

Mecánica de Fluidos:

Capa Limite y Flujo Externo Compresible

INTRODUCCION

La teoría de capa limite fue introducida por PRANDTL, esta teoría establece que, para un fluido en movimiento, todas las pérdidas por fricción tienen lugar en una delgada capa adyacente al contorno del sólido (llamada capa límite), y que el flujo exterior a dicha capa puede considerarse como carente de viscosidad.

En un flujo a altos números de REYNOLDS, los efectos de la viscosidad del fluido y la rotación se confinan en una región relativamente delgada cerca de las superficies sólidas o de las líneas de discontinuidad, tales como las estelas. Como la capa límite es delgada, se puede introducir ciertas simplificaciones en las ecuaciones del movimiento; sin embargo, es necesario retener tanto los términos de esfuerzo (viscoso), como las inerciales (aceleración). Los términos de presión pueden o no estar presentes, dependiendo de la naturaleza del flujo fuera de la capa límite. Como la viscosidad del fluido de la capa límite no es cero, no existe función del potencial de velocidades para el flujo en la capa límite. La ecuación del movimiento se debe atacar directamente. Esta ecuación, aun incluyendo las simplificaciones de la capa límite, es mucho más difícil de resolver que la ecuación de flujo de potencial. Se introducen complicaciones adicionales por el hecho de que el flujo en la capa límite podría ser laminar o turbulento.

1. Capa limite

1.1 Análisis dimensional y parámetros de capa limite

La capa límite posee las siguientes características:

- Es delgada ($\delta \ll x$)
- El espesor de la capa límite aumenta en dirección corriente abajo y siempre el cociente δ/x sigue siendo pequeño.

- El perfil de velocidad en la capa límite satisface la condición de no deslizamiento en la pared, y emerge suavemente hasta la velocidad de corriente libre en el borde de la capa.
- Existe un esfuerzo cortante en la pared
- Las líneas de corriente de flujo en la capa límite son aproximadamente paralelas en la superficie; quiere decir que la velocidad paralela a la superficie es mucho mayor a la normal.

Muchos de los parámetros usados en el estudio de capa límite dependen del número de Reynolds.

Se menciona:

$$\frac{\delta}{x} = f_1(R_x)$$

$$C_F = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho V_{\infty}^2} = f_2(R_x)$$

$$\frac{v}{V_{\infty}} = f_3(R_x)$$

$$R_x = \frac{\rho V_{\infty} x}{\mu}$$

Mediante análisis dimensional se obtiene que el cociente del espesor de capa límite entre el desplazamiento sobre la placa (x) es proporcional al inverso de la raíz cuadrada del número de Reynolds

$$\frac{\delta}{x} \propto \frac{1}{\sqrt{R_x}}$$

Igualmente el esfuerzo cortante, por conceptos de viscosidad de Newton:

$$\tau_w = \mu \frac{du}{dy}$$

Entonces, estará en función de la velocidad y del espesor de la capa límite

$$\tau_w = \mu \frac{V_{\infty}}{\delta}$$

Despejando δ entonces:

$$\tau_w \propto \sqrt{\frac{\rho \mu V_{oo}^3}{x}}$$

El valor de coeficiente de fricción:

$$C_F = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho V_{oo}^2} \propto \frac{1}{\sqrt{R_x}}$$

Para la tercera función, planteamos la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} \propto \frac{V_{oo}}{x} \quad y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \approx \frac{\Delta v}{\Delta y} \propto \frac{v_e - v_w}{\delta} = \frac{v_e}{\delta}$$

$$\frac{V_{oo}}{x} \propto \frac{v_e}{\delta}$$

Intercambiamos

$$\frac{V_{oo}}{v_e} \propto \frac{x}{\delta}$$

Por la suposición realizada

$$\frac{V_{oo}}{v_e} \propto \frac{x}{\delta} \propto \frac{1}{\sqrt{R_x}}$$

Entonces

$$\frac{V_{oo}}{v_e} \propto \frac{1}{\sqrt{R_x}}$$

1.2 Ecuaciones diferenciales de la capa limite

Entre los parámetros que se manejan en la capa límite, los más importantes son el espesor, el cual depende de la distancia a lo largo de la superficie. Igualmente es importante el esfuerzo cortante que genera el fluido sobre la superficie.

Para formular las ecuaciones a continuación se tendrán las siguientes consideraciones:

- * La presión es constante a través de la capa limite
 - * La presión es una función conocida de x y esta relacionada con la velocidad inmediatamente fuera de la capa limite por medio de la Ecuación de Bernoulli
 - * La velocidad cambia mucho más rápido a través de la capa límite que a lo largo de ella
- $$\frac{\partial u}{\partial x} \propto \frac{V_{oo}}{x} \ll \frac{V_{oo}}{\delta} \propto \frac{\partial u}{\partial y}$$

En consecuencia la expresión de continuidad en forma diferencial es aplicable:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{Suponiéndose un fluido}$$

bidimensional y bidireccional

Al resolver la ecuación de cantidad de movimiento lineal para un paquete de fluido dentro de la capa límite, obtenemos la siguiente ecuación en función del esfuerzo cortante sobre la superficie.

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{dp}{dx} + \frac{d\tau}{dy}$$

Rescribiendo la ecuación en función de la velocidad u solamente tenemos:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{d^2 u}{dy^2}$$

Obteniéndose así las ecuaciones de Prandtl de la capa limite.

Además para resolver estas ecuaciones se especifican las condiciones de frontera. En $y=0$, es decir, en la pared o superficie de la placa, se considera:

$$u=0 \text{ en } y=0$$

$$v=0 \text{ en } y=0$$

$$u \sim U \text{ en } y \sim \delta$$

1.3 Evaluación de los parámetros clave de la capa limite

El primer parámetro a evaluar es el espesor de la capa limite. Como se menciono anteriormente, el espesor de la capa límite se obtiene a partir del perfil de velocidad mediante la siguiente definición:

$$\delta = y \quad \text{Cuando } u/U=0,99$$

El esfuerzo cortante en la pared, análogo a la aplicada a la viscosidad de newton. Se expresa de la siguiente forma:

$$\tau_w = \mu \frac{du}{dy}$$

O en función del coeficiente de fricción:

$$C_F = \frac{2\tau_w}{\rho U^2} = \frac{2\nu}{U^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$$

Al existir la capa límite, causa una ligera deflexión de los vectores de velocidad que pasan alrededor del cuerpo. El efecto causado por el cuerpo se puede cuantificar mediante el espesor de desplazamiento δ^* .

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy$$

1.4 Ecuación integral de momentum de la capa límite

Para la determinación de la ecuación integral de momentum de la capa límite se empleara un volumen de control sobre un paquete de fluido dentro de la capa límite, con una altura "y" y con un espesor dx. Igualmente se aplican las ecuaciones de cantidad de movimiento lineal y de conservación de la masa.

