro de una capa de espesor (local) $\Delta(x)$. A medida que nos alejamos de la embocadura, el espesor de las capas límites de ambas placas crece hasta que ambas terminan por juntarse a una distancia x_e . Por lo tanto x_e es la distancia necesaria para que se establezca entre las placas el perfil de velocidad parabólico estacionario que ya conocemos. El valor de x_e se puede estimar mediante el requerimiento $\Delta(x_e) = h$. Usando la (8.27) obtenemos entonces

$$\frac{x_e}{h} \approx \frac{Uh}{\nu} = Re(h) \quad (8.33)$$

donde $Re(h)$ es el número de Reynolds construido con la velocidad U y la distancia h entre placas. La (8.33) muestra que el perfil parabólico se establece tanto más lejos de la embocadura cuanto mayor es $Re(h)$. Para un conducto cilíndrico se obtiene un comportamiento semejante.

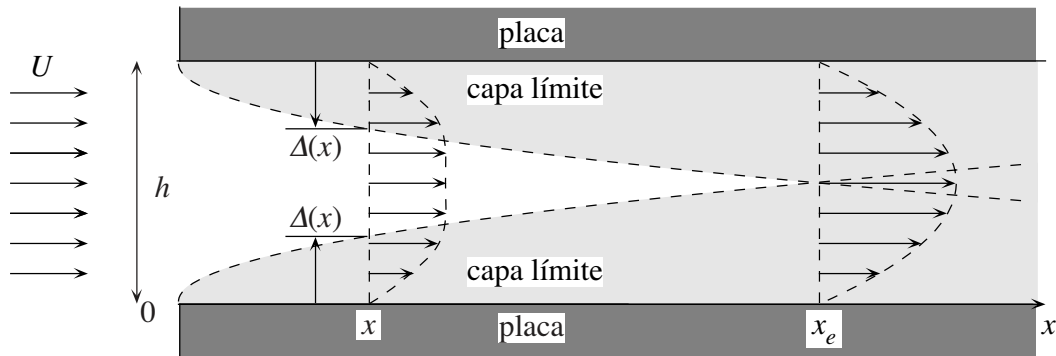


Fig. 8.4. Efecto de embocadura para el flujo entre dos placas planas semiinfinitas: evolución del perfil de velocidad con la distancia desde la entrada.

Teoría de Prandtl de la capa límite

Vamos a estudiar ahora el flujo bidimensional incompresible y estacionario en el plano (x, y) cerca de una placa plana en $y = 0$, que se extiende desde $x = 0$ hasta $x \rightarrow \infty$. Fuera de la capa límite (es decir, para $y \gg \Delta(x)$) vamos a suponer que tenemos un flujo potencial, solución de la ecuación de Euler, con una velocidad

$$\mathbf{u} = U(x)\mathbf{e}_x \quad (8.34)$$

El flujo dentro de la capa límite se debe empalmar de algún modo con el flujo principal (8.34), lo cual involucra ciertas sutilezas que se verán más adelante. Los resultados que obtendremos serán válidos también para placas curvas, siempre y cuando su radio de curvatura sea mucho mayor que el espesor de la capa límite; en este caso x será la distancia desde el borde medida a lo largo de la placa e y será la distancia a la placa medida perpendicularmente a la misma.

Dentro de la capa límite el flujo está regido por la ecuación de Navier-Stokes, que no podemos resolver en forma exacta pues es muy complicada. Afortunadamente, el hecho que cuando $Re(x)$ es muy grande la capa límite es sumamente delgada permite hacer algunas aproximaciones gracias a las cuales se puede obtener la solución buscada. Para deducir las ecuaciones aproximadas que rigen el flujo en la capa límite conviene estudiar el orden de magnitud de los distintos términos que figuran en las ecuaciones. Esto es lo que vamos a hacer primero.

Dentro de la capa límite la dimensión característica (local) en la dirección paralela al flujo es del orden de x , la distancia desde el borde de la placa. En cambio la dimensión característica en la dirección perpendicular al flujo es $\Delta(x)$, que escala como \sqrt{x} . Todo el razonamiento que sigue se basa en la existencia de estas dos escalas de longitud muy diferentes en una y otra dirección.

