



Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Mecánica de Medios Continuos y
Teoría de Estructuras

Ingeniería Industrial

Proyecto Fin de Carrera

Análisis preliminar del comportamiento
dinámico de un ala en régimen subsónico
mediante la teoría elemental de vigas

Autor: Javier Lara Luque

**Tutor: Enrique Barbero Pozuelo
José Fernández Sáez**

INDICE

1. INTRODUCCIÓN	2
1.1 Motivación	3
1.2 Objetivo general	4
1.3 Descripción	5
2. ANTECEDENTES	6
2.1 Problemas aeroelásticos	7
2.2 Aeroelasticidad	14
2.3 Flutter	17
3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA Y SU SOLUCIÓN.	19
3.1 Ecuaciones del movimiento	21
3.2 Métodos de resolución del problema	29
3.3 Método de resolución aplicado al problema	35
4. RESULTADO NUMÉRICO	53
4.1 Validación del método	60
5. INFLUENCIA DE LAS DIFERENTES VARIABLES	65
6. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS	69
6.1 Conclusiones	69
6.2 Trabajos futuros	70
7. BIBLIOGRAFÍA	71
ANEXO	73

1. INTRODUCCIÓN

En este documento, se tratará el estudio de la estabilidad de una de las partes más críticas de una aeronave, las alas, siendo fundamentales para el funcionamiento del avión. Este estudio es extensible a estructuras en las que su funcionamiento se basa en la velocidad del aire, como pueden ser los aerogeneradores, o que se vean influenciadas por el viento y su estructura deba soportar los esfuerzos aerodinámicos generados, como por ejemplo en las chimeneas y en los puentes. La inestabilidad se produce al alcanzar una velocidad crítica que provoca la inestabilidad estructural del ala. Esta inestabilidad se produce porque la frecuencia de excitación toma el valor de la frecuencia natural del sistema, provocando la resonancia en la estructura.

El modelo estructural se realizará mediante la suposición del ala como una viga en voladizo con tres grados de libertad. El empotramiento de esta viga es el fuselaje de la nave. Los tres grados de libertad son el desplazamiento vertical, la curvatura del ala y la rotación del ala con respecto al fuselaje del avión. La metodología de resolución del problema tratado es la utilización de elementos finitos, usando el método de Galerkin. Este método emplea funciones definidas a trozos que satisfacen las condiciones de contorno de problema en cada extremo de las funciones. Se definirán otro grupo de funciones y se realizará el mismo estudio. Se probarán y compararán los resultados de los dos grupos de funciones, definidas en el método de Galerkin y el grupo de funciones de un grado mayor.

Evaluada la comparación de los resultados obtenidos con los grupos de funciones, se escogerá el grupo de funciones con menor error relativo sobre la solución exacta y se estudiará el comportamiento del sistema con la variación de los parámetros principales del problema. Con la variación de los parámetros principales del problema se estudiará la influencia de éstos en la solución final.

1.1 MOTIVACIÓN

Para estudios donde la resolución del problema supone un cálculo computacional muy grande, es importante realizar una primera aproximación. En esa primera aproximación, lo que se pretende es simplificar lo máximo posible el problema para la obtención de un dato orientativo de la solución real. Los términos incluidos en las ecuaciones deben ser suficientemente significativos para no ser despreciados, pero sin perder la noción del objetivo final, que es obtener una referencia elocuente con el valor real.

En el caso que se trata en este documento, esa primera simplificación es la utilización de la teoría elemental de vigas para el análisis estructural del comportamiento dinámico de un ala. El ala se encuentra sometida a acciones aerodinámicas correspondientes a un régimen subsónico. Se considera también una geometría básica del ala y se estudiarán la influencia de los parámetros característicos en la respuesta del problema.

1.2 OBJETIVO GENERAL

En el presente documento se realizará un estudio del fenómeno de flutter para un ala de una aeronave, con la determinación de la velocidad (velocidad crítica) a la que se produce dicho fenómeno. Para ello, se considerará el ala como un perfil estructural en voladizo para su estudio, utilizando las propiedades físicas de un ala convencional y la teoría fundamental de vigas.

Para la geometría del ala se utilizarán los elementos finitos, permitiendo obtener una solución aproximada del cuerpo de estudio y el resultado del problema. Para el método de Galerkin, que es el método de elementos finitos que se utilizará, se debe definir el grupo de funciones que cumplen las condiciones de contorno del problema.

Para concluir el estudio, se comprobarán las variables físicas del ala que son influyentes en el resultado final del problema analizado.

1.3 DESCRIPCIÓN

Para el estudio matemático del problema, se utilizarán los elementos finitos. En concreto, el método a utilizar es el método de Galerkin, definiendo funciones que cumplan las condiciones de contorno del problema inicial. Se utilizarán dos grupos de funciones para aplicar el método y poder discutir con que funciones el error cometido es menor. Para el primer grupo de funciones, se definirán las funciones a trozos, cumpliendo en cada extremo las condiciones de contorno del problema inicial. En el segundo grupo de funciones, se escogen funciones de un grado mayor para que se puedan cumplir dichas condiciones.

Al obtener los grupos de funciones, se aplica al problema tratado para obtener la solución aproximada. Se comparará con el valor de la solución exacta y verá con cuál de los dos grupos de funciones el error cometido es menor.

Para terminar, se escogerán las propiedades físicas más importantes para el problema y se verá cómo afecta la variación de su valor al resultado final para la obtención de la velocidad crítica que provoca el fenómeno de flutter.

2 ANTECEDENTES

La aeroelasticidad es la disciplina de la ingeniería aeronáutica que estudia la respuesta de vehículos flexibles sometidos a acciones externas aerodinámicas y, en el caso de aeronaves, requiere el acoplamiento de fuerzas inerciales, estructurales, aerodinámicas. La aproximación clásica considera modelos lineales, algo que puede no ser cierto en determinadas condiciones: no linealidades estructurales por holgura o fricción en la rotación de las superficies de control, movimiento del combustible en los depósitos, desprendimiento de corriente, flujo transónico o leyes de vuelo no lineales que dependen de la condición de vuelo. Las no linealidades provocan inestabilidades aeroelásticas que no predicen los modelos lineales, como oscilaciones de ciclo límite o respuesta crítica, y que tienen influencia en la vida en fatiga de los materiales o en las cualidades de vuelo de la aeronave.

2.1 PROBLEMAS AEROELÁSTICOS

La búsqueda de la optimización de los diseños provoca que se tienda a la disminución del peso del avión. Para llevar a cabo esta optimización se debe realizar, en primer lugar, un estudio exhaustivo de las inestabilidades aeroelásticas, como las vibraciones y la sustentación necesaria, deben ser incluidas antes del test de vuelo inicial.

La aeroelasticidad es la ciencia que analiza la interacción mutua entre la aerodinámica y las estructuras dinámicas de un sistema en movimiento como vehículos aeroespaciales. Debido a que las estructuras de las naves no son totalmente rígidas, las deformaciones que sufre provocan que cambien las fuerzas aerodinámicas a las que está sometido. Algunos ejemplos de problemas aeroelásticos de naves aeroespaciales son las fluctuaciones del ala de vehículos espaciales, los ciclos límites de oscilación de aviones de combate con depósitos exteriores, el plano vertical amortiguado de las colas gemelas en los cazas, la interacción dinámica de un helicóptero y de sus aspas, el control del armónico superior del aspa del rotor de un helicóptero...

El problema físico aeroelástico es la interacción entre un fluido, el aire, y la estructura del avión. El problema matemático que supone el estudio aeroelástico es la relación existente entre complejas iteraciones matemáticas y las correspondientes expresiones de las disciplinas físicas utilizadas. Las disciplinas físicas que se estudian en este caso son la dinámica de fluidos alrededor del aire pegado al vehículo y la dinámica estructural de los cuerpos que forma la nave. Un camino para solucionar el problema aeroelástico es combinar todos los casos de las disciplinas físicas y matemáticas en un problema único.

A continuación, se van a exponer unos conceptos básicos de la aerodinámica en la que se fundamenta la aeroelasticidad. Un fluido se define por su compresibilidad y su viscosidad. Siendo los parámetros de velocidad del fluido que se utilizan en este estudio menores que la propagación del sonido, la variación de la densidad del fluido provocada por el movimiento de un cuerpo dentro del flujo se puede despreciar. No considerar esta

variación de la densidad hace que se puede tomar como incompresible el fluido de estudio. Al ser de naturaleza gaseosa el fluido, la interacción del entre el flujo de aire y el cuerpo sólido se realiza en una fina capa, denominada capa límite. La capa límite es donde se produce la variación de la velocidad del reposo hasta el 99% de la velocidad del movimiento dentro del fluido. Debido a que fuera de la capa límite no hay variaciones de la densidad, no existen los efectos de la viscosidad. Por tanto, se considera al fluido no viscoso. Al ser un fluido no viscoso, se considera que el fluido es ideal.

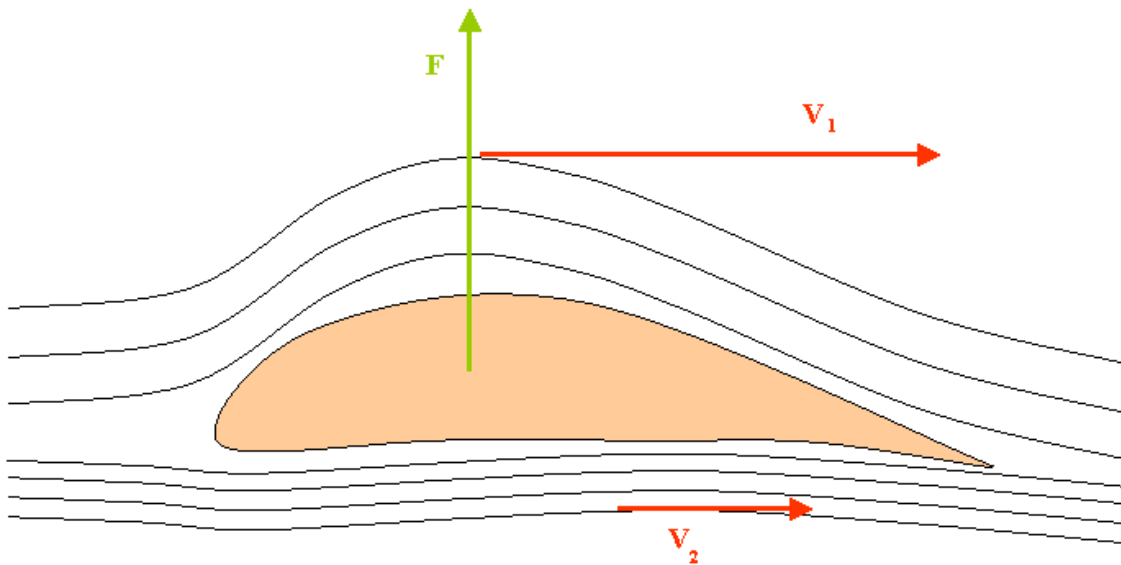


Figura 2.1: Sección transversal con la distribución de velocidades y fuerzas

Ahora considérese un ala de avión cuya sección trasversal, que se muestra en la figura 2.1, es sometida a una masa de aire en movimiento. Las partículas del aire se moverán, tanto por la parte superior como por la parte inferior del perfil. Debido al diseño de la sección transversal del ala, la masa de aire que se desplaza por debajo del perfil tiene menor velocidad. De acuerdo al teorema de Bernoulli, en un fluido en movimiento la suma de la presión y la energía cinética del fluido en un punto cualquiera permanece constante. El teorema de Bernoulli se expresa de la siguiente forma considerando que no hay potencial gravitatorio del fluido

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 = C \quad (2.1)$$

Como se muestra en la figura 2.1 y teniendo en cuenta la ecuación de Bernoulli, la diferencia de presiones en la sección del ala produce una fuerza en el sentido ascendente. Se denomina a P la presión estática y a $\frac{1}{2}\rho v^2$ la presión dinámica.

Se puede afirmar que en un fluido en movimiento es la suma de la presión estática y la dinámica, denominada presión total, es constante

$$P_e + P_d = P_T = C \tag{2.2}$$

Como se muestra en la figura 2.1, existirán dos regiones cuya diferencia de velocidad induciendo una diferencia de presiones estáticas que provocará una fuerza de origen aerodinámico que dependerá, primeramente, de la geometría del cuerpo y su posición con respecto a la normal del área transversal del flujo.

La geometría del cuerpo es la sección transversal de un tipo de ala convencional, donde la cuerda c se mantiene constante a lo largo de toda la longitud del ala. La posición respecto al flujo de aire se recoge en el ángulo de ataque del ala definida por α . A continuación, se muestra en la siguiente figura 2.2 las partes de la sección transversal de un ala

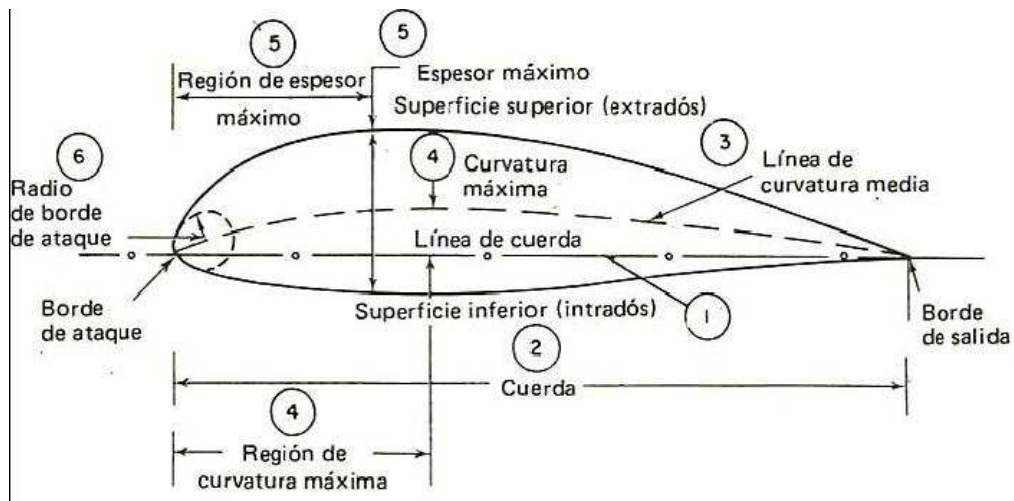


Figura 2.1: Partes de la sección transversal de un ala.