Por continuidad:

$$\dot{m}_{izquierda} = \dot{m}_{derecha} + \dot{m}_{arriba}$$

Teniendo como:

$$\dot{m}_{izquierda} = \int_0^y \rho u dy$$

$$\dot{m}_{derecha} = \int_0^y \rho u dy + \frac{d}{dx} \left(\int_0^y \rho u dy \right) \delta x$$

$$\dot{m}_{arriba} = -\frac{d}{dx} \left(\int_0^y \rho u dy \right) \delta x$$

Por cantidad de movimiento lineal

$$M_{DERECHA} + M_{ARRIBA} - M_{IZQUIERDA} = F_{PRESION} + F_{ESFUERZO_CORTANTE}$$

Teniendo como:

$$M_{izquierda} = \int_0^y \rho u^2 dy$$

$$M_{derecha} = \int_0^y \rho u^2 dy + \frac{d}{dx} \left(\int_0^y \rho u^2 dy \right) \delta x$$

$$M_{arriba} = -U \frac{d}{dx} \left(\int_0^y \rho u dy \right) \delta x$$

$$F_{PRESION} = -\frac{dp}{dx} Y \delta x$$

$$F_{ESFUERZO_CORTANTE} = -\tau_w \delta x$$

Al resolver convenientemente obtenemos la ecuación integral de momento de Von Karman.

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta U(U-u) dy + \frac{dU}{dx} \int_0^\delta (U-u) dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

o

$$\frac{d}{dx} U^2 \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy + U \frac{dU}{dx} \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

Al realizar una manipulación de la ecuación anterior tenemos:

$$\frac{d}{dx} \left\{ \delta U^2 \int_0^1 \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) d \frac{y}{\delta} \right\} + \delta U \frac{dU}{dx} \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U} \right) d \frac{y}{\delta} = \frac{\tau_w}{\rho}$$

La ecuación anterior se puede describir en parte. Llamando a Θ como espesor de cantidad de movimiento, tenemos:

$$\Theta = \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy$$

Sustituyendo este valor en la ecuación de Von Karman, igualmente el espesor de desplazamiento tenemos:

$$\frac{d(U^2 \Theta)}{dx} + U \delta^* \frac{dU}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho}$$

Rescribiendo tenemos:

$$\frac{d\Theta}{dx} + (2 + H) \frac{\Theta}{U} \frac{dU}{dx} = \frac{C_F}{2}$$

Siendo H, factor de forma:

$$H = \frac{\delta^*}{\Theta}$$

1.5 Calculo de la capa límite sobre una placa plana: Solución laminar y solución turbulenta

Para la capa límite laminar Prandtl supuso que:

$$\frac{u}{U} = F = \frac{3}{2} \eta - \frac{\eta^3}{2} \quad 0 \leq y \leq \delta \quad y \quad F = 1 \quad y \geq \delta$$

Se satisfacen las condiciones de frontera. Se puede reescribir la ecuación

$$\tau_0 = \rho U^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{U}\right) \frac{u}{U} d\eta$$

$$\tau_0 = \rho U^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} \int_0^1 \left(1 - \frac{3}{2}\eta + \frac{\eta^3}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\eta - \frac{\eta^3}{2}\right) d\eta = 0.139,$$

En la frontera

$$\tau_0 = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \mu \frac{U}{\delta} \frac{\partial F}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \mu \frac{U}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{3}{2}\eta - \frac{\eta^3}{2}\right) \Big|_{\eta=0} = \frac{3\mu U}{2\delta}$$

Igualando las dos expresiones de τ_0 se llega a

$$\frac{3\mu U}{2\delta} = 0.139 \rho U^2 \frac{\partial \delta}{\partial x}$$

Y reordenando

$$\delta d\delta = 10.78 \frac{\mu dx}{\rho U}$$

Debido a que δ es una función únicamente de x en esta ecuación. Integrando se obtiene

$$\frac{\delta^2}{2} = 10.78 \frac{\nu}{U} x + \text{constante}$$

Si $\delta = 0$ para $x = 0$, la constante de integración es cero. Resolviendo para δ/x lleva a

$$\frac{\delta}{x} = 4.65 \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} = \frac{4.65}{\sqrt{R_x}}$$

Donde $R = Ux/\nu$ es el número de Reynolds basado en la distancia x desde el borde de ataque de la placa. Esta ecuación para el espesor de la capa límite en flujos laminares muestra que δ se incrementa en la raíz cuadrada de la distancia al borde de ataque.

Sustituyendo el valor de δ en la ecuación anterior

$$\tau_0 = 0.322 \sqrt{\frac{\mu \rho U^3}{x}}$$

El esfuerzo cortante varía inversamente con la raíz cuadrada de x y directamente con la potencia 3/2 de la velocidad. El arrastre en uno de los lados de la placa, de ancho unitario, es

$$\text{Arrastre} = \int_0^l \tau_0 dx = 0.644 \sqrt{\mu \rho U^3 l}$$

Se seleccionan otras distribuciones de velocidad, estos resultados no cambian radicalmente. La solución exacta, obtenida por Blasius a partir de las ecuaciones generales de movimiento viscoso, arroja coeficientes de 0.332 y 0.664 para las ecuaciones anteriormente respectivamente.

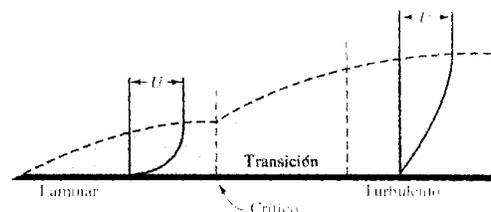
El arrastre puede ser expresado en términos de un coeficiente de arrastre C_d multiplicado por la presión de estancamiento $\rho U^2 / 2$ y el área de la placa l (por unidad de ancho),

$$\text{Arrastre} = C_d \frac{\rho U^2}{2} l$$

En la cual. Para la capa límite laminar,

$$C_d = \frac{1.328}{\sqrt{R_x}}$$

La capa límite se vuelve turbulenta cuando el número de Reynolds para la placa tiene valores entre 500.000 y 1.000.000. La figura indica el crecimiento y la transición de una capa límite laminar a una turbulenta. El número de Reynolds crítico depende de la turbulencia inicial en la corriente de fluido, del borde de aguas arriba de la placa. Y de la rugosidad de ésta.



Capa límite turbulento

Se puede utilizar la ecuación de momentum para determinar el crecimiento de la capa límite turbulenta y el esfuerzo cortante a lo largo de una

placa lisa en forma análoga al tratamiento hecho para la capa límite laminar. La ley universal de distribución de velocidad para tuberías lisas.