Nos interesa estudiar el flujo no demasiado cerca del extremo de la placa¹, de modo tal que se tenga que $Re(x) \gg 1$. En este caso tendremos que

¹ Por ejemplo, para aire con una velocidad de 10 m/s, o agua que se mueve a razón de 1 m/s, a la distancia de 1 cm del extremo de la placa el número de Reynolds es del orden de 10^4 .

$$\frac{\Delta(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}(x)}} \equiv \varepsilon \ll 1 \quad (8.35)$$

Vamos ahora a estimar el orden de magnitud de los diferentes términos que intervienen en las ecuaciones que gobiernan el flujo.

Puesto que el flujo es incompresible la ecuación de conservación de la masa se escribe como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (8.36)$$

donde u y v son las componentes x e y de la velocidad, respectivamente. Esta ecuación muestra que

$$\frac{v}{u} \approx \frac{\Delta(x)}{x} = \varepsilon \quad (8.37)$$

Análogamente, tenemos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u}{\Delta(x)^2} = \frac{u}{\varepsilon^2 x^2} \approx \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (8.38)$$

lo que permite despreciar $\partial^2 u / \partial x^2$ frente a $\partial^2 u / \partial y^2$. Por el contrario, el término $v(\partial u / \partial y)$ es del mismo orden de magnitud que $u(\partial u / \partial x)$. En efecto

$$v \frac{\partial u}{\partial y} \approx v \frac{u}{\Delta(x)} = \frac{v}{\varepsilon} \frac{u}{x} \approx u \frac{u}{x} \approx u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (8.39)$$

pues el pequeño valor de v está compensado por el valor grande de $\partial u / \partial y$ debido a que la escala de longitud $\Delta(x)$ es pequeña.

Por consiguiente, la componente x de la ecuación de Navier-Stokes se escribe como

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (8.40)$$

y la componente y como

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (8.41)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que $v/u = O(\varepsilon)$, la (8.41) nos dice que $\partial P / \partial y = O(\varepsilon)$. Podemos entonces ignorar la dependencia en y de la presión² y escribir con buena aproximación

$$P = P(x) \quad (8.42)$$

² Este resultado es análogo a la ausencia de componentes perpendiculares a las líneas de corriente del gradiente de la presión en los flujos paralelos que estudiamos al comienzo de este Capítulo, con la diferencia que en el presente caso el flujo es *casi* paralelo, y la igualdad (8.42) vale *a menos* de términos del orden de ε .

Esto significa que la presión en la capa límite es igual a la presión $P(x)$ del flujo principal. Por lo tanto se puede considerar como un dato a los fines de resolver el problema de la capa límite. Con la aproximación (8.42), la (8.40) queda entonces en la forma

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (8.43)$$

donde la derivada total dP/dx se puede expresar en términos de la velocidad $U(x)$ del flujo principal. Para esto podemos usar la ecuación de Bernoulli para un fluido perfecto en la forma

$$P + \frac{1}{2} \rho U(x)^2 = \text{cte.} \quad (8.44)$$

del cual obtenemos, tomando la derivada:

$$\frac{dP}{dx} = -\rho U \frac{dU}{dx} \quad (8.45)$$

Combinando esta expresión con la (8.43) resulta

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U \frac{dU}{dx} \quad (8.46)$$

que es la ecuación que determina el campo de velocidades dentro de la capa límite, y es debida a Prandtl. La (8.46) junto con la ecuación de conservación de la masa (8.36) son la base para el estudio de la capa límite.

Se deja como ejercicio para el lector verificar que en el borde de la capa límite, es decir a la distancia $\Delta(x)$ de la pared, los términos de transporte de cantidad de movimiento por convección ($u(\partial u/\partial x)$) y por difusión viscosa ($\nu(\partial^2 u/\partial x^2)$) de la (8.46) son del mismo orden de magnitud. Por otro lado, para conocer cómo se realiza el transporte de vorticidad, debemos recurrir a la ecuación de evolución de la vorticidad (5.28), la cual se simplifica en nuestro caso pues el flujo es estacionario, la única componente no nula de la vorticidad es $\omega_z = \omega$, y el operador $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla$ es nulo, de modo que resulta

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \quad (8.47)$$

Esta ecuación expresa el equilibrio entre los transportes de vorticidad por convección y por difusión. Las variaciones de ω asociadas con el estiramiento de tubos de vorticidad no intervienen debido al carácter bidimensional del flujo.