Siendo la descripción de cada parte la siguiente:

1. La línea de cuerda es una línea recta que une el borde de ataque y el borde de fuga del perfil.

2. La cuerda es la longitud de la línea anterior. Todas las dimensiones de los perfiles se miden en términos de la cuerda.
3. La línea de curvatura media es la línea media entre el extradós y el intradós.
4. Curvatura máxima es la distancia máxima entre la línea de curvatura media y la línea de cuerda. La posición de la curvatura máxima es importante en la determinación de las características aerodinámicas de un perfil.
5. Espesor máximo es la distancia máxima entre la superficie superior e inferior (extradós e intradós). La localización del espesor máximo también es importante.
6. Radio del borde de ataque es una medida delafilamiento del borde de ataque. Puede variar desde 0, para perfiles supersónicos afilados, hasta un 2 por 100 (de la cuerda) para perfiles más bien achatados.

Para el caso de un fluido y un flujo real, la fuerza dependerá de la densidad del fluido ρ , su viscosidad μ , la velocidad v , su compresibilidad y de las características no estacionarias del mismo. En el caso que el fluido de estudio sea ideal, dependerá de la densidad, de la velocidad y de las características no estacionarias, ya que la viscosidad se toma como constante y la compresibilidad se considera nula. Las características del flujo no estacionarias se pueden expresar con una frecuencia w . En el caso de un fluido real, aparte del estudio de la frecuencia se debe tener un parámetro para la compresibilidad en el estudio no estacionario [7].

Si la velocidad de propagación del sonido se denota por x , entonces, para un flujo de un fluido compresible, la fuerza experimentada por un cuerpo sólido dependerá de las variables siguientes:

Para un caso práctico, se considera que un ala experimenta dos componentes de fuerzas y una componente del momento, que son:

- Levantamiento o sustentación (L) es la fuerza generada sobre un cuerpo que se desplaza a través un fluido, de dirección perpendicular a la de la velocidad de la corriente incidente.
- Resistencia al avance (D) fuerza que sufre un cuerpo al moverse a través del aire en la dirección de la velocidad relativa entre el aire y el cuerpo. La resistencia es siempre de sentido opuesto a dicha velocidad, por lo que habitualmente se dice de ella que es la fuerza que se opone al avance de un cuerpo a través del aire.

- Momento (M_a) momento alrededor de un eje perpendicular tanto a la dirección de movimiento como al vector sustentación, positivo si tiende a elevar la nariz del avión.

Los tres coeficientes principales de un perfil y/o del ala son:

C_L : coeficiente de sustentación.

C_D : coeficiente de resistencia al avance.

C_{Ma} : coeficiente de movimiento aerodinámico.

Para el estudio bidimensional aerodinámico, se suele trabajar con los esfuerzos, fuerzas y momentos, por unidad de longitud de la cuerda del ala. C_L , C_D , C_{Ma} son funciones del Número de Reynolds ($R = \frac{v l \rho}{\mu}$), al número de Mach ($M = \frac{v}{X}$), siendo X la velocidad del sonido, y la frecuencia reducida del sistema, la forma del cuerpo y la posición del cuerpo con respecto al flujo. Para un perfil transversal de un ala, la posición se describe por la inclinación entre la dirección del viento y la cuerda, formando un ángulo denotado por α y conocido como ángulo de ataque.

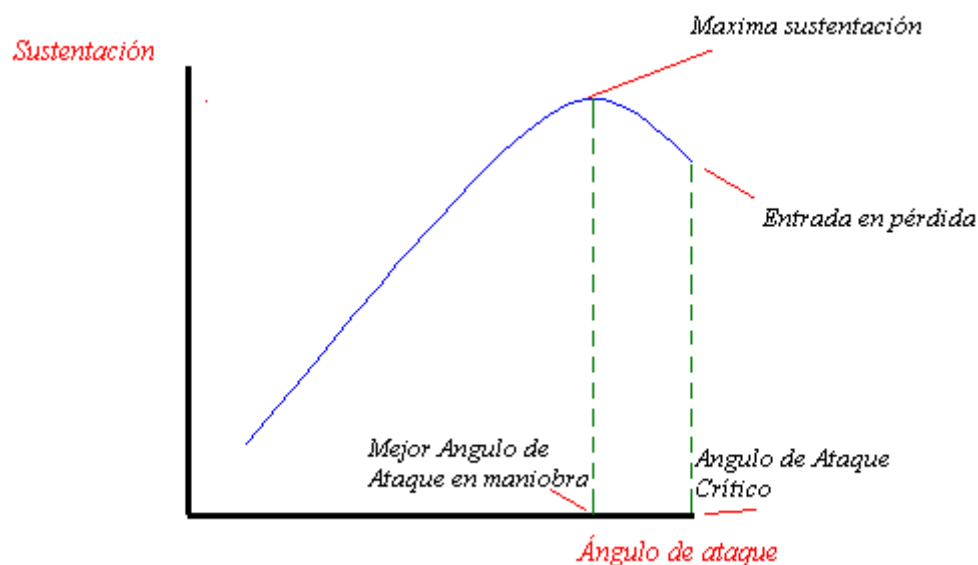


Figura 2.2: Coeficiente de sustentación en función del ángulo de ataque

En el flujo estable de un fluido ideal, los coeficientes únicamente dependen del número de Reynolds y del ángulo de ataque. La Figura 2.3 muestra la curva que define el coeficiente C_L en función del ángulo de ataque. Para este coeficiente, en ningún momento depende del valor que tome el número de Reynolds. Para ángulos de ataque pequeños, C_L se incrementa linealmente. La constante proporcional se llama pendiente de la curva de sustentación, se denota por a y es prácticamente independiente del número de Reynolds. Según va aumentando el valor de α , el valor del coeficiente de sustentación alcanza un valor crítico que es el máximo de C_L . A partir de este valor de α el coeficiente de sustentación decrece, definiéndose esta parte como desplome del coeficiente.

También se debe considerar el centro de presiones. Dicho centro se denomina al punto teórico del ala donde se considera aplicada toda la fuerza de sustentación. La figura 2.4 muestra un ejemplo de la distribución de presiones sobre un perfil dentro de un fluido. A efectos teóricos, aunque la presión actúa sobre todo el perfil, se considera que toda la fuerza de sustentación se ejerce sobre un punto en la línea de la cuerda (resultante).

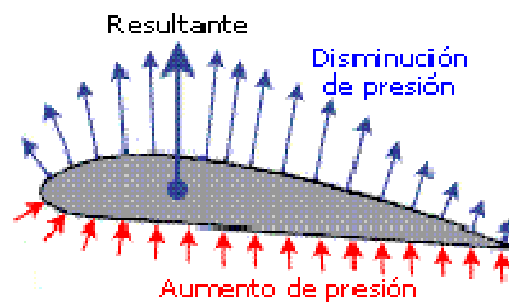


Figura 2.3: Centro de presiones

La posición del centro de presiones se suele dar en tanto por ciento de la cuerda del ala a partir del borde de ataque. A medida que aumenta o disminuye el ángulo de ataque se modifica la distribución de presiones alrededor del perfil, desplazándose el centro de presiones, dentro de unos límites, hacia adelante o atrás respectivamente.

El margen de desplazamiento suele estar entre el 25% y el 60% de la cuerda, y puesto que afecta a la estabilidad de la aeronave es conveniente que sea el menor posible.

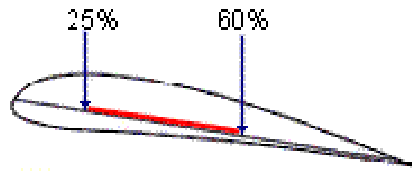


Figura 2.4: Límites del centro de presiones

2.2 AEROELASTICIDAD

La aeroelasticidad es el estudio de la interacción mutua que ocurre dentro del triángulo de las fuerzas inerciales, elásticas y aerodinámicas actuando sobre miembros estructurales expuestos a una corriente de aire, y la influencia de este estudio en el diseño. Diferentes estructuras pueden llegar a desarrollar deformaciones elásticas muy grandes e incluso oscilaciones que produce el fallo estructural para ciertos rangos de velocidades de viento. La falla del Puente del Estrecho de Tacoma es un ejemplo de una oscilación aeroelástica.

Si la velocidad del viento y el modo y la frecuencia de la oscilación estructural son tales que la energía del viento puede ser absorbida por la estructura, las vibraciones en la estructura se atenúan. Si la energía absorbida es mayor que la disipada por el amortiguamiento estructural, seguirá aumentando la amplitud de la oscilación y finalmente colapsará la estructura. Por lo tanto, predecir la velocidad de viento crítica a la cual la estructura puede volverse aeroelásticamente inestable es el objetivo principal para los diseñadores para evitar los fallos estructurales.

Dentro de la aeroelasticidad, existen diferentes fenómenos que se caracterizan por una o más interacciones de fuerzas o grados de libertad.

Para una superficie de sustentación, el problema central es el efecto de la deformación elástica. A velocidades de vuelo bajas, las deformaciones son mínimas y no representan un peligro real para el fallo estructural, sin embargo, a velocidades mayores, el efecto de dichas deformaciones pueden volverse importantes de tal grado como para causar la inestabilidad del ala, convirtiendo la superficie de control inefectiva e incluso invirtiendo el sentido de los mandos.

Suponiendo un ala de la longitud infinita cuya sección transversal es constante. En el punto O , donde se desacopla el momento torsor del flector, se sitúa un resorte simulando la restricción torsional debida a la elasticidad del ala. Se asumirá además que el resorte es lineal, por lo que el momento torsional es directamente proporcional al ángulo de giro. Inicialmente, la línea de “sustentación nulo” del perfil coincide con la

dirección de un flujo no perturbado, es decir, se parte de un ángulo de ataque nulo. Si el perfil gira un ángulo α como un cuerpo sólido, entonces, la restricción elástica permitirá que el ala sea flexionada un ángulo θ adicional, cuyo propósito es alcanzar la posición de equilibrio del ala debido al flujo con la velocidad v .

La acción aerodinámica en el perfil puede ser representada por un vector que actúa a través del centro aerodinámico y un momento alrededor del mismo punto. Se describe la distancia del centro aerodinámico al eje del resorte de torsión como el producto $e \cdot c$, donde c es la longitud de la cuerda y e el factor de excentricidad del centro aerodinámico (positivo si el resorte se encuentra detrás del centro aerodinámico).

Para ángulos de ataque pequeños, el coeficiente de sustentación C_L es proporcional al ángulo de ataque, mientras que el coeficiente de momento alrededor del centro aerodinámico $C_{MC.a}$ prácticamente no depende de él. De aquí que, el esfuerzo de sustentación y el momento por unidad de longitud que actúan en la sección transversal del perfil sean, respectivamente

$$L = q \cdot c_L \cdot c = q \cdot c \cdot a \cdot (\theta + \alpha) \quad (2.3)$$

$$M_0 = q \cdot c_{MC.a} \cdot c^2$$

Donde a es la pendiente de la curva de sustentación. El momento aerodinámico por unidad de longitud alrededor del punto O es:

$$M_R = M_{c.a.} + L \cdot e \cdot c = q \cdot e \cdot c^2 \cdot a \cdot (\theta + \alpha) \quad (2.4)$$

También, cuando el sistema se encuentra en equilibrio, el momento aerodinámico es compensado por el momento elástico de restauración. Si K_α es la constante del muelle, el momento elástico de restauración por unidad de longitud correspondiente al ángulo de giro θ es $K_{\alpha\theta}$. Igualando lo expuesto anteriormente con la ecuación 2.3 y resolviendo para θ , se obtiene

$$\theta = \frac{q \cdot e \cdot c^2 \cdot a \cdot \alpha}{K_\alpha - q \cdot e \cdot c^2 \cdot a} \quad (2.5)$$

Para un valor de α diferente de cero, el ángulo θ aumentará cuando la presión dinámica se incremente. Para el caso en el que q sea tan grande que el denominador

tienda a cero, θ se vuelve indeterminado y el perfil “diverge”. De aquí que la condición de divergencia sea

$$K_\alpha - q \cdot e \cdot c^2 \cdot a = 0 \quad (2.6)$$

Si el ala fuera muy rígida, el valor K_α tiende a un valor infinito y, por tanto, el valor del ángulo θ sea nulo. Se puede deducir que la presión dinámica de divergencia y la velocidad a la que se produce la inestabilidad son

$$q_{div} = \frac{K_\alpha}{e \cdot c^2 \cdot a} \quad (2.7)$$

$$v_{div} = \sqrt{\frac{2 \cdot K_\alpha}{\rho \cdot e \cdot c^2 \cdot a}} \quad (2.8)$$

La relación del ángulo de ataque total en equilibrio, $\alpha + \theta$, de una ala elástica respecto a un ala rígida es, de acuerdo con 1.4 y 1.6,

$$\frac{\alpha + \theta}{\alpha} = \frac{1}{1 - \frac{q}{q_{div}}} \quad (2.9)$$

Para el caso cuando q tiende a q_{div} , la deflexión del ala elástica tiende a ser muy grande, provocando el desplome.