Proporciona la mejor base, pero los cálculos son laboriosos. Una manera mas simple es utilizar la ley de la potencia 1/7 de Prandtl. Ésta es $u/u_{\max} = (y/r)^{1/7}$ en la cual y se mide desde la pared de la tubería y r_0 es el radio de la tubería. Aplicándola a una placa plana, produce

$$F = \frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} = \eta^{1/7}$$

Y

$$\tau_0 = 0.0228\rho U^2 \left(\frac{v}{U\delta}\right)^{1/4}$$

En la cual la última expresión es el esfuerzo cortante en la pared de una placa lisa con una capa límite turbulenta. El método utilizado para calcular la capa límite laminar da

$$\tau_0 = \rho U^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} \int_0^1 (1 - \eta^{1/7}) \eta^{1/7} d\eta = \frac{7}{72} \rho U^2 \frac{\partial \delta}{\partial x}$$

Igualando las expresiones para el esfuerzo cortante, se obtiene la ecuación diferencial para el espesor de la capa límite δ como

$$\delta^{1/4} d\delta = 0.234 \left(\frac{v}{U}\right)^{1/4} dx$$

Después de integrar y suponer que la capa límite es turbulenta a lo largo de toda la longitud de la placa. De tal manera que se puedan utilizar las condiciones $x = 0$ y $\delta = 0$.

$$\delta^{5/4} = 0.292 \left(\frac{v}{U}\right)^{1/4} x$$

Despejando δ Se obtiene

$$\delta = 0.37 \left(\frac{v}{U}\right)^{1/5} x^{4/5} = \frac{0.37 x}{(Ux/v)^{1/5}} = \frac{0.37 x}{\mathbf{R}_x^{1/5}}$$

El espesor se incrementa más rápidamente en la capa límite turbulento. En ésta, el espesor se incrementa con $X^{4/5}$. Mientras que en la capa límite laminar δ varía con $X^{1/2}$

Para determinar el arrastre sobre una placa plana lisa, se elimina δ en las ecuaciones anteriores y

$$\tau_0 = 0.029\rho U^2 \left(\frac{v}{Ux}\right)^{1/5}$$

El arrastre por unidad de ancho en uno de los lados de la placa es

$$\text{Arrastre} = \int_0^l \tau_0 dx = 0.036\rho U^2 l \left(\frac{v}{Ul}\right)^{1/5} = \frac{0.036\rho U^2 l}{\mathbf{R}_l^{1/5}}$$

En términos del coeficiente de arrastre.

$$C_D = 0.072\mathbf{R}_l^{1/5}$$

En la cual R , es el número número de Reynolds basado en la longitud de la placa.

Las ecuaciones anteriores son validas únicamente en el rango de validez de la ecuación de la resistencia de Blasius. Para números de Reynolds más grandes en flujo por tuberías lisas, el exponente de la ley de distribución de velocidad se reduce. Para $R = 400,000$, $n = 1/8$ y para $R = 4,000,000$, $n = 1/10$. La ley de arrastre. Es valida para el rango

$$5 \times 10^5 < \mathbf{R}_l < 10^7$$

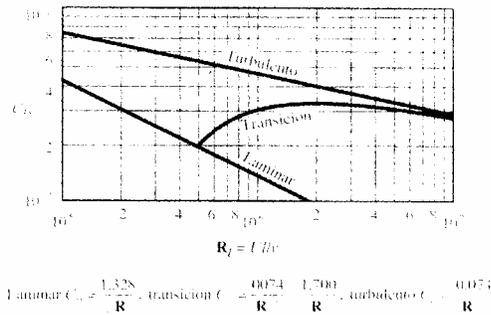
Experimento demuestran que el arrastre es ligeramente mayor que el predicho por la ecuación anterior

$$C_D = 0.074\mathbf{R}_l^{1/5}$$

La capa limite es realmente laminar en la sección de aguas arriba de la placa. Prandtl restó el arrastre de la ecuación para el extremo de aguas arriba de la placa hasta el número de Reynolds crítico y luego añadió el arrastre dado por la ecuación laminar para esta porción de la placa. Llegando a

$$C_D = 0.074\mathbf{R}_l^{1/5} + \frac{1700}{\mathbf{R}_l} \quad 5 \times 10^5 < \mathbf{R}_l < 10^7$$

En la figura se ve una grafica de log-log de C_D versus R_l , muestra la tendencia de los coeficientes de arrastre



El uso de la distribución logarítmica de velocidad, produce

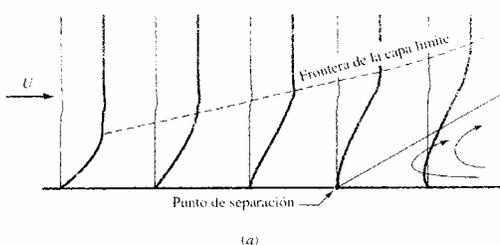
$$C_D \approx \frac{0.455}{(\log R_f)^{2.58}} \quad 10^6 < R < 10^7$$

En la cual el término constante se ha seleccionado de tal manera que se obtenga el mejor ajuste con los resultados experimentales.

1.6 Calculo de la capa límite sobre una placa plana con gradiente de presión

A lo largo de una placa plana. La capa límite continúa creciendo en la dirección aguas abajo. Sin importar la longitud de la placa. Cuando el gradiente de presión es igual a cero. Si la presión decrece en la dirección hacia aguas abajo. Tal como ocurre en la sección reductora cónica. La capa límite tiende a reducir su espesor.

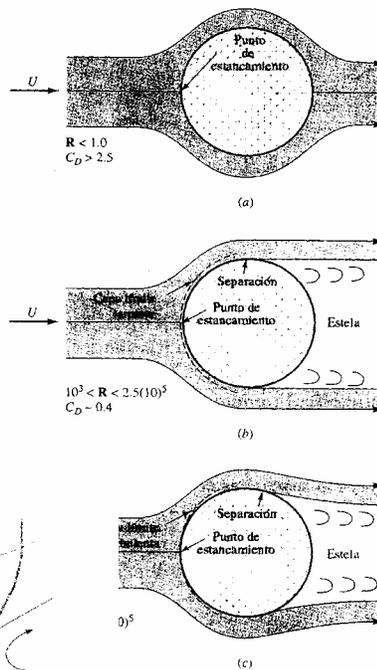
La figura ilustra este caso. La línea de corriente de la frontera debe alejarse de la frontera sólida en el punto de separación, y aguas abajo de este punto el gradiente de presión adverso produce un flujo hacia atrás cerca de la pared sólida. Esta región aguas abajo de la línea de corriente que se separa de la frontera sólida se conoce como la estela.



La naturaleza laminar versus turbulenta de la capa límite también es importante para influenciar la posición del punto de separación. La mayor transferencia de momentum dentro de una capa límite turbulenta requiere un mayor gradiente de presión adverso para causar separación que dentro de un flujo laminar más ordenado. Para números de Reynolds muy pequeños, $UD/y < 1$, el flujo en todas partes es no turbulento y el arrastre se conoce como arrastre de deformación. La ley de Stokes permite calcular la fuerza de arrastre en este caso. Para números de Reynolds grandes, el flujo puede considerarse como flujo potencial excepto dentro de la capa límite y la estela. La capa límite se forma en el punto de estancamiento delantero y generalmente es laminar. En la capa límite laminar un gradiente de presión adverso causa separación más rápidamente que en una capa límite turbulenta, debido a la pequeña cantidad de momentum contenida en la capa laminar. Si la separación ocurre en la capa laminar, la localización es más aguas arriba sobre la esfera que cuando la capa límite se vuelve turbulenta antes de que ocurra la separación.

1.7 Separación de la capa límite

Para gradientes de presión adversos, es decir, con presiones que se incrementan en la dirección hacia aguas abajo. La capa límite aumenta rápidamente su espesor. El gradiente adverso y el esfuerzo cortante en la frontera disminuyen el momentum en la capa límite. Y si ambos actúan sobre una distancia suficiente, hacen que la capa límite se detenga. Este fenómeno se conoce como separación.