Queda todavía por resolver el problema de cómo empalmar el flujo dentro de la capa límite con el flujo ideal principal. Para este fin, en lo que sigue vamos a imponer la condición de contorno

$$u \rightarrow U(x) \quad \text{para} \quad y/\delta \rightarrow \infty \quad (8.48)$$

donde δ es una medida del espesor de la capa límite, proporcional a $\nu^{1/2}$. Es importante notar que se toma $y/\nu^{1/2} \rightarrow \infty$ y no $y \rightarrow \infty$. Esta distinción, que puede parecer misteriosa al lector, se aclarará en breve.

Autosemejanza de la capa límite cuando la velocidad exterior es uniforme

La solución de la ecuación de Prandtl (8.46) junto con la ecuación de continuidad (8.36) con las condiciones de contorno (8.48) y $u = 0$, $v = 0$ sobre la placa permite obtener el campo de velocidad en la capa límite, pero para eso se debe conocer el campo de velocidad exterior $U(x)$.

Antes de considerar un caso concreto, mostraremos algunas propiedades generales de la capa límite, para lo cual conviene expresar el problema en términos de magnitudes sin dimensiones. Sea entonces U_0 una velocidad característica del problema (por ejemplo la velocidad del flujo principal al infinito), e introduzcamos en lugar de las coordenadas x, y y las velocidades u, v , las variables adimensionales X, Y, U (no confundir con la velocidad exterior $U(x)$) y V , definidas por

$$x = lX \quad , \quad y = \frac{lY}{\sqrt{\text{Re}}} \quad , \quad u = U_0U \quad , \quad v = \frac{U_0V}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (8.49)$$

donde l es una longitud constante y

$$\text{Re} = U_0l/\nu \quad (8.50)$$

es un número de Reynolds formado con la longitud l y la velocidad U_0 . Análogamente el flujo exterior se expresará como $U(x) = U_0W(X)$ en términos de la función adimensional $W(x)$.

La ecuación de Prandtl (8.46) y la ecuación de continuidad se escriben entonces como

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} - \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = W \frac{dW}{dX} \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (8.51)$$

En estas ecuaciones (y también en las condiciones de contorno) *no figura la viscosidad*. Por lo tanto la solución es *independiente* del número de Reynolds. En otras palabras, todo el efecto de la viscosidad está contenido en el cambio de variables (8.49). Encontramos así el siguiente importante resultado:

Al cambiar el número de Reynolds, el patrón de flujo de toda la capa límite sufre una simple transformación afín, en la cual las distancias y velocidades longitudinales no varían, mientras que las distancias y velocidades transversales varían en proporción a $1/\sqrt{\text{Re}}$.

En segundo lugar, podemos decir que las velocidades adimensionales U, V que resultan de resolver las (8.51) deben ser del orden de la unidad, pues no dependen de Re . Lo mismo debe ser cierto para el espesor adimensional D de la capa límite, en términos de las coordenadas X e Y . Por lo tanto, a partir del cambio de variables (8.49) podemos concluir que

$$v \sim U_0/\sqrt{\text{Re}} \quad (8.52)$$

que nos dice que la razón entre las velocidades transversales y las velocidades longitudinales es del orden de $1/\sqrt{\text{Re}}$, y que

$$\delta \sim l/\sqrt{\text{Re}} \quad (8.53)$$

es decir, que el espesor de la capa límite es proporcional a $1/\sqrt{\text{Re}}$.

Es interesante observar que en la ec. (8.51) el término de transporte de la cantidad de movimiento debido a la viscosidad juega un rol de la misma importancia que los términos convectivos, cosa que refleja correctamente la realidad física de lo que ocurre dentro de la capa límite. No se habría obtenido el mismo resultado si se hubiese adimensionalizado la ecuación de Navier-Stokes utilizando una única escala de longitud, pues entonces en el límite $Re \rightarrow \infty$ se llega simplemente a la ecuación de Euler. La utilización de dos escalas de longitud diferentes, paralela y perpendicularmente a la placa, es esencial para tener en cuenta correctamente el rol de la viscosidad en el pequeño espesor de la capa límite.