2.3 FLUTTER

El término de análisis de flutter define el problema del análisis dinámico de la estabilidad aeroelástica. Se considera un ala en voladizo situada en un túnel del viento siendo el ángulo de ataque del ala pequeño. Cuando no hay flujo en el túnel de viento y se le induce una perturbación mediante un pequeño impacto, el modelo tendrá una cierta oscilación que será amortiguada gradualmente. Al introducir un caudal de aire, la relación de amortiguamiento cambiará su valor y al aumentar la velocidad del viento, esta relación se incrementará. Aún aumentado la relación, el amortiguamiento disminuye rápidamente. Esto se sigue produciendo hasta una velocidad en la que las oscilaciones mantienen la amplitud por si solas. A esta velocidad se denomina la velocidad crítica de flutter. A una velocidad mayor de la indicada, cualquier pequeña perturbación que se produzca en el ala, produce que las oscilaciones en el ala aumenten en amplitud experimentando un fallo catastrófico. A las oscilaciones inestables que se producen es lo que se denomina flutter. Para un ala en voladizo, el fenómeno de flutter se producirá a cualquier velocidad superior a la crítica.

El movimiento oscilatorio de un ala experimentando flutter tiene componentes de torsión y de flexión. Un ala cuya rigidez sólo permite el grado de libertad debida a flexión, no se provocaría el fenómeno de flutter. Un ala en el que únicamente se tuviera el grado de libertad debido a torsión experimentará el fenómeno de flutter siempre y cuando el ángulo de ataque esté próximo al ángulo de desplome o que se tenga una distribución de masa y una localización del eje elástico especiales. En el ala, la deformación elástica queda definida por dos valores: la deflexión del punto de referencia y el ángulo de giro.

Debido a que normalmente, el fenómeno de flutter produce dos tipos de vibraciones su acoplamiento: unas vibraciones debidas a los modos de vibración de flexión y otro tipo de vibraciones causadas por los modos de vibración de torsión. En un ala en voladizo, el eje elástico es perpendicular al fuselaje del avión, considerándose que se encuentra fijo en el espacio. La deformación del ala se puede calcular mediante el cálculo de la deflexión y el ángulo de giro de rotación a lo largo del eje elástico. La

deflexión se considera positiva hacia abajo y el ángulo de giro se considera positivo hacia arriba. La deformación a lo largo de la cuerda del ala se despreciará.

3 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA Y SU SOLUCIÓN.

En el caso que se va a estudiar, se considera la combinación de las vibraciones debidas a momentos flectores y torsores simultáneamente, que se producen en el ala de un avión al estar sometido a un flujo de aire continuo en régimen subsónico. Se realiza un estudio de la estabilidad del sistema y así poder deducir la frecuencia natural del sistema. Este estudio de estabilidad se basa en la búsqueda de la velocidad de flujo de aire que induce al sistema una frecuencia hasta alcanzar la velocidad crítica a la que se provoca una vibración con la frecuencia natural que provoca la inestabilidad del sistema.

Se comienza definiendo los ejes que se toman como referencia mostrados en la figura 3.1. Se toma el eje x coincidente con el eje elástico, para poder desacoplar el momento flector del torsor, ya que el eje elástico es el lugar geométrico donde una fuerza genera un momento flector y un momento genera un momento torsor puro. El eje de inercia se define como el lugar geométrico del centro de masa de la sección transversal. Para comenzar, se definen las dos variables sobre las que se realizan los cálculos, $w(x,t)$, siendo el desplazamiento que sufre el eje elástico en el eje z ; y $\theta(x,t)$, es la rotación en torno al eje elástico. Siendo w positivo si el desplazamiento es hacia abajo y θ es positivo si el borde de ataque es hacia arriba. La única relación que existe entre dos los tipos de momentos, y, por tanto, no se pueden desacoplar completamente, provoca la existencia del momento másico estático sobre el eje elástico debido a la distancia que separa el eje elástico del eje de inercia. El ángulo θ está referenciado al ángulo local de ataque. A continuación, se muestra una figura 3.1 donde se especifican tanto las partes del ala como los ejes de referencia [2]

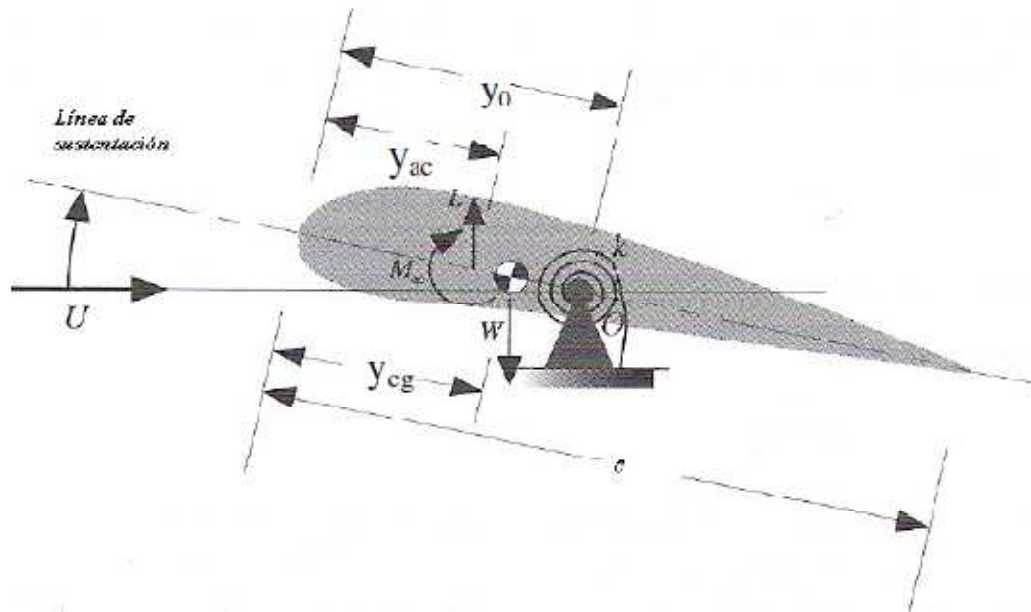


Figura 3.1: Sección transversal y esfuerzos a los que está sometida

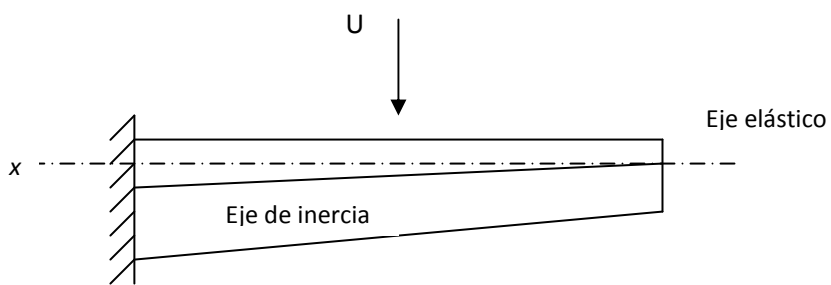


Figura 3.2: Localización del eje x , eje elástico y eje de inercia

3.1 ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

En primer lugar, se obtendrán las ecuaciones que gobiernan el problema, considerando la estructura como una viga en voladizo. Para cada tipo de momento (flector y torsor) que sufre la viga, se obtendrá una ecuación del movimiento en función de w y θ . Las funciones que describen el desplazamiento w y el giro θ dependen cada una de ellas del tiempo t y de la posición x con respecto al empotramiento del ala.

A continuación, se obtiene la ecuación que define el movimiento debido a los esfuerzos transversales que se producen. En la siguiente figura 3.3, se muestran los esfuerzos a los que está sometido un elemento diferencial de la viga [5].

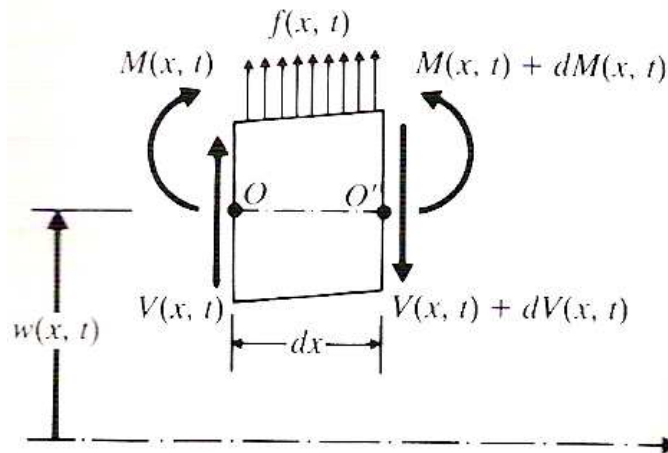


Figura 3.3: Esfuerzos flectores en un elemento diferencial de una viga

Siendo ésta un elemento diferencial de una viga donde $M(x,t)$ es el momento flector, $V(x,t)$ es el esfuerzo cortante, y $f(x,t)$ es la fuerza externa por unidad de longitud a la viga.

La fuerza de inercia que actúa en el elemento diferencial de la viga

$$\rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) - m y_{\theta} \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} \tag{3.1}$$

Donde ρ es la densidad de la viga y $A(x)$ es la sección transversal de la viga. La expresión my_θ corresponde al momento másico estático por unidad de longitud debido a que no coincide el eje elástico con el eje de inercia. Debido a esto, y_θ se define como la distancia que existe entre el eje elástico y el eje de inercia. La ecuación de las fuerzas en la dirección del eje z se expresa como

$$-(V + dV) + f(x,t)dx + V = \rho A(x)dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) - my_\theta \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} \quad (3.2)$$

La ecuación del momento flector a lo largo del eje y en el punto O de la figura anterior 3.3 es la siguiente

$$(M + dM) - (Q + dQ)dx + f(x,t)dx \frac{dx}{2} - M = 0 \quad (3.3)$$

Despreciando los términos que contengan potencias cuadradas en dx y escribiendo de forma diferencial dV y dM , obtenemos la siguiente expresión:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx \quad dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx \quad (3.4)$$

$$-\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + f(x,t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) - my_\theta \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} - V(x,t) = 0 \quad (3.6)$$

De esta última igualdad 3.6, se obtiene que $V = \delta M / \delta x$; y sustituyendo en la ecuación 3.5

$$-\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) - my_\theta \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} \quad (3.7)$$

De la teoría elemental de vigas a flexión, también conocido como la ecuación de Euler-Bernoulli, la relación entre el momento flector y el desplazamiento se puede expresar de la siguiente forma

$$M(x,t) = EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \tag{3.8}$$

Donde E es el módulo de Young y $I(x)$ es el momento de inercia de la sección transversal de la viga sobre el eje y , que su producto es la rigidez a flexión de la viga. Sustituyendo la ecuación 2.8 en la 2.7, se obtiene la ecuación del movimiento producido por las fuerzas de vibración lateral para una viga

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + m y_{\theta} \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) \tag{3.9}$$

Como el caso que se va a tratar es el de una viga uniforme, el área, $A(x)$, y el momento de inercia de la viga, $I(x)$, son constantes y sabiendo que ρA es la masa por unidad de longitud, la ecuación se reduce a

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + m y_{\theta} \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) \tag{3.10}$$

Siendo una ecuación en derivadas parciales en función de la distancia al empotramiento y el tiempo transcurrido de la aplicación de la carga exterior.

Se realiza el mismo procedimiento para la obtención de la ecuación del movimiento debido al momento torsor que sufre la viga. Se parte de un elemento diferencial de la viga sometido a esfuerzos externos, que se muestra en la siguiente figura

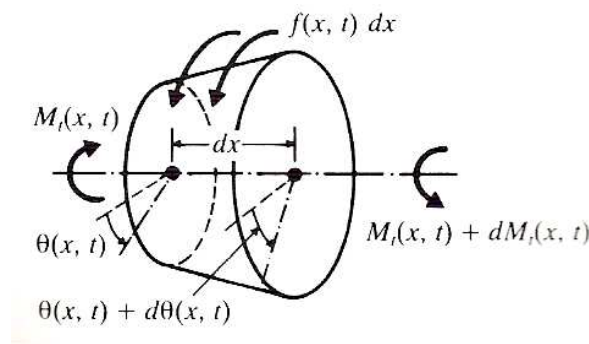


Figura 3.4: Esfuerzos a torsión en un elemento diferencial de una viga.

Se obtiene la ecuación del movimiento al igualar los momentos torsores que se generan en ambas caras del elemento diferencial de la viga sobre el eje elástico

$$(M_t + dM_t) + f(x,t)dx - M_t = I_\theta dx \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} + my_\theta \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (3.11)$$

Siendo I_θ el momento másico de inercia polar de la viga por unidad de longitud para la sección transversa. Como ocurre en el caso anterior, el desacoplamiento entre los momentos flectores y torsores provoca que se incluya en la ecuación el término correspondiente al momento másico estático por unidad de longitud.