El efecto de la separación es disminuir la cantidad neta de trabajo que puede ser hecho por un elemento de fluido sobre el fluido circundante, a costa de su energía cinética, con el resultado neto de que la recuperación de presión es incompleta y que las pérdidas en el fluido (arrastre) se incrementan.

Tal como se discutió, el arrastre y la sustentación tienen dos componentes: el arrastre de forma y el de fricción superficial o arrastre viscoso. La separación y la estela que acompañan este fenómeno tienen una influencia profunda en el arrastre de forma sobre los cuerpos. Si se pudiera evitar la separación del flujo sobre un cuerpo, la capa límite permanecería delgada y la reducción de presión en la estela se evitaría, minimizando de esta forma el arrastre de presión. Redondear la cara frontal de los cuerpos para reducir la oportunidad de separación del flujo en los bordes agudos es efectivo. Más importante aún es dar forma aerodinámica a la porción de cola del cuerpo para asegurar que el punto de separación ocurrirá aguas abajo a lo largo del cuerpo, tanto como sea posible.

Mediante el ejemplo de dos esferas que se dejan caer en agua a 25 pies/s. en la primera la separación ocurre en la capa límite laminar que se forma a lo largo de la superficie lisa y causa una estela muy grande que da como resultado un arrastre de presión grande. En la segunda la nariz de la esfera, la cual se ha hecho rugosa pegándole arena, induce una transición temprana a la capa límite turbulento antes de que la separación ocurra. La alta transferencia de momentum en la capa límite turbulenta retrasa la separación de tal manera que la estela se reduce sustancialmente, lo que da como resultado un arrastre total sobre la esfera, equivalente a menos de la mitad del que ocurre en la primera. A la luz de esta discusión se aclara la importancia de la superficie rugosa de una bola de golf o de tenis, o la costura en una bola de baseball.



A medida que la capa límite se acerca a la separación, el valor de H aumenta rápidamente. En general, se considera que la separación ocurre en el punto donde:

- $H > 3,5$ Se da flujo laminar
- $H > 2,4$ Se da flujo turbulento

2. Flujo externo incompresible

2.1 Fuerza sobre los cuerpos

Cuando un cuerpo se encuentra sumergido en cualquier fluido, líquido o gaseoso, se generan fuerzas sobre este, que se generan por consecuencia

del movimiento relativo entre el cuerpo y el fluido. Estas fuerzas se denominan, resistencia y sustentación.

La fuerza de resistencia está compuesta por una resistencia de forma o presión F_p y por la resistencia de superficie o resistencia de fricción F_f .

La resistencia de forma depende de la geometría del cuerpo. Se calcula como la suma por integración de todas las componentes de las fuerzas de presión en la dirección del movimiento que actúan sobre la superficie del cuerpo.

La ecuación es:

$$F_p = C_p \rho \frac{V^2}{2} A$$

Siendo C_p un valor constante que depende de la geometría del cuerpo
 A el área proyectada del cuerpo normal al flujo

Análogamente la resistencia de la fricción del cuerpo es igual a la suma por integración de las componentes del esfuerzo cortante a lo largo de la superficie en dirección del movimiento.

$$F_f = C_f \rho \frac{V^2}{2} BL$$

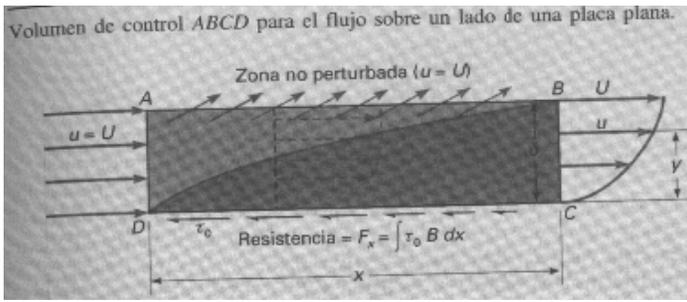
Siendo C_f un valor constante que depende de la viscosidad, entre otros factores

L longitud de la superficie paralela al flujo
 B anchura transversal, estimada aproximadamente para formas irregulares dividiendo la superficie total por L .

Esta ecuación proporciona únicamente la resistencia para un solo lado de una placa, si es que esta sumergida.

Resistencia de fricción de la capa límite:

Para obtener el valor de la resistencia de fricción de la capa límite, se plantea un volumen de control ABCD. Considerando que la velocidad $u=U$ en el borde de la capa límite, como también consideraremos la altura $BD=\delta$ para facilitar los cálculos:



Con la ecuación de cantidad de movimiento lineal tenemos:

$$-F_x = -F_F = \int_{SC} \rho V \cdot V dA$$

Considerando las distintas superficies de control, y teniendo que $Q_{AB} = Q_{DA} - Q_{BC}$

Entonces:

Superficie de control	Caudal	Variación cant. Mov
DA	$UB\delta$	$\rho(UB\delta)U$
BC	$B \int_0^\delta u dy$	$\rho B \int_0^\delta u^2 dy$
AB	$UB\delta - B \int_0^\delta u dy$	$\rho(UB\delta - B \int_0^\delta u dy)U$

Se tiene un espesor o ancho de valor B

$$-F_x = -F_F = \rho B \left\{ -U^2 \delta + \int_0^\delta u^2 dy + (U^2 \delta - U \int_0^\delta u dy) \right\}$$

$$-F_F = \rho B \left\{ \int_0^\delta u^2 dy - U \int_0^\delta u dy \right\}$$

$$-F_F = \rho B \int_0^\delta (u^2 - Uu) dy$$

$$-F_F = \rho B \int_0^\delta u(u - U) dy$$

$$F_F = \rho B \int_0^\delta u(U - u) dy$$

Si se supone que los perfiles de velocidad dentro de la placa límite en distintas distancias a lo largo de la placa son similares entre si, entonces:

$$\frac{u}{U} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

Y sustituyendo en la ecuación previa:

$$F_F = \rho B U^2 \delta \int_0^1 f\left(\frac{y}{\delta}\right) \left\{ 1 - f\left(\frac{y}{\delta}\right) \right\} d\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

El valor de integral se puede representar como un valor α .

$$F_F = \rho B U^2 \delta \alpha$$

Realizando el estudio utilizando el concepto de esfuerzo cortante:

$$\tau_o = \frac{dF}{dx}$$

$$\tau_o = \frac{d(\rho B U^2 \delta \alpha)}{dx}$$

Como δ depende de x

$$\tau_o = \rho B U^2 \alpha \frac{d\delta}{dx} \quad \text{Expresión válida}$$

tanto para flujo turbulento y laminar

Resistencia total:

La resistencia total esta originada por la resistencia superficial y la resistencia de forma, debida a la presión. No obstante, muy raramente se presentan ambos efectos simultáneamente con el mismo orden de magnitud. En el caso de objetos, que no sufren una sustentación apreciable, la resistencia del perfil o superficial es sinónima de resistencia total:

Objeto	Resist superficial	Resist de forma
Esferas	Despreciable	Apreciable
Cilindro (eje perpendicular)	Despreciable	Apreciable
Discos y placas delgadas (perpendicular a la velocidad)	CERO	Apreciable
Placas delgadas (paralelas a la velocidad)	Apreciable	Despreciable o nula
Objetos fluido dinámicos	Apreciable	Pequeña o despreciable

Sustentación y circulación:

La sustentación es el otro componente de fuerza que se genera perpendicular al movimiento relativo entre el fluido y el cuerpo.