Hasta aquí nuestro tratamiento es general, pues aún no especificamos el campo exterior de velocidad. Para avanzar más es preciso conocer $U(x)$ (o lo que es lo mismo, $W(X)$). Para concretar, consideraremos el caso $U(x) = U_0 = \text{cte.}$ que es el más sencillo. En este caso el miembro derecho de la primera de la (8.51) es nulo, y las ecuaciones a resolver son

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (8.54)$$

sujetas a las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} u = v = 0 & \quad \text{en} \quad y = 0, \quad \forall x > 0 \\ u = U_0 & \quad \text{en} \quad y = \infty \end{aligned} \quad (8.55)$$

Puesto que U_0 es constante, el campo exterior no introduce en el problema una longitud característica (como podría ser la distancia que caracteriza el gradiente de dicho campo), y tampoco la placa tiene una longitud característica, pues su extensión es semiinfinita. Por otro lado, como $[\nu] = [L^2/T]$, tampoco podemos formar una distancia característica a partir de ν , pues como nuestro problema es estacionario no hay un tiempo característico. En definitiva, el problema depende de los siguientes parámetros

$$x, y, \nu, U_0 \quad (8.56)$$

y con ellos se pueden formar sólo dos combinaciones adimensionales independientes, que se pueden elegir como

$$\xi \equiv \frac{y}{x} = \frac{Y}{X\sqrt{Re}} \quad , \quad \zeta \equiv \frac{y}{\sqrt{\nu x/U_0}} = \frac{Y}{\sqrt{X}} \quad (8.57)$$

En vista de esto se podría pensar que la solución del problema tiene la forma

$$u = U_0 U(\xi, \zeta) \quad , \quad v = \sqrt{\frac{\nu U_0}{x}} \Phi(\xi, \zeta) \quad (8.58)$$

donde $\Phi = V/\sqrt{X}$. Sin embargo, es evidente que las variables U y V (y por lo tanto Φ) no pueden depender de ξ , pues en ξ aparece el número de Reynolds, que como ya vimos no puede figurar en dichas variables. Concluimos entonces que la solución debe ser de la forma

$$u = U_0 U(\zeta) \quad , \quad v = \sqrt{\frac{\nu U_0}{x}} \Phi(\zeta) \quad \text{con} \quad \zeta \equiv \frac{y}{\sqrt{\nu x/U_0}} \quad (8.59)$$

Por consiguiente nuestra solución es *autosemejante* en la variable ξ . Gracias a ello, las ecuaciones diferenciales *parciales* (8.36) y (8.47) en las dos variables x, y se reducen a ecuaciones diferenciales *ordinarias* en la única variable ξ , mucho más fáciles de resolver.

Para completar la solución del problema tenemos que determinar las funciones U y Φ . Para este fin conviene hacer el siguiente cambio de variable dependiente:

$$U(\xi) = \phi'(\xi) \quad (8.60)$$

donde la ' indica la derivada de una función respecto de su argumento. Sustituyendo entonces las (8.59) y (8.60) en la ecuación de conservación de la masa (8.38) se obtiene

$$\Phi' = \frac{1}{2} \xi \phi'' = \frac{1}{2} (\xi \phi' - \phi)' \quad (8.61)$$

Por lo tanto, utilizando esta relación tenemos que

$$u = U_0 \phi' \quad , \quad v = \sqrt{\frac{\nu U_0}{x}} \frac{1}{2} (\xi \phi' - \phi) \quad (8.62)$$

Sustituyendo las (8.62) en la ecuación de Prandtl se obtiene una ecuación diferencial para ϕ :

$$2\phi''' + \phi\phi'' = 0 \quad (8.63)$$

Las condiciones de contorno (8.55) toman la forma

$$\phi'(0) = \phi(0) = 0 \quad , \quad \phi'(\infty) = 1 \quad (8.64)$$

La (8.63) es la *ecuación de Blasius*, cuya solución permite obtener el perfil de velocidad completo dentro de la capa límite. La solución exacta del problema se obtiene numéricamente. Para ese fin las condiciones de contorno (8.64) son incómodas, pues los programas de integración suelen estipular condiciones de contorno en un único punto y no en dos, como las (8.64). Para superar este inconveniente conviene aprovechar una propiedad general de la ecuación de Blasius, de acuerdo con la cual si ϕ_0 es solución de la (8.63), entonces

$$\phi(\xi) = a\phi_0(a\xi) \quad , \quad a = \text{cte.} \quad (8.65)$$

es también solución. Sea ahora ϕ_0 la solución de (8.63) que satisface la condiciones de contorno

$$\phi_0'(0) = \phi_0(0) = 0 \quad , \quad \phi_0'(\infty) = 1 \quad (8.66)$$

Esta solución se puede encontrar fácilmente por medio de las rutinas de integración de aplicaciones como Mathematica™ o semejantes. A partir de ella se puede calcular el límite