La relación entre el desplazamiento angular y el momento torsor viene dado por la siguiente igualdad

$$M_t(x,t)dx = GJ(x) \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \quad (3.12)$$

Siendo G el módulo a cortadura y $J(x)$ es el momento de inercia polar, siendo su producto la rigidez a torsión de una viga. Se escribe dM_t de la siguiente forma y se sustituye en la ecuación 3.11, junto con la igualdad 3.12

$$dM_t = \frac{\partial M_t}{\partial x} dx \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[GJ(x) \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \right] + f(x,t) = I_\theta(x) \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} + my_\theta \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (3.14)$$

Como la sección transversal de la viga es constante, $J(x)$ e $I_\theta(x)$ son constantes, quedando la ecuación anterior de la siguiente forma

$$-GJ \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} + my_\theta \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + I_\theta \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) \quad (3.15)$$

Obtenidas las ecuaciones 3.10 y 3.15 que rigen el desplazamiento y el giro de la sección transversal del ala debido a su rigidez, a continuación se exponen los esfuerzos

aerodinámicos a los que está sometida el ala. Estos esfuerzos son los de sustentación y el momento aerodinámico generado dependiendo de la velocidad y de la deformación instantánea. Se define L como las fuerzas de sustentación y M el momento aerodinámico

$$L = -\frac{\rho U^2}{2} c \frac{dC_L}{d\theta} \left[C\theta + C \frac{1}{U} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{c}{U} \left(C \left(\frac{3}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{c}{4U^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{ac^2}{8U^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right] \quad (3.16)$$

$$M = -\frac{\rho U^2}{2} c^2 \frac{dC_L}{d\theta} \left\{ \frac{c}{16U} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left(\frac{1}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \left[C\theta + C \frac{1}{U} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{c}{U} \left(\frac{3}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] + \frac{ac^2}{8U^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \frac{c^3}{16U^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\} \quad (3.17)$$

Estas dos expresiones son las ecuaciones 3.16 y 3.17 que definen el movimiento debidos a la fuerza de sustentación y al momento aerodinámico. Los términos asociados a la segunda derivada tanto de w como θ representan los efectos de la masa aparente (masa adicional debido al arrastre de masa de aire por el ala). Como la densidad del aire es mucho menor que la densidad del que está compuesto el ala, se pueden despreciar estos términos en el análisis. La derivada $dC_L/d\theta$, donde C_L es el coeficiente local de sustentación, se toma como un valor constante, debido a que el valor teórico es 2π para un fluido incompresible y su valor experimental es muy cercano a este valor teórico. C representa la función de Theodorsen, que corresponde a una función de valores complejos dependiente de la frecuencia reducida del sistema, y por tanto, se ve afectada por los movimientos del ala y las fuerzas aerodinámicas aplicadas. Los valores de esta función son empíricos y, por tanto, se encuentran sus valores en tablas pero, una buena aproximación a estos valores, se representa mediante la siguiente ecuación [9]

$$C(k) = \left[1 - \frac{0.165k^2}{k^2 + (0.0455)^2} - \frac{0.335k^2}{k^2 + (0.3)^2} \right] - i \left[\frac{0.165 \cdot 0.0455k}{k^2 + (0.0455)^2} - \frac{0.3 \cdot 0.335k}{k^2 + (0.3)^2} \right] \quad (3.18)$$

Donde k es la frecuencia reducida. Para este caso, se toma como valor constante la función de Theodorsen e igual a 1 la parte real e igual a 0 la parte imaginaria, para cualquier valor de la frecuencia reducida.

Con estas dos condiciones, se exponen las ecuaciones de la fuerza y el momento de sustentación que se producen en el ala [1]

$$L = -\frac{\rho U^2}{2} c \frac{dC_L}{d\theta} \left[\theta + \frac{1}{U} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{c}{U} \left(\frac{3}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] \quad (3.19)$$

$$M = \frac{\rho U^2}{2} c^2 \frac{dC_L}{d\theta} \left\{ \frac{c}{16U} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left(\frac{1}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \left[\theta + \frac{1}{U} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{c}{U} \left(\frac{3}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] \right\} \quad (3.20)$$

Por tanto, se igualan las ecuaciones 3.10 y 3.15 que definen las resistencias al movimiento debidas a la estructura del ala y los esfuerzos a los que está sometida y escriben de la siguiente forma

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + m y_\theta \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\rho U^2}{2} c \frac{dC_L}{d\theta} \left[\theta + \frac{1}{U} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{c}{U} \left(\frac{3}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] = 0 \quad \text{siendo } 0 < x < l \quad (3.21)$$

$$-GJ \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} + m y_\theta \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + I_\theta \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\rho U^2}{2} c^2 \frac{dC_L}{d\theta} \left\{ \frac{c}{16U} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left(\frac{1}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \left[\theta + \frac{1}{U} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{c}{U} \left(\frac{3}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] \right\} \quad \text{siendo } 0 < x < l \quad (3.22)$$

Para realizar mejor la influencia de los parámetros de diseño del ala, se va a realizar la adimensionalización de las ecuaciones 3.21 y 3.22 y así resolver este caso. Primero, debemos seleccionar las variables que se va a utilizar para adimensionalizar las ecuaciones. Para ello, se va a utilizar los siguientes parámetros; EI , m y L , que son independientes dimensionalmente. Las nuevas variables de las que va a depender el problema son

$$X = \frac{x}{l} \quad \tau = \sqrt{\frac{EI}{ml^4}} \cdot t \quad (3.23)$$

Las demás constantes del problema quedan de la siguiente forma adimensionalizadas

$$\rho = \frac{\rho' l^2}{m}$$

$$gj = \frac{GJ}{EI}$$

$$c = \frac{c}{l}$$

$$y_0 = \frac{y_0}{l}$$

$$y_\theta = \frac{y_\theta}{l}$$

$$i_\theta = \frac{I_\theta}{m}$$

$$u = \frac{U}{\sqrt{\frac{EI}{ml^2}}}$$

Sustituyendo estas igualdades en las ecuaciones 3.21 y 3.22, se obtienen las expresiones del problema adimensionalizadas. Se comienza con los esfuerzos que definen los momentos flectores

$$\begin{aligned} & \frac{1}{l^3} EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + ml \left(\frac{EI}{ml^4} \right) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial \tau^2} + my_\theta l \left(\frac{EI}{ml^4} \right) \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial \tau^2} + \frac{\rho mu^2}{2l^2} \\ & \left(\frac{EI}{ml^2} \right) cl \frac{dC_L}{d\theta} \left[\theta + \frac{1}{u} \frac{1}{\sqrt{\frac{EI}{ml^2}}} l \left(\sqrt{\frac{EI}{ml^2}} \right) \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{cl}{u} \frac{1}{\sqrt{\frac{EI}{ml^2}}} \left(\frac{3}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \left(\sqrt{\frac{EI}{ml^2}} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Se realiza la misma operación con la ecuación 2.22, perteneciente a los momentos torsores generados

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{l^2} EI \cdot g_j \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} + m l y_\theta \left(\frac{EI}{ml^4} \right) l \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial \tau^2} + i_\theta m l^2 \left(\frac{EI}{ml^4} \right) \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial \tau^2} + \\
 & \frac{\rho m u^2}{2l^2} \left(\frac{EI}{ml^2} \right) c^2 l^2 \frac{dC_L}{d\theta} \left\{ \frac{cl}{16u} \frac{1}{\sqrt{\frac{EI}{ml^2}}} \sqrt{\frac{EI}{ml^4}} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \left(\frac{1}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \left[\theta + \frac{l}{u} \frac{1}{\sqrt{\frac{EI}{ml^2}}} \sqrt{\frac{EI}{ml^4}} \frac{\partial w}{\partial \tau} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{cl}{u} \frac{1}{\sqrt{\frac{EI}{ml^2}}} \left(\frac{3}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \sqrt{\frac{EI}{ml^4}} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right] \right\} = 0
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Simplificando $\frac{EI}{l^3}$ en la igualdad 3.24, y $\frac{EI}{l^2}$ en la ecuación 3.25, se obtienen las ecuaciones adimensionalizadas que definen el problema

$$\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial \tau^2} + y_\theta \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial \tau^2} + \frac{\rho u^2}{2} c \frac{dC_L}{d\theta} \left[\theta + \frac{1}{u} \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{c}{u} \left(\frac{3}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right] = 0 \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
 & -g_j \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} + y_\theta \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial \tau^2} + i_\theta \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial \tau^2} + \frac{\rho u^2}{2} c^2 \frac{dC_L}{d\theta} \\
 & \left\{ \frac{c}{16u} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \left(\frac{1}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \left[\theta + \frac{l}{u} \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{c}{u} \left(\frac{3}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right] \right\} = 0
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

3.2 MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

En este apartado, se exponen los posibles métodos que se pueden utilizar para la resolución del problema anteriormente expuesto. Son métodos para la obtención de la frecuencia natural del sistema.

a) Método de Rayleigh

El método de Rayleigh se aplica para la obtención de la frecuencia natural de sistemas continuos. Este método es mucho más simple que el análisis exacto para sistemas con distribuciones variables de masa y rigidez de la estructura. Para ello, se deriva las expresiones de la energía cinética y potencial y se utiliza el cociente de Rayleigh. La energía cinética T de la viga se puede expresar como

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \dot{w}^2 dm = \frac{1}{2} \int_0^l \dot{w}^2 \rho A(x) dx \quad (3.28)$$

Siendo w el desplazamiento de la sección transversal. Se puede asumir una variación armónica del desplazamiento $w(x,t) = W(x) \cos \omega t$, siendo la energía cinética máxima

$$T_{\max} = \frac{\omega^2}{2} \int_0^l \rho A(x) W^2(x) dx \quad (3.29)$$

La energía potencial V de la viga se expresa como el trabajo realizado en deformar la viga. Despreciando el trabajo realizado por los esfuerzos cortantes, se tiene la expresión de la energía potencial

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l M d\theta \quad (3.30)$$

Donde M es el momento flector y se utiliza la igualdad 3.8 y θ es la pendiente de la viga deformada siendo $\theta = \partial w / \partial x$. La ecuación se puede escribir de la siguiente forma

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3.31)$$

Como el máximo valor que puede alcanzar $w(x,t)$ es $W(x)$, el máximo valor de la energía potencial es

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3.32)$$

Igualando la energía cinética máxima a la energía potencial máxima, se obtiene el cociente de Rayleigh

$$R(\varpi) = \varpi^2 = \frac{\int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx}{\int_0^l \rho A(x) W^2(x) dx} \quad (3.33)$$

Por tanto, la frecuencia natural de la viga puede ser conocida a partir de un desplazamiento $W(x)$ conocido. Por lo general, el desplazamiento $W(x)$ suele ser desconocido y se debe considerar una forma definida del desplazamiento obtenido del equilibrio estático del sistema. Al introducir una forma definida del desplazamiento, provoca que se limite el problema, añadiendo una rigidez al sistema.

b) Método de Rayleigh-Ritz

Este método se puede considerar una extensión del método de Rayleigh. Se basa en suponer que se puede obtener una solución aproximada de la frecuencia natural superponiendo un número de funciones dadas usando funciones simples, como en el método anterior. Se pueden obtener órdenes mayores de los modos de vibración según

el número de funciones que se utilicen. Se comienza con la ecuación de Lagrange, dada por la siguiente expresión

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_i} = F_i \quad (3.34)$$

Donde L es la diferencia de la energía cinética y la energía potencial, $L=T-V$, F_i es la fuerza generalizada y $\partial \xi_i$ es un incremento arbitrario. Se utiliza, por tanto, el principio de los trabajos virtuales. Se expresan L y F en términos de una serie de funciones que debe tener las siguientes características: debe satisfacer las condiciones de contorno del desplazamiento, debe ser continua y tener derivada respecto al tiempo, se puede expresar como suma de un conjunto de funciones simples y el conjunto de funciones utilizado ha de ser linealmente independiente. Con esto, se reduce de un problema con infinitos grados de libertad a uno con n grados de libertad, siendo un problema de autovalores, y se pasa de tener una ecuación en derivadas parciales a un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias. El término del trabajo virtual se debe tener en cuenta para la resultante obtenida de la concentración y distribución de las fuerzas generadas. La ecuación que define el movimiento de forma matricial de la siguiente manera

$$[M] \{\ddot{\xi}\} + [C] \{\dot{\xi}\} + [K] \{\xi\} = \{F\} \quad (3.35)$$

Donde $\{\xi\}$ es la matriz columna de los desplazamientos, $\{F\}$ es la matriz columna de los términos generalizados de las fuerzas que no dependen de los desplazamientos, $[M]$ es la matriz de la masa, $[C]$ se define como la matriz del amortiguamiento y $[K]$ es la matriz de rigidez del sistema. Las fuerzas que dependen del desplazamiento se introducen sus términos en las matrices $[M]$, $[C]$ y $[K]$.