El ejemplo mas elemental utilizado para explicar la fuerza de sustentación es el ala de un avión. Se explica que la velocidad del aire sobre la parte superior del ala es mayor que la velocidad media, mientras que la velocidad sobre la parte inferior es menor que la velocidad media. Al aplicar Bernoulli se obtiene que la presión es menor en la parte superior y mayor en la parte inferior.. Dando como consecuencia una sustentación neta hacia arriba, que permite mantener arriba el ala.

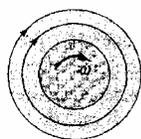
Esta diferencia de velocidades en la parte inferior y superior del ala induce un fenómeno denominado circulación., cuando el ala se mueve respecto al fluido. Esta magnitud depende de la forma del ala, su velocidad y orientación, respecto al campo de fluido

$$F_L = C_L \rho \frac{V^2}{2} A$$

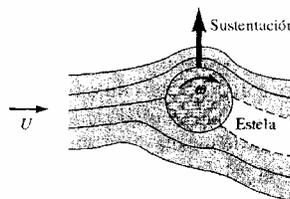
Siendo C_L un valor constante que depende de la geometría del cuerpo

A representa un área característica que normalmente es la proyección del cuerpo sobre un plano perpendicular al movimiento relativo al fluido

En el diseño de cuerpos de sustentación, tales como hidroalas, alas o álabes, el objetivo es crear una fuerza grande, perpendicular al flujo de corriente libre, minimizando al mismo tiempo el arrastre. La figura muestra los coeficientes de arrastre y sustentación para una sección de ala. En los cálculos del arrastre y la sustentación en las ecuaciones anteriormente mostradas el área se define como la longitud de la cuerda multiplicada por la longitud del ala (área proyectada máxima del ala). Se ha adoptado esta convección debido a que la sección transversal del ala cambia con el ángulo de ataque, tanto en la dirección del flujo como en ángulos normales a ésta. El ángulo de ataque α es el ángulo entre la cuerda de la sección de superficie y el vector velocidad



(a)



(b)

de la corriente libre

Para pequeños ángulos de ataque la capa límite se adhiere al ala y a pesar de que hay un gradiente de presión adverso en las superficies de atrás, existe poca separación. La falta de simetría produce una sustentación a un ángulo de ataque de 0° . A medida que el ángulo se incrementa, el gradiente adverso en la superficie superior se hace más fuerte y el punto de separación se mueve hacia delante. Aproximadamente 200, dependiendo del diseño del ala, se alcanza la sustentación máxima. Incrementos adicionales en el ángulo de ataque causan un decrecimiento súbito en el coeficiente de sustentación y un incremento en el coeficiente de arrastre. Esta condición se conoce como pérdida.

Se disponen de varias técnicas para mejorar las características de sustentación y arrastre de las alas para propósitos especiales tales como el despegue y el aterrizaje. Éstas generalmente incluyen variaciones en la sección del ala mediante el uso de alerones o métodos de control de la capa límite, a partir de la adición de ranuras.

Superficies en movimiento que influyen sobre la capa límite y los puntos de separación en cuerpos también aparecen en varias situaciones físicas comunes. Las esferas que giran juegan un papel importante en muchos eventos deportivos, incluyendo las bolas curvas o las bolas en espiral en béisbol, así como los ganchos o chanfles en fútbol o golf. La figura muestra las velocidades desarrolladas en la capa límite de un cuerpo que gira dentro de un fluido en reposo. Si esto se le superpone a un fluido en movimiento, se desarrolla la condición mostrada, la cual señala un cambio en los puntos de separación del cuerpo, con una estela colocada asimétricamente. Se crea una fuerza de sustentación en la dirección mostrada debido a que la presión se reduce en la superficie superior y se incrementa en la superficie inferior la figura muestra el coeficiente de sustentación y de arrastre para diferentes relaciones adimensionales de giro en esferas que giran.

2.2 Coeficiente de resistencia: Placa plana, cilindros circulares, esferas, otras configuraciones

Los coeficientes de

resistencia dependen del número de Reynolds para las velocidades bajas e intermedias, y se hacen independientes de dicho número para velocidades elevadas. Para velocidades muy altas el coeficiente de resistencia depende del número de Mach, cuya influencia es despreciable a velocidades bajas. Los siguientes diagramas dan las variaciones de los coeficientes de resistencia para algunas formas geométricas.

Para placas planas y perfiles de ala, los coeficientes de resistencia se tabulan, usualmente para el área de la placa y para el producto de la cuerda para la longitud, respectivamente:

Diagrama: Coeficiente de resistencia en función del número de REYNOLDS

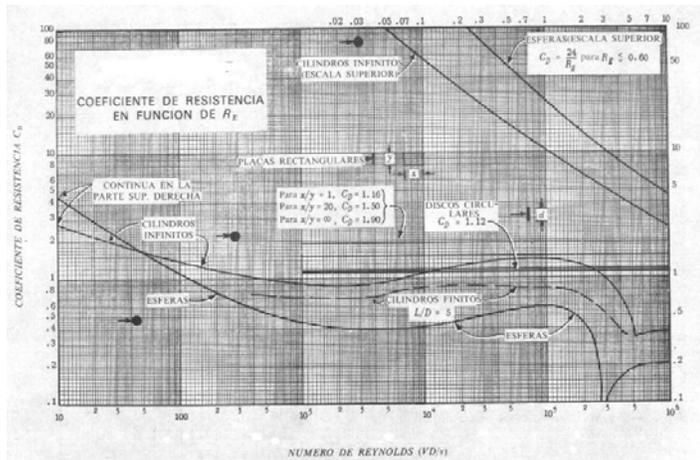


Diagrama: Coeficiente de resistencia para placas planas y lisas

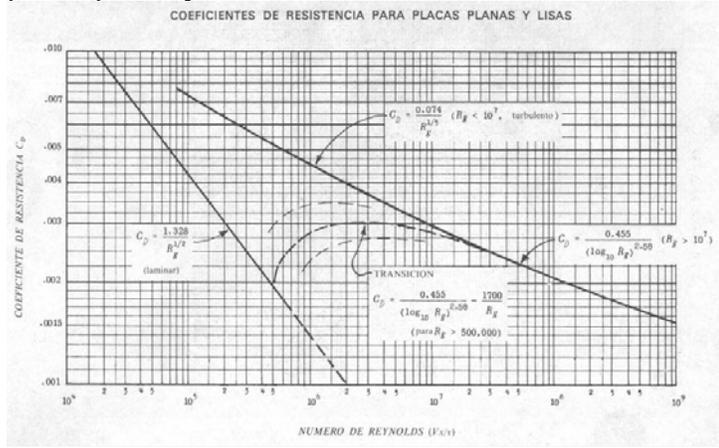
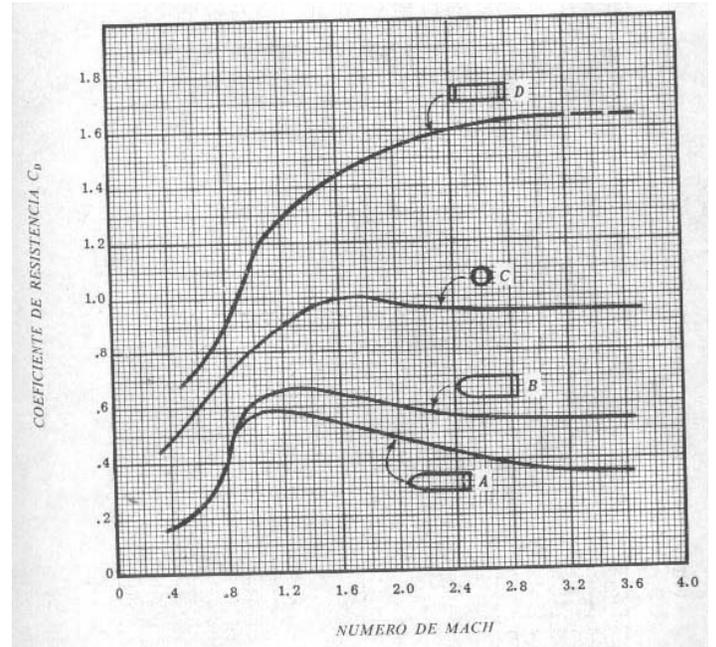
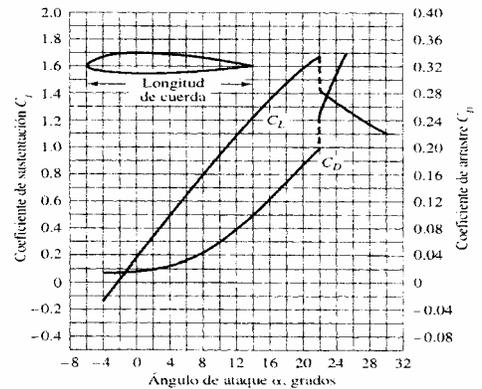


Diagrama: Coeficiente de resistencia para placas planas y lisas



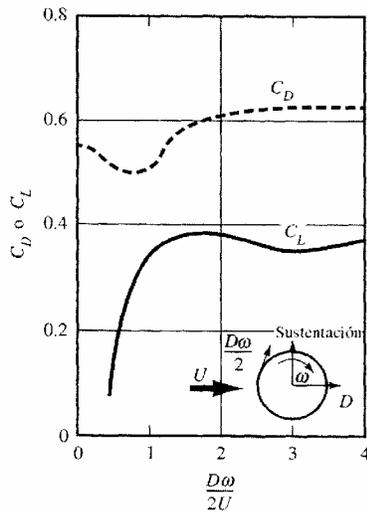
2.3 Coeficiente de sustentación: Placa plana, cilindros circulares, esferas, otras configuraciones

Coefficientes típicos de sustentación y arrastre para un ala; C_L y C_D están basados en el área máxima proyectada del ala



Coefficientes de sustentación para esferas que giran, $R \sim 10^5$

MÉTODO PARA CONTRARRESTAR LA DISIMETRÍA DE LA SUSTENTACIÓN



2.4 Dispositivos usados para aumentar la sustentación

Los multiplanos se caracterizan por tener bajos vórtices de arrastre para una envergadura y sustentación fijos. Sin embargo este tipo de sistema de sustentación solo funciona para bajos números de Reynolds, una alta combadura y un bajo espesor (alas delgadas). El arrastre inducido puede ser menor que el de un monoplano debido a que por medio de esta configuración se puede hacer incidir una mayor masa de aire, haciendo que esta masa tenga bajos cambios en su velocidad. Por ejemplo para un biplano en el que las dos alas son separadas verticalmente por grandes distancias, cada ala lleva la mitad de la sustentación total por lo que el arrastre inducido es 1/4 del de un ala sencilla. Además de las ventajas obtenidas con el vórtice de arrastre se tiene que la interferencia favorable entre las dos alas de un biplano puede ser usada para mejorar el funcionamiento de la sección alargada. Por medio de esto las desventajas que tiene un biplano con respecto a un monoplano con respecto a los bajos números de Reynolds pueden ser aliviadas. También puede ser posible que se aumente el valor de la sustentación máxima C_{Lmax} por medio de un buen diseño de los múltiples elementos de este perfil. Por ejemplo una sección sometida a un flujo 100% laminar tanto en la superficie de arriba como en la de abajo puede soportar un C_L de aproximadamente 0.4 mientras un biplano puede alcanzar un C_L de alrededor de 0.75

Al darse cuenta que los prototipos de los primeros autogiros de volteaban, Juan de la Cierva puso en práctica lo que se conoce como aleteo o *flapping*'.

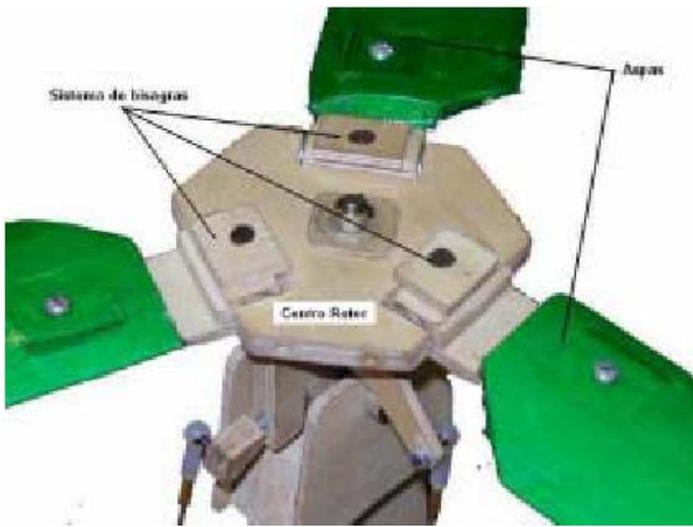
Cuando las aspas de un autogiro poseen la capacidad de aletear libremente, logran automáticamente centrar la zona de sustentación. Cuando las aspas pasan sobre la zona de mayor velocidad (lugar donde se dirigen hacia delante), estas producen más sustentación, como se dijo anteriormente; donde gracias al libre aleteo tenderán a subir y a la vez aumentarán su ángulo de ataque. Cuando el ángulo de ataque aumenta, su velocidad disminuye y por ende disminuye la sustentación. El aspa que va en retroceso, al tener poca velocidad y así menor sustentación, baja, forma un ángulo de ataque pequeño, aumenta su velocidad, y el resultado es mayor sustentación. En resumen, el aspa que avanza disminuye la sustentación y el aspa que retrocede la aumenta, logrando centrar así la zona de sustentación.

Algunos de los mecanismos más usados para el *flapping* son:

2.3.1. Rotores rígidos. El aleteo es permitido mediante las propiedades de flexión del material de las aspas.

2.3.2. Rotores semirígidos. El aleteo se logra mediante una junta universal localizada en el cubo de las aspas. Las aspas siendo rígidas, pero a la vez estando unidas a esta junta producen un movimiento parecido al de un balancín. Este tipo de rotor requiere dos aspas solamente.