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \phi_0'(\xi) = k (= 2.0854\dots) \quad (8.67)$$

Ponemos entonces

$$\phi(\xi) = \alpha^{1/3} \phi_0(\alpha^{1/3} \xi) \quad (8.68)$$

que satisface las condiciones de contorno

$$\phi'(0) = \phi(0) = 0 \quad , \quad \phi''(0) = \alpha \quad , \quad \phi'(\infty) = k\alpha^{2/3} \quad (8.69)$$

Entonces, eligiendo $\alpha = k^{-3/2}$ ($= 0.332\dots$) conseguimos la solución deseada, que satisface al infinito la condición $\phi'(\infty) = 1$. La forma de la solución está representada en la Fig. 8.5.

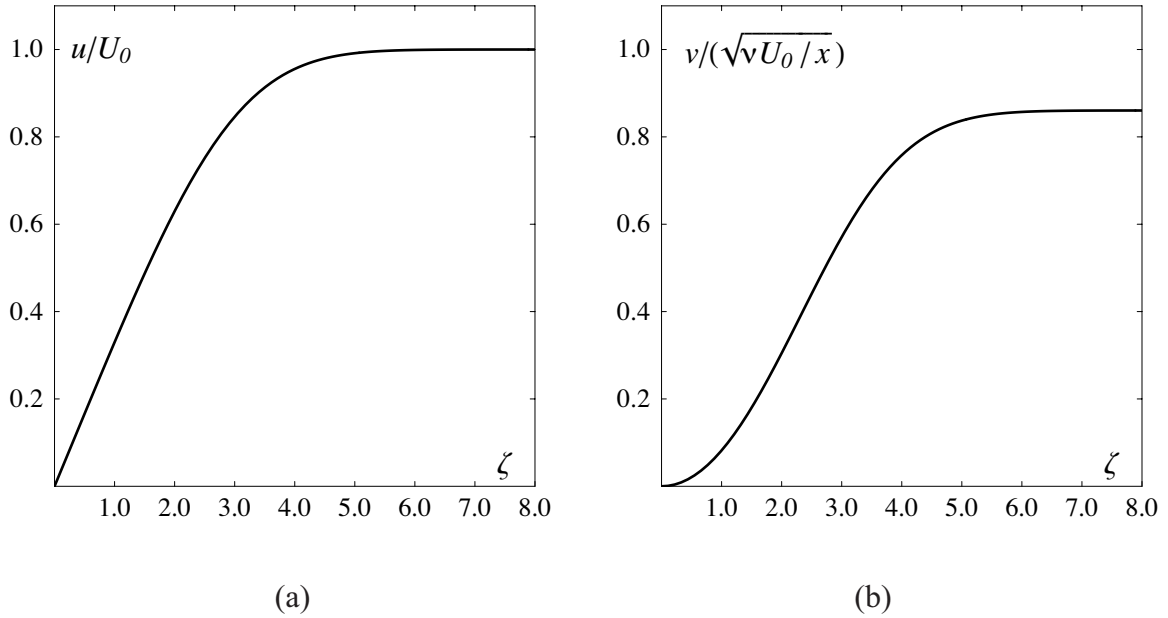


Fig. 8.5. Solución de Blasius para la capa límite laminar: (a) componente de la velocidad paralela a la placa; (b) componente perpendicular.

Usando las (8.59) y (8.62) podemos calcular el espesor δ de la capa límite. Sea ζ^* el valor de ζ para el cual u alcanza una cierta fracción de su valor límite (por ejemplo, el 99%). Tendremos entonces que

$$\delta = y(\zeta^*) = \zeta^* \sqrt{\nu x / U_0} \quad (8.70)$$

en concordancia con la (2.35).