La solución de este problema de autovalores generalmente da las n frecuencias naturales y los n autovectores, que cada uno de ellos contiene las constantes de las funciones simples que definen el conjunto de funciones, que corresponde a una frecuencia natural determinada.

c) *Método de Galerkin*

A distinción de los métodos anteriores, el método de Galerkin con la ecuación en derivadas parciales del movimiento. Se denota la ecuación de la siguiente forma

$$L[w(x,t)] = 0 \quad (3.36)$$

Donde L es un operador de la función desconocida $w(x,t)$. Se necesita expresar el desplazamiento mediante un conjunto de funciones compuestas uno o varios términos, quedando de la misma manera definido el operador L . Al igual que en el método anterior, las funciones que pertenecen al conjunto deben tener las siguientes características: deben satisfacer las condiciones de contorno del desplazamiento; debe ser diferenciable respecto al tiempo y no nula; y el conjunto de funciones ha de ser linealmente independiente. A las funciones que cumplen estos criterios se las denomina funciones comparativas. La ecuación en derivadas parciales se multiplica por ϕ_i y se integra a lo largo de la variable independiente. Entonces, se obtiene el sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias a partir de la ecuación del movimiento. La discretización de la ecuación del movimiento produce que se obtenga la misma expresión que por el método de Rayleigh-Ritz 3.35.

El método de resolución que se va a utilizar, para este caso, es el método de los elementos finitos (FEM), en concreto, el método de Galerkin. El primer paso que se ha de dar, es discretizar el problema de valores de contorno cuando esté expresado en forma débil. Una ecuación diferencial se encuentra en forma débil cuando la ecuación se multiplica por una función, que cumpla las condiciones de contorno del problema, y se integra a lo largo de todo el dominio del problema. Esto produce que el orden de la ecuación diferencial se reduzca, facilitando el manejo de la ecuación, es decir, partiendo de la formulación fuerte [19]

$$L(u(x)) = f(x) \quad \forall x \in \Omega \quad (3.37)$$

Siendo L un operador diferencial y f una función dad. Considerando el contorno $\partial\Omega$ dividido en dos partes ($\partial\Omega_1$ y $\partial\Omega_2$), se deben cumplir las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} Mu &= 0 \quad x \in \delta \Omega_1 \\ Nu &= g \quad x \in \delta \Omega_2 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Donde M y N son operadores diferenciales y g es una función dada.

La obtención de la forma débil del problema se consigue multiplicando la ecuación diferencial por una función v del subespacio de funciones que cumplan las condiciones impuestas e integrando sobre todo el dominio del problema. El resultado de la integración es lo que se conoce como la formulación débil del problema de contorno, pudiéndose expresar de la siguiente forma

$$A(u, v) = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\partial\Omega_2} g \cdot M u dx \Rightarrow A(u, v) = F(v) \tag{3.39}$$

Siendo $A(\cdot, \cdot)$ una forma bilineal.

Se busca ahora un subespacio vectorial de dimensiones finitas del subespacio de las funciones que cumplen las condiciones impuestas, tal que

$$u_h \in V_h / A(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \tag{3.40}$$

Con esta aproximación es en lo que está basado el método de Galerkin para transformar un problema continuo, es decir, infinitos elementos, en un problema de dimensión finita.

Sea $[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n]$ una base del subespacio V_h , entonces si $u_h \in V_h$ se puede escribir U_h de la siguiente forma

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^n u_j \varphi_j(x) \tag{3.41}$$

Sustituyendo $v_h = \varphi_j(x)$ en virtud de la bilinealidad de $A(\cdot, \cdot)$, se tiene que es equivalente a resolver el sistema lineal de n incógnitas (u_1, u_2, u_n) con las siguientes n ecuaciones:

$$\sum_{j=1}^n u_j A(\varphi_j, \varphi_i) = F(\varphi_i) \quad \text{siendo} \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{3.42}$$

Se integra a largo del intervalo en el que está definido el problema, obteniéndose valores nulos cuando el valor absoluto de la diferencia de los subíndices j e i es mayor que 1.

3.3 MÉTODO DE RESOLUCIÓN APLICADO AL PROBLEMA.

En este apartado, se trata la aplicación de lo que se ha explicado anteriormente. A continuación, se muestran las ecuaciones 3.26 y 3.27 que rigen el estudio de las vibraciones en un ala en voladizo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial \tau^2} + y_\theta \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial \tau^2} + \frac{\rho u^2}{2} c \frac{dC_L}{d\theta} \left[\theta + \frac{1}{u} \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{c}{u} \left(\frac{3}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right] = 0 \\ - g_j \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} + y_\theta \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial \tau^2} + i_\theta \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial \tau^2} + \frac{\rho u^2}{2} c^2 \frac{dC_L}{d\theta} \\ \left\{ \frac{c}{16u} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \left(\frac{1}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \left[\theta + \frac{l}{u} \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{c}{u} \left(\frac{3}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right] \right\} = 0 \end{aligned}$$

Con las siguientes condiciones de contorno que se definen al estimarse el ala del avión como una viga en voladizo

- en $x = 0$

$$\begin{aligned} w(0) &= 0 \\ \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0 \\ \theta(0) &= 0 \end{aligned}$$

- en $x = l$

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) &= 0 \\ GJ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

A este sistema de ecuaciones se les aplica el método de separación de variables, es decir, w y θ se pueden separar cada variable por la multiplicación de dos funciones

independientes y, cada una de ellas, dependientes de una sola variable. Las funciones w y θ son función de las variables (x) y (t) . Por tanto, se obtienen una función de la variable en (x) y otra función dependiente de la variable (t) , y así poder realizar un estudio por separado de cada variable. Este problema de valores de contorno admite una solución de tipo exponencial para la parte temporal del desplazamiento y del giro; obteniendo w y θ como

$$\begin{aligned} w(x,t) &= W(x) \cdot e^{\lambda\tau} \\ \theta(x,t) &= \Theta(x) \cdot e^{\lambda\tau} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Se sustituye w y θ , expresadas de la forma 3.43, en las ecuaciones del problema 3.26 y 3.27

$$\begin{aligned} e^{\lambda\tau} \frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} + \lambda^2 e^{\lambda\tau} W(x) + \lambda^2 e^{\lambda\tau} y_\theta \Theta(x) + \frac{\rho u^2}{2} c \frac{dC_L}{d\theta} e^{\lambda\tau} \left[\Theta(x) \right. \\ \left. + \frac{1}{u} \lambda W(x) + \frac{c}{u} \left(\frac{3}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \lambda \Theta(x) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} -gje^{\lambda\tau} \frac{\partial^2 \Theta(x)}{\partial x^2} + \lambda^2 e^{\lambda\tau} y_\theta W(x) + \lambda^2 e^{\lambda\tau} i_\theta \Theta(x) + \frac{\rho u^2}{2} c^2 \frac{dC_L}{d\theta} e^{\lambda\tau} \\ \left\{ \frac{c}{16u} \lambda \Theta(x) + \left(\frac{1}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \left[\Theta(x) + \frac{1}{u} \lambda W(x) + \frac{c}{u} \left(\frac{3}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \lambda \Theta(x) \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

Simplificando $e^{\lambda\tau}$ en las dos ecuaciones 3.44 y 3.45, se obtiene las expresiones que definen el desplazamiento del ala independiente del tiempo, transformando el problema inicial basado en un sistema de ecuaciones diferenciales, en un problema diferencial de autovalores

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} + \lambda^2 W(x) + \lambda^2 y_\theta \Theta(x) + \frac{\rho u^2}{2} c \frac{dC_L}{d\theta} \left[\Theta(x) \right. \\ \left. + \frac{1}{u} \lambda W(x) + \frac{c}{u} \left(\frac{3}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \lambda \Theta(x) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned}
 & -gj \frac{\partial^2 \Theta(x)}{\partial x^2} + \lambda^2 y_\theta W(x) + \lambda^2 i_\theta \Theta(x) + \frac{\rho u^2}{2} c^2 \frac{dC_L}{d\theta} \\
 & \left\{ \frac{c}{16u} \lambda \Theta(x) + \left(\frac{1}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \left[\Theta(x) + \frac{1}{u} \lambda W(x) + \frac{c}{u} \left(\frac{3}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \lambda \Theta(x) \right] \right\} = 0
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Aplicando el método de separación de variables a las condiciones de contorno, se obtiene, para la componente espacial

- en $x = 0$

$$\begin{aligned}
 W(0) &= 0 \\
 \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0 \\
 \Theta(0) &= 0
 \end{aligned}$$

- en $x = l$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= 0 \\
 \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} &= 0 \\
 \frac{\partial \Theta}{\partial x} &= 0
 \end{aligned}$$

Obtenidas las ecuaciones y las condiciones de contorno dependientes únicamente de la variable espacial, se procede para la obtención del subespacio de funciones que cumplen las condiciones de contorno del problema correspondientes al desplazamiento, W , y el giro, Θ

$$\begin{aligned}
 W(x) &= \phi_1^T(x) \cdot a_1 \\
 \Theta(x) &= \phi_2^T(x) \cdot a_2
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Se definen ϕ_1 y ϕ_2 como el subespacio de funciones que definen el desplazamiento, W , y el giro Θ , respectivamente, y que cumplen las condiciones de contorno del problema. a_1 y a_2 son los vectores de los coeficientes indeterminados, siendo sus valores los de la función solución en el punto calculado. Las dimensiones de ϕ_1 y a_1 han de ser iguales y se definen por n_1 ; y lo mismo ocurre con ϕ_2 y a_2 que se definen sus dimensiones con n_2 . Por lo tanto, la dimensión total del problema es $n_T = n_1 + n_2$. Se considera que $n_1 = n_2 = n$ siendo n el número de intervalos en los que se divide la longitud del ala.

A continuación, se van a obtener los subconjuntos de funciones que definan la solución del problema, dependiendo del grado de las funciones. El grado viene dado por el número de condiciones de contorno que se tengan. Para el caso de estudio del desplazamiento W , un primer subespacio estará formado por funciones cúbicas y en un segundo subespacio formado por funciones de 4º grado; en el caso del giro θ , un primer subespacio estará formado por funciones lineales y en un segundo subespacio formado por funciones cuadráticas.

a) ϕ_1 función cúbica y ϕ_2 función lineal

Debido a que el problema ya está adimensionalizado, el intervalo en el que se define el problema es $[0,1]$. A su vez, se divide en subintervalos definidos por el tamaño de la función ϕ_1 que viene determinado por el valor n , que define la dimensión total del problema a tratar. Se define en el subintervalo j la función ϕ_{1j} por partes. A continuación se muestra la forma que tiene ϕ_{1j}

$$\phi_{1j} \begin{cases} ax^3 + bx^2 + cx + d & x_{j-1} < x < x_j \\ ex^3 + fx^2 + gx + i & x_j < x < x_{j+1} \end{cases}$$

Se define h como la diferencia entre dos nodos consecutivos $h = x_j - x_{j-1}$, se muestra el subintervalo de la función en términos de x_j y h .

$$\phi_{1j} \begin{cases} ax^3 + bx^2 + cx + d & -h < x - x_j < 0 \\ ex^3 + fx^2 + gx + i & 0 < x - x_j < h \end{cases} \quad (3.49)$$

Definida la función, se exponen las condiciones de contorno, pertenecientes al desplazamiento, que deben cumplir las funciones en el subintervalo j

- en $x = x_{j-1} = x_j - h$

$$\begin{aligned} \phi_{1j} &= 0 \\ \frac{d\phi_{1j}}{dx} &= 0 \end{aligned}$$

- en $x = x_{j+1} = x_j + h$

$$\frac{d^2 \phi_{1j}}{dx^2} = 0$$

$$\frac{d^3 \phi_{1j}}{dx^3} = 0$$

Debido a que la sección transversal del ala es constante, el término EI de la rigidez del ala desaparece al no depender de x . Se evalúa la función ϕ_{1j} en $x = x_j - h$ y $x = x_j + h$

- en $x = x_j - h$

$$\phi_{1j} = 0 \Rightarrow a(x_j - h)^3 + b(x_j - h)^2 + c(x_j - h) + d = 0 \quad (3.50)$$

$$\frac{d\phi_{1j}}{dx} = 0 \Rightarrow 3a(x_j - h)^2 + 2b(x_j - h) + c = 0 \quad (3.50)$$

- en $x = x_j + h$

$$\frac{d^2 \phi_{1j}}{dx^2} = 0 \Rightarrow 6e(x_j + h) + 2f = 0 \quad (3.51)$$

$$\frac{d^3 \phi_{1j}}{dx^3} = 0 \Rightarrow 6e = 0 \Rightarrow e = 0 \quad (3.52)$$

En el punto x_j se debe cumplir que la función ϕ_{1j} ha de ser continua en todo el intervalo en el que está definida. Debido a esto, en x_j la función debe cumplir $\phi_{1j}(x_j^-) = \phi_{1j}(x_j^+)$ y como el valor de la solución es la constante asociada a_{1j} a la función ϕ_{1j} perteneciente al vector columna a_1 , se toma como valor $\phi_{1j}(x_j^-) = \phi_{1j}(x_j^+) = 1$. Para que se cumplan las condiciones de bilinealidad, la primera y segunda derivada de la función ϕ_{1j} en el punto x_j deben ser continuas. Con estas condiciones se obtienen cuatro ecuaciones más, que son las siguientes

$$\phi_{1j}(x_j^-) = 1 \Rightarrow ax_j^3 + bx_j^2 + cx_j + d = 1 \quad (3.53)$$

$$\phi_{1j}(x_j^+) = 1 \Rightarrow ex_j^3 + fx_j^2 + gx_j + i = 1 \quad (3.54)$$

$$\left. \frac{d\phi_{1j}}{dx} \right|_{x_j^-} = \left. \frac{d\phi_{1j}}{dx} \right|_{x_j^+} \Rightarrow 3ax_j^2 + 2bx_j + c = 3ex_j^2 + 2fx_j + g \quad (3.55)$$

$$\left. \frac{d^2\phi_{1j}}{dx^2} \right|_{x_j^-} = \left. \frac{d^2\phi_{1j}}{dx^2} \right|_{x_j^+} \Rightarrow 6ax_j + 2b = 6ex_j + 2f \quad (3.56)$$