2.3.3. Rotores con bujes en el cubo. En este caso el aleteo es permitido mediante unas bisagras que unen las aspas con el cubo. Este es uno de los métodos más usados en los aeromodelos.



Bisagras de un rotor de aeromodelo

2.5 Aplicaciones no relacionadas con la aviación

Este tema, al realizarse el estudio se va siempre a las aplicaciones relacionadas con la aviación, pero también se pueden considerar las siguientes aplicaciones:

Pelotas de Golf

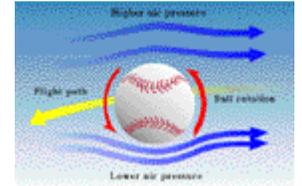
La sustentación es otra fuerza aerodinámica que afecta el vuelo de una pelota de golf. Esta idea podría parecer un poco extraña, pero si se le da el giro apropiado, una pelota de golf puede generar sustentación. Al principio, los jugadores de golf pensaban que todo tipo de giro de la pelota era perjudicial (malo). Sin embargo, en 1877, el científico británico P.G. Tait descubrió que una pelota a la que se le da "backspin" (giro que hace que la parte superior de la pelota dé vuelta hacia atrás en dirección al jugador de golf) realmente produce sustentación.

Los hoyuelos también hacen que la sustentación aumente. Recuerda, los hoyuelos ayudan a que el flujo no se separe de la esfera. Los hoyuelos también hacen el flujo se "enfoca" en dirección del flujo de la estela (el "rastro" que deja un cuerpo en movimiento en el aire). En esta figura, el humo muestra el cómo se comporta el flujo alrededor de una pelota de golf que gira. El flujo se mueve de izquierda a derecha y la pelota gira en dirección opuesta a al movimiento de las manecillas del reloj. El giro de la pelota obliga a que la estela se desvíe hacia abajo. Este movimiento de la estela hacia abajo

significa que una fuerza de sustentación está siendo ejercida sobre la pelota de golf.

Béisbol - Lanzamiento de Curva

Justo antes del comienzo de la guerra civil americana, un muchacho de Nueva Inglaterra llamado Arthur Cummings quedó fascinado con un nuevo juego muy popular conocido como "béisbol". En las playas cercanas a su casa, Arthur imitaba (copiaba) a sus héroes lanzando conchas de mar incansablemente. Pronto descubrió que cuando tomaba y lanzaba las conchas de cierta manera, podía hacer que las conchas trazaran una curva en el aire. Arthur, apodado por sus amigos como "Candy" ("caramelo"), soñaba con algún día poder jugar con sus héroes y hacer que una pelota de béisbol trazara una curva como las conchas de mar.



En 1867, a la edad de 18 años, Candy Cummings, ahora un lanzador del equipo del béisbol los Excelsiors de Brooklyn, probó el lanzamiento que había estado perfeccionando en el secreto por años. Se preparó y torciendo la muñeca al momento de soltarla. Miró con placer se arqueaba en el aire, se le terminaba en el guante del catcher. ¡STRIKE! Una y otra vez a lo largo del juego, Cummings hizo que los bateadores "abanicaran" el aire y se "poncharan", mientras trataban de conectar su lanzamiento secreto. Ahora, en el Salón de la Fama del Béisbol en Cooperstown, Nueva York, hay una placa que dice: Candy Cummings, inventor del lanzamiento de curva.

Y sin embargo, por más de 100 años después de que Candy introdujo su nuevo lanzamiento, la gente ha puesto en duda lo que ven sus ojos. ¿Una lanzamiento de béisbol realmente se arquea en el aire o es sólo una ilusión óptica? Varias veces a través de los años, la gente ha intentado comprobar si la bola realmente traza una curva. Primero, dos grandes aros fueron colocados entre el montículo del lanzador y la base del bateador. La bola era entonces lanzada a través de los aros. La bola se iba curvando al pasar por el primer aro y al llegar al segundo. La bola parecía describir una curva, pero



muchos todavía lo dudaban. En 1941, las revistas Life y Look utilizaron fotografía de acción detenida para ver si la bola realmente se curvaba. La revista Life concluyó que la bola no se curvaba; Look determinó que sí lo hacía. No fue sino hasta 41 años más tarde, en 1982, que el Instituto de Tecnología de Massachusetts acabó con la controversia: un lanzamiento de curva sí hace que la pelota realmente trace una curva, y esto puede explicarse mediante las leyes de la física.

Jabalina

Examinando la aerodinámica de la jabalina, comenzaremos a entender cómo una jabalina podría estar diseñada para limitar el tiempo del vuelo y para aterrizar con la punta para abajo. Al ser lanzada una jabalina, el aire se desplaza (viaja) alrededor del astil (o varilla de la jabalina). El flujo de aire tiende a separarse en la superficie superior. Uno normalmente asocia la separación del flujo con un aumento en la fuerza de fricción (o resistencia al aire). Esto es lo que sucede aquí, sólo que en este caso la dirección de la fuerza de fricción es contraria a la de la fuerza gravitacional. Por lo tanto, la separación del flujo de aire en la superficie superior de la jabalina en realidad aumenta el tiempo de vuelo.



Pero entonces, cómo es que el tiempo de vuelo "disminuye" realmente? Toda jabalina diseñada para una competición oficial tiene el mismo "centro de gravedad" o punto de equilibrio. Cuando la jabalina está en vuelo, también debemos tener en cuenta otro punto llamado "centro de presión", que se puede considerar como el punto en el que actúan las fuerzas aerodinámicas. A pesar que la orientación de la jabalina varía a través del vuelo, el centro de presión permanece detrás del centro de gravedad. Esto causa un momento de cabeceo de "nariz abajo", que hace que la punta de la jabalina se incline siempre hacia el suelo. La posición de punta abajo es más segura, más precisa, y acorta el tiempo de vuelo. La jabalina también experimenta un giro alrededor de su eje longitudinal durante el vuelo. Este giro puede alcanzar unas 25 revoluciones por segundo. Este movimiento tiende a darle estabilidad (estabilizar) a la jabalina durante el vuelo.

Un problema que ocurre durante el vuelo es la oscilación (vibración). Esta oscilación tiene una frecuencia de alrededor de 25 hertzios. La oscilación

perturba (altera) el vuelo de la jabalina y es necesario que el lanzador la reduzca al mínimo.

Autos de Carreras

La importancia de la aerodinámica ha sido reconocida a través de gran parte de la historia de las competencias de autos de carreras. Desde los comienzos de la carrera Indianapolis 500 (Indy 500), los coches ya eran construidos con los cuerpos aerodinámicos. Sin embargo, la tecnología del motor, la suspensión, y los neumáticos era más importante en aquella época. La aerodinámica del automóvil no fue estudiada detenidamente sino hasta principios de la década de 1960. La reducción de la resistencia del aire sigue siendo importante, pero un nuevo concepto (idea) ha tomado prioridad: la producción de una fuerza aerodinámica dirigida hacia abajo (sustentación negativa), que es considerada más importante que la reducción de la resistencia.



Desde el principio de las competencias de autos de carreras, los coches se han vuelto más y más rápidos. A principios de la década de 1960, la velocidad ya habían alcanzado un nivel peligroso. Para disminuir la velocidad y aumentar la seguridad, se decretaron algunas reglas para limitar la potencia del motor y talla de los neumáticos.