Es interesante examinar las propiedades de la solución para ζ pequeño. De (8.63) y (8.64) es inmediato ver que $\phi'''(0) = 0$. Derivando la (8.63) resulta

$$2\phi'''' + \phi'\phi'' + \phi\phi''' = 0 \quad (8.71)$$

y se verifica del mismo modo que $\phi''''(0) = 0$. Por lo tanto, para valores no muy grandes de ζ podemos escribir

$$\phi = \frac{1}{2}\zeta^2\phi''(0) + \frac{1}{120}\zeta^5\phi^V(0) + O(\zeta^6) \quad (8.72)$$

Introduciendo esta expresión de ϕ en la (8.64) se encuentra que $\phi^V(0) = -\phi''(0)^2 / 2$, de modo que

$$\phi = \frac{1}{2}\zeta^2\phi''(0) - \frac{1}{240}\zeta^5\phi''(0)^2 + O(\zeta^6) \quad (8.73)$$

de donde obtenemos

$$u \equiv U_0 \left[\xi \phi''(0) - \frac{1}{48} \xi^4 \phi''(0)^2 \right], \quad v \equiv \sqrt{\frac{\nu U_0}{x}} \left[\frac{1}{4} \xi^2 \phi''(0) - \frac{1}{120} \xi^5 \phi''(0)^2 \right] \quad (8.74)$$

de donde se ve que para ξ pequeño u crece linealmente con y , e incluso para valores relativamente elevados como $\xi = 2$ el apartamiento desde la linealidad es de apenas $\phi''(0)/6$. En cuanto a v , crece cuadráticamente con y .

En el límite opuesto, $\xi \rightarrow \infty$, tenemos que $\phi'(\xi) \rightarrow 1$ y por lo tanto $\phi \approx \xi$. Así, la ec. de Blasius adopta la forma límite

$$\phi''' \approx -\frac{1}{2} \xi \phi'' \quad (8.75)$$

Al integrar esta ecuación mucho más sencilla, se encuentra que

$$\phi'' \approx k e^{-\xi^2/4} \quad (8.76)$$

Por lo tanto ϕ' se aproxima exponencialmente a 1, y ya para $\xi = 4-5$ difiere de la unidad en unas pocas milésimas. Este resultado confirma la noción de capa límite: tan pronto como uno se aleja de la pared, se vuelve a encontrar prácticamente el flujo uniforme exterior. Al combinar los dos límites precedentes se puede predecir que ϕ' pasará abruptamente de la variación lineal a su valor asintótico.

La resolución de la ecuación de Blasius es un buen ejemplo del problema de empalme entre dos soluciones simples, válidas únicamente en dominios limitados. Este método, denominado de empalme asintótico, es muy general en la Mecánica de Fluidos.

Fuerza de arrastre viscoso

La fuerza de arrastre por unidad de superficie de la placa, σ_{xy} , vale localmente

$$\sigma_{xy} = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{y=0} = \eta U_0 \phi''(0) \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} = \rho U_0^2 \phi''(0) \sqrt{\frac{\nu}{U_0 x}} \quad (8.77)$$

donde hemos puesto en evidencia el factor ρU_0^2 que es la escala natural de presión. Para obtener la fuerza total ejercida por el fluido sobre la placa, debemos integrar σ_{xy} sobre ambas caras de la placa plana (de longitud L en la dirección del flujo y ancho unidad).

Se encuentra que

$$F_x = 2 \rho U_0^2 \phi''(0) \sqrt{\frac{\nu}{U_0}} \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x}} = 4 \rho U_0^2 k^{-3/2} \sqrt{\frac{\nu L}{U_0}} = 4 \rho U_0^2 L k^{-3/2} \sqrt{\frac{1}{\text{Re}_L}} \quad (8.78)$$

donde hemos introducido el número de Reynolds $\text{Re}_L = U_0 L / \nu$.

El coeficiente de arrastre C se obtiene como el cociente entre la fuerza de arrastre dividida por el producto de la presión dinámica ($\rho U_0^2 / 2$) por la superficie en contacto con el fluido ($2 \times L \times 1$), de donde resulta

8. Flujos viscosos unidireccionales y capa límite

$$C = \frac{F_x}{L\rho U_0^2} = \frac{4k^{-3/2}}{\sqrt{\text{Re}_L}} \approx \frac{1.3}{\sqrt{\text{Re}_L}} \quad (8.79)$$

Esta dependencia de C con el número de Reynolds es más débil que la que se tiene para flujos con número de Reynolds muy pequeño (ver por ejemplo la (8.29)), en los cuales el transporte de cantidad de movimiento se debe a la difusión viscosa. Por el contrario, es más fuerte que la que se tiene en los flujos turbulentos con número de Reynolds grande: en los flujos turbulentos domina el transporte convectivo, la fuerza de arrastre es proporcional al cuadrado de la velocidad y C es (aproximadamente) constante.