Definidas las ecuaciones 3.51-3.56, se muestra a continuación el sistema de ecuaciones que definen las constantes de la función ϕ_{1j}

$$\left\{ \begin{array}{l} a(x_j - h)^3 + b(x_j - h)^2 + c(x_j - h) + d = 0 \\ 3a(x_j - h)^2 + b(x_j - h) + c = 0 \\ 6e(x_j + h) + 2f = 0 \\ 6e = 0 \\ ax_j^3 + bx_j^2 + cx_j + d = 1 \\ ex_j^3 + fx_j^2 + gx_j + i = 1 \\ 3ax_j^2 + 2bx_j + c = 3ex_j^2 + 2fx_j + g \\ 6ax_j + 2b = 6ex_j + 2f \end{array} \right. \quad (3.57)$$

La solución del sistema es la siguiente

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{-1}{2h^3} \\
 b &= \frac{3x_j}{2h^3} \\
 c &= \frac{-3(x_j - h)^2}{2h^3} \\
 d &= \frac{1}{2h^3}(x_j - h)^2(x_j + 2h) \\
 e &= 0 \\
 f &= 0 \\
 g &= \frac{3}{2h} \\
 i &= 1 - \frac{3x_j}{2h}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, ϕ_{1j} queda representada por la siguiente expresión sustituyendo las constantes en la ecuación 2.49

$$\phi_{1j} \begin{cases} \frac{1}{2h^3}(x^2(3x_j - x) - 3x(x_j^2 - h^2) + (x_j - h)^2(x_j + 2h)) & -h < x - x_j < 0 \\ \frac{3}{2h}(x - x_j) + 1 & 0 < x - x_j < h \end{cases} \quad (3.58)$$

La representación gráfica de la función ϕ_{1j} , se muestra en la siguiente figura 3.5

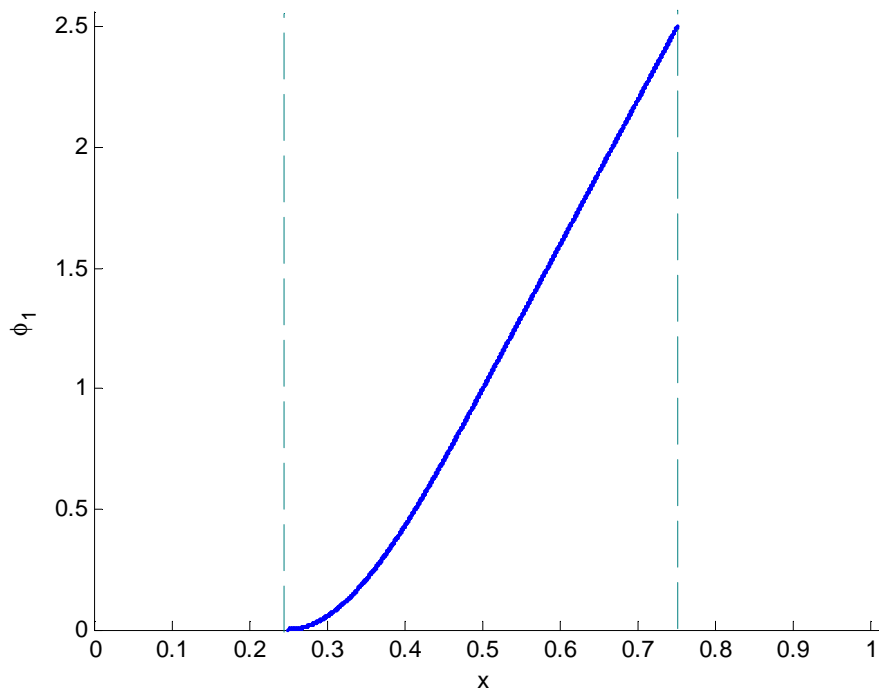


Figura 3.5: representación de la función cúbica ϕ_{1j}

En la siguiente figura 3.6, se muestra un ejemplo de cómo queda definida la función ϕ_1 en el intervalo del problema para un número de intervalos $n = 4$.

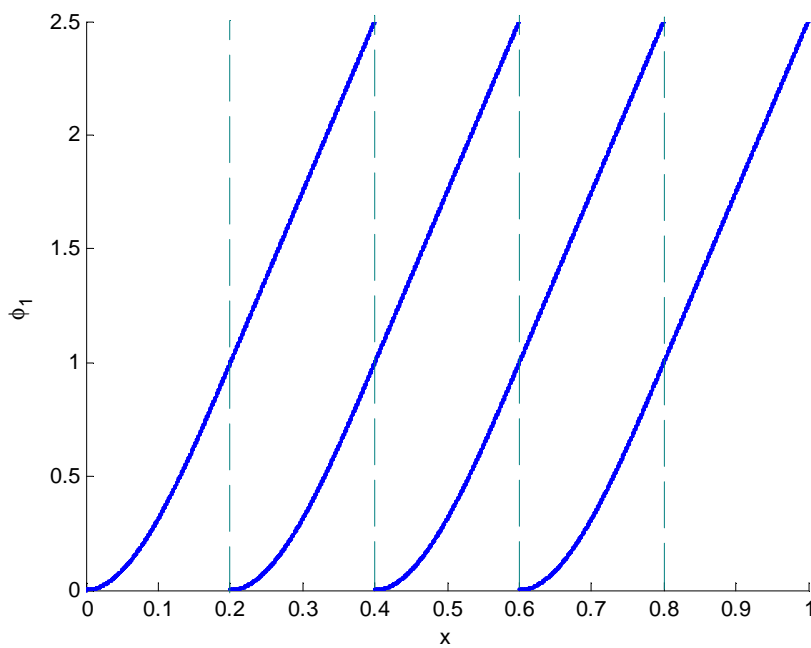


Figura 3.6: representación de la función ϕ_1 para $n=4$

Por lo tanto, queda representada la función ϕ_1 a lo largo de la longitud del problema. A continuación, se va a calcular el grupo de funciones que definen el giro en toda la envergadura del ala.

Se realiza el mismo procedimiento, que se ha realizado en ϕ_1 , para la obtención de la ecuación ϕ_2 . Las condiciones de contorno que debe cumplir esta ecuación son

- en $x = x_{j-1} = x_j - h$

$$\phi_{2j} = 0$$

- en $x = x_{j+1} = x_j + h$

$$\frac{d\phi_{2j}}{dx} = 0$$

Se define la forma que ha de tener la función ϕ_2

$$\phi_{2j} \begin{cases} ax + b & -h < x - x_j < 0 \\ cx + d & 0 < x - x_j < h \end{cases} \quad (3.59)$$

Se evalúa la función ϕ_2 para las condiciones de contorno en los extremos del intervalo en el que está definida la función

- en $x = x_j - h$

$$\phi_{2j} = 0 \Rightarrow a(x_j - h) + b = 0 \quad (3.60)$$

- en $x = x_j + h$

$$\frac{d\phi_{2j}}{dx} = 0 \Rightarrow c = 0 \quad (3.61)$$

Aplicando ahora la condición de que sea una función continua e igual a 1 en el punto x_j

$$\phi_{2j}(x_j^-) = 1 \Rightarrow ax_j + b = 1 \quad (3.62)$$

$$\phi_{2j}(x_j^+) = 1 \Rightarrow cx_j + d = 1 \quad (3.63)$$

Se expone el sistema de ecuaciones que se obtienen de las condiciones del problema inicial del cual se definen las constantes que definen la función ϕ_2

$$\begin{cases} a(x_j - h) + b = 0 \\ c = 0 \\ ax_j + bx_j = 1 \\ cx_j + d = 1 \end{cases} \quad (3.64)$$

La solución del sistema para que queden definidas constantes de la función ϕ_{2j} es

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{h} \\ b &= \frac{-1}{h}(x_j - h) \\ c &= 0 \\ d &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, ϕ_{2j} queda representada por la siguiente expresión sustituyendo las constantes en la ecuación 2.59

$$\phi_{2j} \begin{cases} \frac{x - x_j}{h} + 1 & -h < x - x_j < 0 \\ 1 & 0 < x - x_j < h \end{cases} \quad (3.65)$$

Definida la función, la representación gráfica de la función ϕ_{2j} , se muestra en la siguiente figura 3.7, dependiendo del número de nodos con la que se quiera realizar la resolución del problema tratado.

En la figura 3.8, se muestra un ejemplo de cómo queda definida la función ϕ_2 en el intervalo del problema para un número de intervalos $n = 4$.

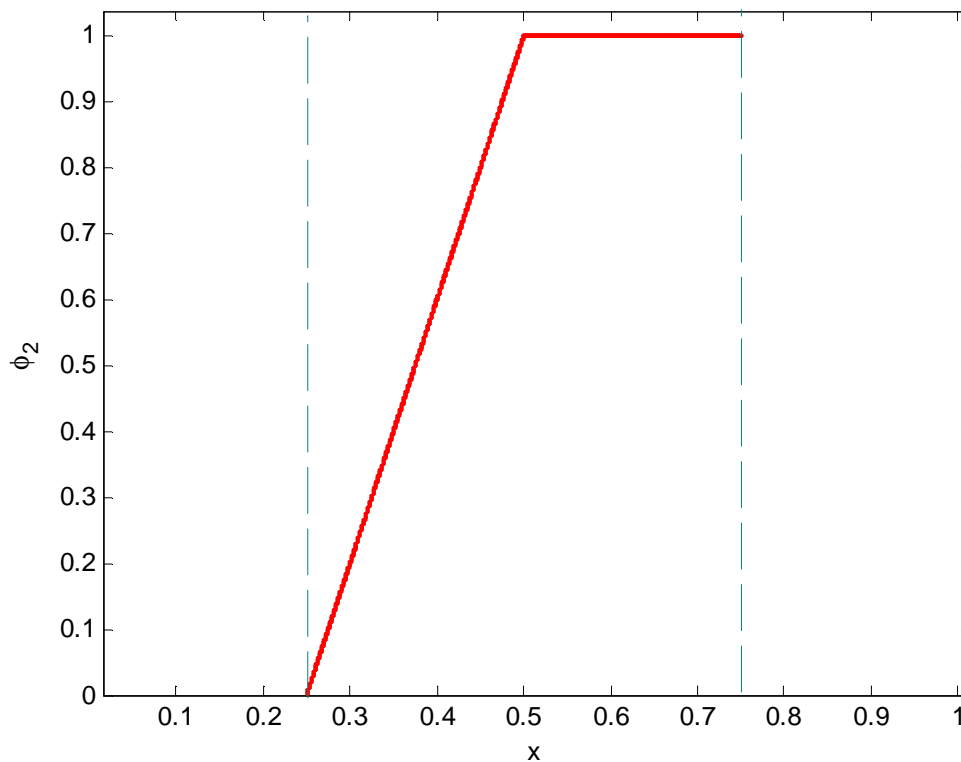


Figura 3.7: representación de la función lineal ϕ_{2j}

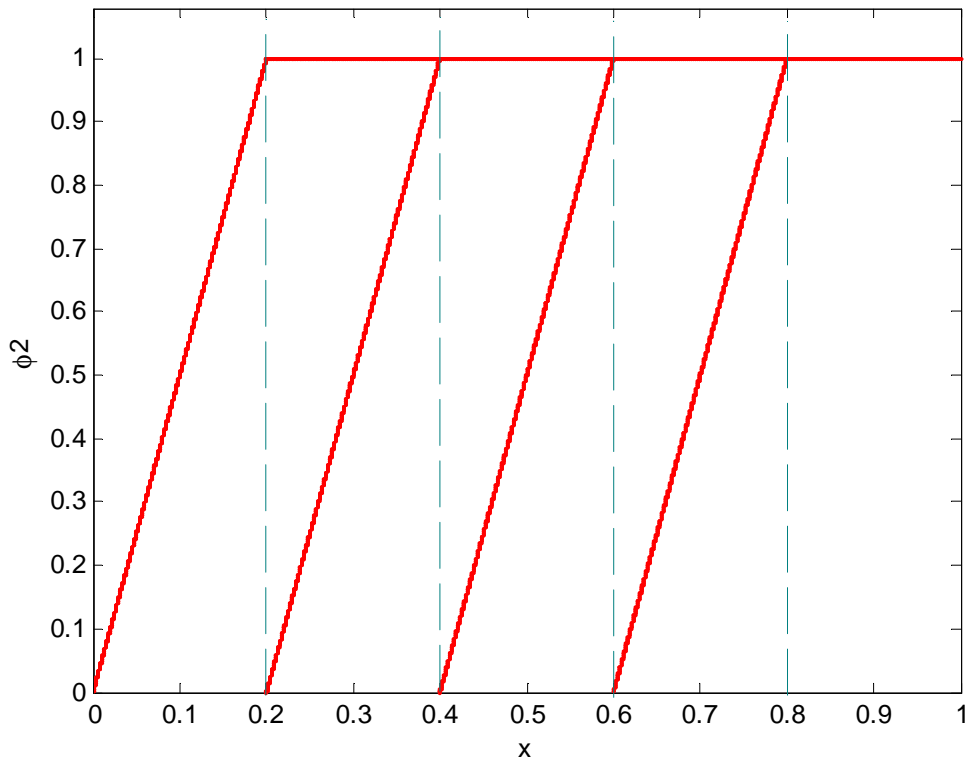


Figura 3.8: representación de la función ϕ_2 para $n=4$

Quedando definidas las dos funciones, ϕ_1 función cúbica y ϕ_2 función lineal, correspondientes al problema de condiciones de contorno. Para poder comparar el resultado obtenido con estas funciones, se obtienen, a continuación, las funciones con un orden mayor y, así, no tener que hallar las funciones por partes.