Puesto que la resistencia del aire producida por el vehículo y los neumáticos ya había sido reducida, los diseñadores necesitaban encontrar alguna otra cosa que les diera a sus coches una ventaja sobre los demás. Ahora, la mayoría de los automóviles producen sustentación. Conforme la velocidad aumenta, la fuerza de sustentación aumenta y el coche se vuelve inestable. El coche debe poder permanecer en la pista y dar vuelta casi constantemente.

Para contrarrestar el problema de la sustentación, los autos de carreras modernos están diseñados para producir sustentación negativa. Esto significa que al auto se le agregan algunos dispositivos que causan que el coche presione contra el suelo y se mantenga más cerca de él. Estos dispositivos neutralizan la sustentación producida por el coche o crean de hecho sustentación negativa.

Hay varios métodos que se utilizan para reducir la sustentación o para crear fuerza hacia abajo. Estos métodos incluyen interceptores aerodinámicos (spoilers) y efectos de tierra. El tipo de

dispositivo utilizado depende de la clase de competencia y de las restricciones (reglas) que hayan sido impuestas.

Los dispositivos disponibles más simples son un tipo de presas de aire delanteras e interceptores aerodinámicos traseros. Estos dispositivos tienen realmente varios efectos positivos. Al reducir el flujo del aire por debajo del vehículo, una presa de aire delantera reduce la resistencia del automóvil. Además, inmediatamente detrás de la presa de aire, la presión también se reduce, lo cual ayuda a que el radiador reciba un flujo de aire fresco. Al mismo tiempo, la sustentación se reduce en la parte de enfrente del coche.

El interceptor aerodinámico trasero puede reducir la separación del flujo en la ventana posterior, lo cual reduce la resistencia del aire. También hace que aumente el flujo del aire por debajo del auto, lo cual promueve la generación de una fuerza hacia abajo en la parte posterior del coche.

Se utilizan alas reales en los autos de carreras de Fórmula Uno, Indy, y Grupo C. Sin embargo, las alas se invierten (se colocan con la parte de arriba hacia abajo) para producir una fuerza hacia abajo en lugar de sustentación hacia arriba. Al instalar las alas cerca del suelo, se pueden producir cantidades más grandes de esta fuerza que apunta hacia abajo. Esto se debe al aumento de la velocidad del flujo entre la ala y el suelo. El aumento en la velocidad del flujo causa que la presión en la superficie inferior de la ala disminuya, y que, por consiguiente, la fuerza hacia abajo aumente.

Barcos de Vela

Aunque el vuelo ha sido un logro reciente para los humanos, el viento ya era utilizado para el transporte desde hace mucho tiempo. No se sabe exactamente cuándo se inventó la vela, pero un grabado encontrado en una vasija egipcia de hace 5000 años muestra claramente un barco de vela.



Cuatro maneras de desplazarse por el agua (sin incluir el nado) son: la flotación, el remo, la navegación y el viaje en lancha con motor. El primer recorrido en el agua se logró simplemente flotando. En la actualidad aún podemos observar el uso continuo de los métodos antiguos. La gente tamil de Sri Lanka simplemente se coloca un tronco debajo del brazo para flotar. En Nueva Zelanda los Maoríes

amarran manojos de carrizos para formar una balsa. La gente de Sind, Paquistán viaja flotando dentro de unas ollas, mientras que algunos iraquíes utilizan pieles de cabra llenas de aire. Durante algún tiempo, el equipo estándar de un soldado romano incluía una piel inflable para cruzar los ríos. Algunas de estas ideas fueron combinadas para crear aparatos flotantes más grandes. Se construyeron plataformas de carrizo que flotaban con pieles infladas lo suficientemente grandes para transportar elefantes a los lugares de batalla. Aldeas enteras se transportaban de un lugar a otro en un solo barco.

Una vez a flote, los seres humanos tuvieron que encontrar la manera de viajar contra la corriente del agua. El uso de palos para empujar a lo largo del fondo de los ríos, o el batir las manos o paletas de madera eran algunos de los métodos usados. Más tarde, se utilizaron remos que se movían al unísono (todos al mismo tiempo). Aún así, resultaba más sencillo viajar con la corriente. Regresar río arriba por tierra no era más rápido, pero le ahorraba mucha energía a la gente.

La invención de la vela fue una muestra de cómo los seres humanos podían usar la fuerza de la naturaleza (el viento) para mover sus embarcaciones, en vez de hacer uso solamente de la fuerza humana. La vela fue probablemente utilizada por primera vez en un barco navegando en el río Nilo hace más de 5000 años. En un dibujo de ese tiempo aparece una simple vela cuadrada sujeta a un palo cerca del frente de un barco. Incluso este primitivo (simple) diseño debió haber funcionado, y nuevos diseños aparecieron en los próximos cientos de años. Hacia el año 2400 B.C. la vela había llegado a tomar una forma oblonga (que es más larga que ancha, como un rectángulo), y podía ser vista en mástiles (postes) muy altos. El propósito era recoger los vientos que corrían por el Nilo sobre los acantilados. En el resto del Mediterráneo la vela era baja y cuadrada. Este tipo de vela era más fácil de manipular, y los egipcios más tarde cambiaron sus velas por la vela cuadrada baja. Los aparejos y cuerdas que constituyen los medios de soporte y control también fueron desarrollados durante este tiempo. Esto permitió levantar o bajar la vela cada vez que fuera necesario.

CONCLUSION

El conocimiento de las fuerzas ejercidas por los fluidos en los movimientos es de gran importancia en el análisis y diseño de dispositivos tales como bombas, turbinas, aviones, cohetes, hélices, barcos, cuerpos en movimiento, edificios y multitud de dispositivos hidráulicos. Las ecuaciones fundamentales de la energía no son suficientes para resolver la mayoría de estos problemas. Es más decisivo el empleo de otro principio de la mecánica, el de la cantidad de movimiento. La teoría de la capa límite proporciona una nueva base para el análisis más minucioso. La experimentación, cada vez más continua y extensa, proporciona sin cesar nuevos datos para conocer las leyes de variación de los coeficientes fundamentales.

FUENTES CONSULTADAS

GILES, Ranald V. Mecánica de los Fluidos e Hidráulica. Libros McGraw-Hill Series de Compendios SHAUM. Bogota. 1969.

FRANZINI, Joseph B y FINNEMORE, E. John. Mecánica de Fluidos con aplicaciones en Ingeniería. McGraw Hill. Novena Edición. Madrid. 1999

STREETER, Victor; WYLIE, E. Benjamín y BEDFORD Keith W. Mecánica de Fluidos. McGraw Hill. Novena Edición. Bogota. 2000.

AYRES, Frank Jr. Ecuaciones Diferenciales. Shaum McGraw Hill. Mexico. 1991.

GERHART, P; GROSS, R Y HOCHSTEIN, J. Fundamentos de Mecánica de Fluidos. Addison-Wesley. Segunda Edición. Mexico. 1995

Principios de la Aeronáutica - Avanzado
http://wings.avkids.com/Libro/Sports/advance_d/index.html