b) ϕ_1 función de cuarto orden y ϕ_2 función cuadrática

Se realiza el mismo procedimiento que en el caso anterior, cambiando solamente el grado en el quedan definidas las funciones. Al ser de un grado superior, no es necesario definir la función por partes y, por tanto, se disminuye el sistema a cinco ecuaciones con cinco incógnitas. A continuación se muestra la forma que tiene ϕ_{1j}

$$\phi_{1j} = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \qquad x_{j-1} < x < x_{j+1} \qquad (3.66)$$

Aplicando las condiciones de contorno y la quinta ecuación que es la función evaluada en x_j con valor igual a 1, se obtienen las ecuaciones que definen el sistema para calcular las constantes para una función ϕ_{1j} dada

- en $x = x_j - h$

$$\phi_{1j} = 0 \Rightarrow a(x_j - h)^4 + b(x_j - h)^3 + c(x_j - h)^2 + d(x_j - h) + e = 0 \quad (3.67)$$

$$\frac{d\phi_{1j}}{dx} = 0 \Rightarrow 4a(x_j - h)^3 + 3b(x_j - h)^2 + 2c(x_j - h) + d = 0 \quad (3.68)$$

- en $x = x_j + h$

$$\frac{d^2\phi_{1j}}{dx^2} = 0 \Rightarrow 12a(x_j + h)^2 + 6b(x_j + h) + 2c = 0 \quad (3.69)$$

$$\frac{d^3\phi_{1j}}{dx^3} = 0 \Rightarrow 24a(x_j + h) + 6b = 0 \quad (3.70)$$

$$\phi_{1j} = 0 \Rightarrow ax_j^4 + bx_j^3 + cx_j^2 + dx_j + e = 1 \quad (3.71)$$

El sistema, que se obtiene, es el siguiente

$$\begin{cases} a(x_j - h)^4 + b(x_j - h)^3 + c(x_j - h)^2 + d(x_j - h) + e = 0 \\ 4a(x_j - h)^3 + 3b(x_j - h)^2 + 2c(x_j - h) + d = 0 \\ 12a(x_j - h)^2 + 6b(x_j - h) + 2c = 0 \\ 24a(x_j - h) + 6b = 0 \\ ax_j^4 + bx_j^3 + cx_j^2 + dx_j + e = 1 \end{cases} \quad (3.72)$$

Las constantes toman los siguientes valores que representan la función ϕ_{1j}

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{17h^4} \\
 b &= \frac{-4}{17h^4}(x_j + h) \\
 c &= \frac{6}{17h^4}(x_j + h)^2 \\
 d &= \frac{-4}{17h^4}(x_j - h)(x_j^2 + 4x_jh + 7h^2) \\
 e &= \frac{1}{17h^4}(x_j - h)^2(x_j^2 + 6x_jh + 17h^2)
 \end{aligned}$$

La función queda definida de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \phi_{1j} &= \frac{1}{17h^4}x^4 + x^2(x_j + h)(-4x + 6(x_j + h)) + 6(x_j + h)^2x^2 \\
 &- 4(x_j - h)(x_j^2 + 4x_jh + 7h^2)x + (x_j - h)^2(x_j^2 + 6x_jh + 17h^2) \quad x_{j-1} < x < x_{j+1}
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

La representación gráfica de la función ϕ_{1j} , se muestra en la siguiente figura 3.9

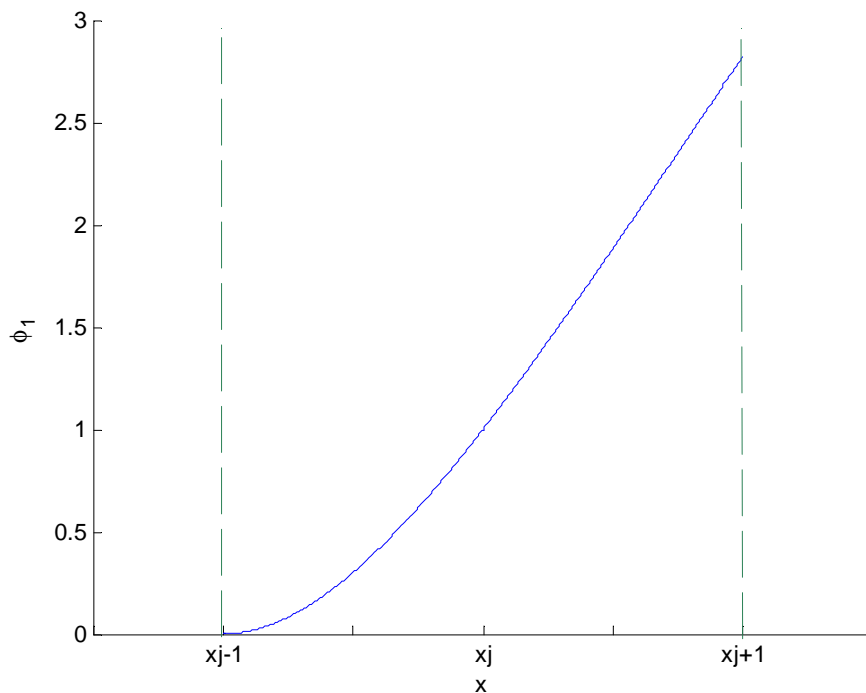


Figura 3.9: representación de la función ϕ_{1j} de 4º orden

En la siguiente figura 3.10, se muestra un ejemplo de cómo queda definida la función ϕ_1 en el intervalo del problema para un número de intervalos $n = 4$.

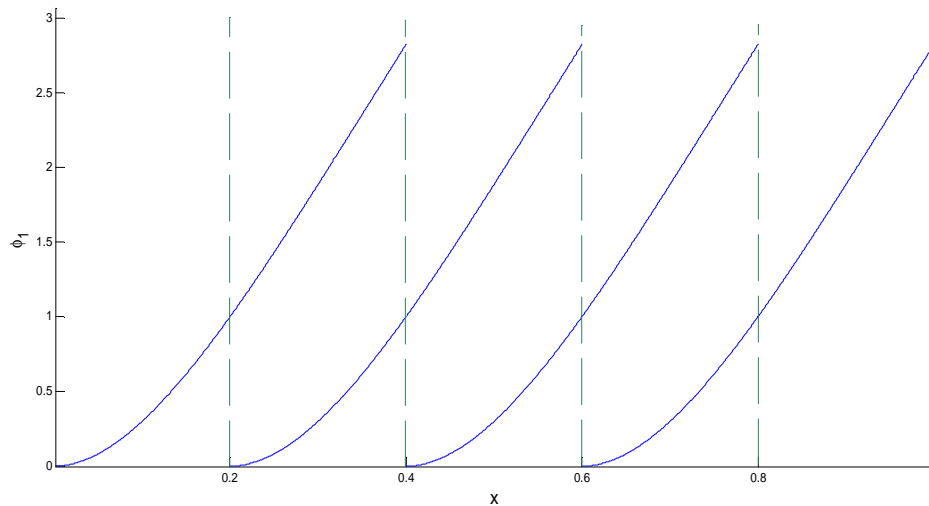


Figura 3.10: representación de la función ϕ_1 para $n=4$

A continuación, se realiza el mismo procedimiento para la función ϕ_{2j} definida como una función cuadrática sin tener que estar definida por partes

$$\phi_{2j} = ax^2 + bx + c \quad x_{j-1} < x < x_{j+1} \quad (3.74)$$

Se expresan las ecuaciones que forman el sistema de ecuaciones para definir la función ϕ_{2j}

- en $x = x_j - h$

$$\phi_{2j} = 0 \Rightarrow a(x_j - h)^2 + b(x_j - h) + c = 0 \quad (3.75)$$

- en $x = x_j + h$

$$\frac{d\phi_{2j}}{dx} = 0 \Rightarrow 2a(x_j + h) + b = 0 \quad (3.76)$$

$$\phi_{2j}(x_j) = 1 \Rightarrow ax_j^2 + bx_j + c = 1 \quad (3.77)$$

Resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones, se obtienen las constantes de la función ϕ_{2j}

$$a = \frac{-1}{3h^2}$$

$$b = \frac{2}{3h^2}(x_j + h)$$

$$c = \frac{-1}{3h^2}(x_j - h)(x_j + 3h)$$

La función ϕ_2 , queda representada de la siguiente forma

$$\phi_{2j} = \frac{-1}{3h^2}x^2 + \frac{2x}{3h^2}(x_j + h) - \frac{(x_j - h)(x_j + 3h)}{3h^2} \quad x_{j-1} < x < x_{j+1} \quad (3.78)$$

La representación gráfica de la función ϕ_{2j} , se muestra en la siguiente figura

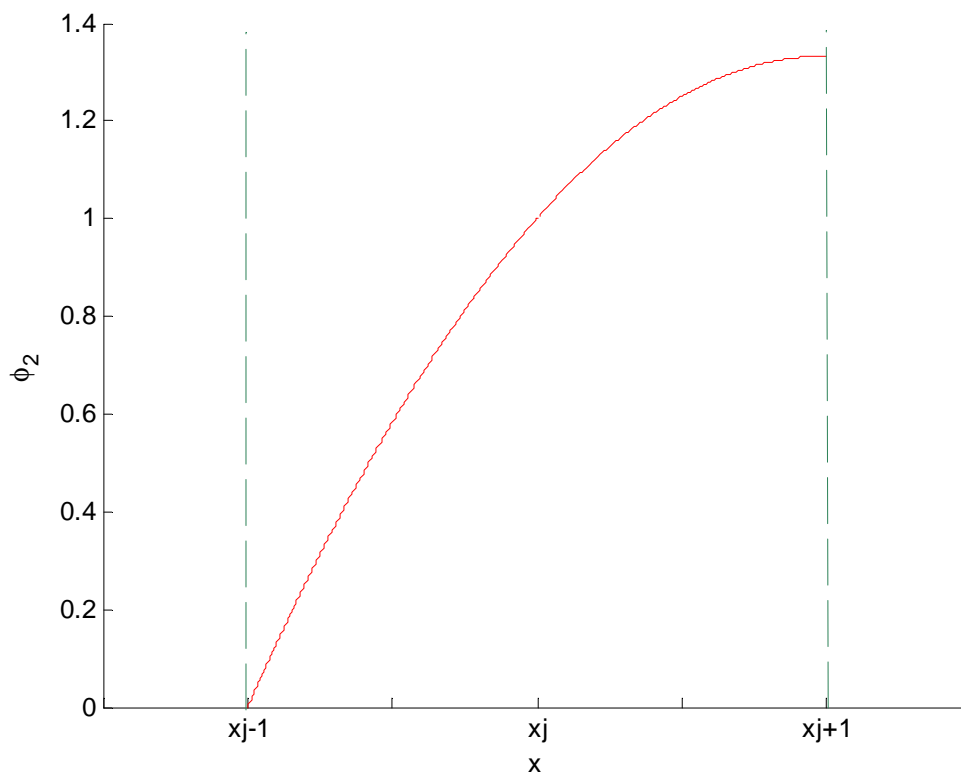


Figura 3.11: representación de la función cuadrática ϕ_{2j}

En la siguiente figura, se muestra un ejemplo de cómo queda definida la función ϕ_2 en el intervalo del problema para un número de intervalos $n = 5$.

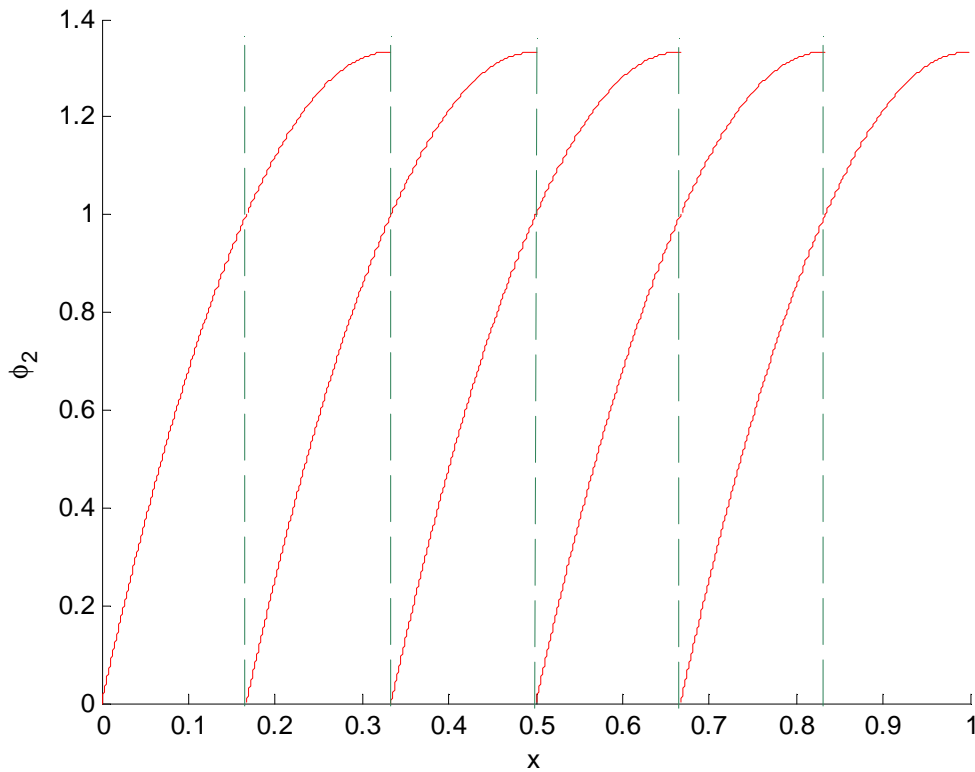


Figura 3.12: representación de la función ϕ_2 para $n=5$

Se han definido los dos grupos de funciones con las que se estudiarán el problema tratado. En el siguiente apartado, se aplicarán las funciones aquí definidas y se resolverá el problema.

4 RESULTADO NUMÉRICO

El objetivo de este apartado es la aplicación del método de Galerkin al problema inicial. Se realizarán dos estudios, según el grado de las funciones definidas en el apartado anterior. Con los resultados obtenidos en cada estudio, se compararán entre ellos y con la solución exacta del problema inicial para poder realizar una discusión de los resultados hallados. Los estudios que a continuación se van a hacer, tienen la misma base, el único cambio es la sustitución del subconjunto de las funciones que definen el desplazamiento, w , y el giro, θ .

Recuperando las ecuaciones 3.46 y 3.47, mostradas a continuación

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} + \lambda^2 W(x) + \lambda^2 y_\theta \Theta(x) + \frac{\rho u^2}{2} c \frac{dC_L}{d\theta} \left[\Theta(x) \right. \\ & \left. + \frac{1}{u} \lambda W(x) + \frac{c}{u} \left(\frac{3}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \lambda \Theta(x) \right] = 0 \\ & - g j \frac{\partial^2 \Theta(x)}{\partial x^2} + \lambda^2 y_\theta W(x) + \lambda^2 i_\theta \Theta(x) + \frac{\rho u^2}{2} c^2 \frac{dC_L}{d\theta} \\ & \left\{ \frac{c}{16u} \lambda \Theta(x) + \left(\frac{1}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \left[\Theta(x) + \frac{1}{u} \lambda W(x) + \frac{c}{u} \left(\frac{3}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \lambda \Theta(x) \right] \right\} = 0 \end{aligned}$$

Se tiene la siguiente igualdad para definir el desplazamiento y el giro

$$\begin{aligned} W(x) &= \phi_1^T(x) \cdot a_1 \\ \Theta(x) &= \phi_2^T(x) \cdot a_2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Donde a_1 y a_2 son los vectores de los coeficientes indeterminados. Se sustituye en las ecuaciones y en las condiciones de contorno, que son las condiciones que cumplen las funciones ϕ_1 y ϕ_2 .

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 \phi_1^T(x) \cdot a_1}{\partial x^4} + \lambda^2 \phi_1^T(x) \cdot a_1 + \lambda^2 y_\theta \phi_2^T(x) \cdot a_2 + \frac{\rho u^2}{2} c \frac{dC_L}{d\theta} \left[\phi_2^T(x) \cdot a_2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{u} \lambda \phi_1^T(x) \cdot a_1 + \frac{c}{u} \left(\frac{3}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \lambda \phi_2^T(x) \cdot a_2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} & - g j \frac{\partial^2 \phi_2^T(x) \cdot a_2}{\partial x^2} + \lambda^2 y_\theta \phi_1^T(x) \cdot a_1 + \lambda^2 i_\theta \phi_2^T(x) \cdot a_2 + \frac{\rho u^2}{2} c^2 \frac{dC_L}{d\theta} \\ & \left\{ \frac{c}{16u} \lambda \phi_2^T(x) \cdot a_2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \left[\phi_2^T(x) \cdot a_2 + \frac{1}{u} \lambda \phi_1^T(x) \cdot a_1 + \frac{c}{u} \left(\frac{3}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \lambda \phi_2^T(x) \cdot a_2 \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Las ecuaciones 4.2 y 4.3 se multiplican por ϕ_1 y ϕ_2 , respectivamente, y se integra a lo largo de la envergadura del ala del avión. Debido a que se realiza la multiplicación de $\phi_i \cdot \phi_j^T$, se genera una matriz de dimensión (n_i, n_j) . Uniendo las dos ecuaciones en un sistema matricial, el problema se convierte en un sistema de ecuaciones de dimensión n_T . Agrupando los términos en función de las funciones ϕ_1 y ϕ_2 y sus derivadas, se obtiene la siguiente igualdad que muestra el problema de autovalores

$$[K + U^2 H + \lambda U L + \lambda^2 M] \cdot a = 0 \quad (4.4)$$

Donde se definen, a continuación, K , H , L y M que se descomponen en cuatro submatrices, de dimensión diferenciadas por los subíndices

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

$$K_{11} = \int_0^1 \phi_1 (\phi_1^T)^{iv} dx \Rightarrow \text{integrando por partes} \Rightarrow K_{11} = \int_0^1 \phi_1'' \phi_1^T dx$$

$$K_{12} = 0$$

$$K_{21} = 0$$

$$K_{22} = -\int_0^1 g j \cdot \phi_2' \phi_2'^T dx$$

$$[H] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$$

$$H_{11} = 0$$

$$H_{12} = \frac{\rho}{2} \frac{dC_L}{d\theta} \int_0^1 c \cdot \phi_1 \phi_2'^T dx$$

$$H_{21} = 0$$

$$H_{22} = \frac{\rho}{2} \frac{dC_L}{d\theta} \int_0^1 c^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \cdot \phi_1 \phi_2'^T dx$$

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$$

$$L_{11} = \frac{\rho}{2} \frac{dC_L}{d\theta} \int_0^1 c \cdot \phi_1 \phi_1^T dx$$

$$L_{12} = \frac{\rho}{2} \frac{dC_L}{d\theta} \int_0^1 c^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \cdot \phi_1 \phi_2^T dx$$

$$L_{21} = \frac{\rho}{2} \frac{dC_L}{d\theta} \int_0^1 c^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \cdot \phi_2 \phi_1^T dx$$

$$L_{22} = \frac{\rho}{2} \int_0^1 c^3 \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \left(\frac{3}{4} - \frac{y_0}{c} \right) \frac{dC_L}{d\theta} + \frac{\pi}{8} \right] \cdot \phi_2 \phi_2^T dx$$

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = \int_0^1 \phi_1 \phi_1^T dx$$

$$M_{12} = \int_0^1 y_\theta \cdot \phi_1 \phi_2^T dx$$

$$M_{21} = \int_0^1 y_\theta \cdot \phi_2 \phi_1^T dx$$

$$M_{22} = \int_0^1 i_\theta \cdot \phi_2 \phi_2^T dx$$

El problema de autovalores definido en la ecuación 3.4, se puede expresar de la siguiente forma estándar

$$Ax = \lambda x \tag{4.5}$$

Donde x y A están formados por

$$x = \begin{bmatrix} a^T & \lambda a^T \end{bmatrix}^T \tag{4.6}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}(K + U^2 H) & -M^{-1}UL \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

El autovalor λ es una función continua dependiente de la velocidad del aire definida por U . El valor que toma λ es siempre un número complejo para cualquier valor de U , de hecho, para el valor de la velocidad del aire nulo, λ es un número complejo imaginario puro. Para valores de U distintos de cero, λ tiene la siguiente forma $\lambda = \alpha + i \cdot \varpi$. Como se muestra en [3], para velocidades del aire suficientemente pequeñas y para $dC_L/d\theta < 2\pi$, el ala del avión transfiere su energía al aire circundante, provocando que el movimiento sea una oscilación amortiguada. La estabilidad del problema se obtiene para valores negativos de α . Al cambiar el signo de α , la parte temporal del problema, que es una exponencial, hace que se convierta en inestable solución del problema. Por tanto, según se va incrementando el valor de U , se pasará en un punto de negativo a positivo el valor de α . En la siguiente figura 4.1 se muestra el valor de α en función de la velocidad del aire U

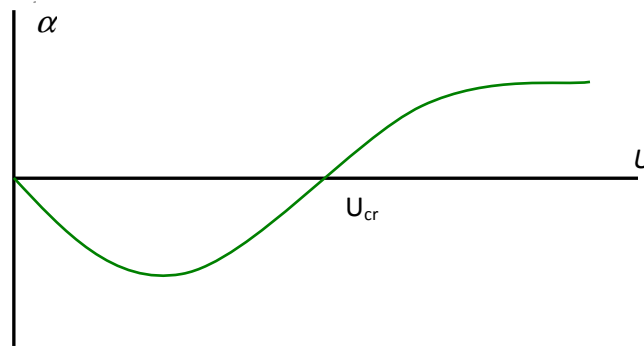


Figura 4.1: α en función de U

Se define U_{cr} como la velocidad crítica del aire a la que se obtiene un valor nulo de α , provocando que se realice el cambio de signo de α . Por ello, el problema pasa de ser estable a inestable. Se pueden tener varias velocidades críticas, pero la velocidad que se busca es la más baja, la primera solución que hace inestable el problema tratado. Se realizará el estudio del problema comenzando por velocidades del aire pequeñas, incrementando su valor hasta tener que el resultado del estudio, la parte real del autovalor λ , pasa de ser negativo a un valor positivo, haciendo el problema inestable.

Existen dos tipos de valores críticos, dependiendo del valor de la parte imaginaria ϖ , el primer valor crítico se encuentra para los valores nulos de α y ϖ , provocando que el autovalor λ sea idénticamente nulo, se dice que el ala está en una condición crítica divergente; cuando se obtienen soluciones con valores no nulos de ϖ , el problema se encuentra en una condición crítica de oscilación amortiguada.

La primera estimación para el cálculo de U_{cr} que se va a realizar es la aproximación de W y Θ por medio de un solo término de cada uno, siendo $n_1 = n_2 = 1$. Esta aproximación produce que las matrices que determinan el problema de autovalores tengan una dimensión de 2×2 y el problema se convierta en un sistema de dimensión 4×4 , disminuyendo el número de operaciones para la solución de dicho problema. Para obtener directamente la solución de la primera velocidad del aire crítica U_{cr} , la matriz A , definida en la ecuación 3.7, los valores de λ se sustituyen por su valor en dicha velocidad, $\lambda = i\omega$ y se multiplica la matriz por $[I \ M]$, se obtiene el determinante del

resultado de la multiplicación y se iguala a cero. A continuación, se muestra la matriz a la que se le realiza el determinante y el resultado de éste

$$\begin{aligned}
 \det & \begin{bmatrix} -i\omega & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i\omega & 0 & 1 \\ -K_{11} & -U_{cr}H_{12} & -(i\omega M_{11} + U_{cr}L_{11}) & -(i\omega M_{12} + U_{cr}L_{12}) \\ 0 & -(K_{22} + U_{cr}^2 H_{22}) & -(i\omega M_{21} + U_{cr}L_{21}) & -(i\omega M_{22} + U_{cr}L_{22}) \end{bmatrix} \\
 & = \omega^4 (M_{11}M_{22} - M_{12}^2) - i\omega^3 U_{cr} [M_{11}L_{22} + M_{22}L_{11} - M_{12}(L_{12} + L_{21})] \\
 & - \omega^2 [U_{cr}^2 (L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21} - H_{12}M_{12} + H_{22}M_{11}) + K_{22}M_{11} + K_{11}M_{22}] \\
 & - i\omega U_{cr} [U_{cr}^2 (H_{12}H_{21} + H_{22}L_{11}) + K_{22}L_{11} - K_{11}L_{22}] + K_{11}(U_{cr}^2 H_{22} + K_{22}) = 0
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

El resultado del determinante es una ecuación compleja en función de la velocidad crítica del aire. Por lo tanto, para la solución del problema las partes del determinante, parte real e imaginaria, deben ser idénticamente nulas. Al igualar a cero cada parte del determinante, se obtiene una solución para ω y U_{cr} . Igualando la parte imaginaria igual a cero, se obtiene la siguiente expresión

$$\omega^2 = \frac{U_{cr}^2 (H_{12}H_{21} + H_{22}L_{11}) + K_{22}L_{11} - K_{11}L_{22}}{M_{12}(L_{12} + L_{21}) - (M_{11}L_{22} + M_{22}L_{11})} \tag{4.9}$$

Introduciendo la expresión de ω 4.9, en la parte real del determinante obtenido en la igualdad 4.8, se puede mostrar como una ecuación cuadrática en función de U_{cr}

$$aU_{cr}^4 + bU_{cr}^2 + c = 0 \tag{4.10}$$

Donde a , b y c se definen de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
a &= (H_{12}L_{21} + H_{22}L_{11})\{(H_{12}L_{21} + H_{22}L_{11}) - (M_{11}M_{22} - M_{12}^2) - (L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21} \\
&\quad - H_{12}M_{12} + H_{22}M_{11})[M_{12}(L_{12} + L_{21}) - (M_{11}L_{22} + M_{22}L_{11})]\} \\
b &= 2(H_{12}L_{21} + H_{22}L_{11})(K_{22}L_{11} - K_{11}L_{22})(M_{11}M_{22} - M_{12}^2) - [(H_{12}L_{21} + H_{22}L_{11}) \\
&\quad (K_{22}M_{11} + K_{11}M_{22}) + (L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21} - H_{12}M_{12} + H_{22}M_{11})][M_{12}(L_{12} + L_{21}) \\
&\quad - (M_{11}L_{22} + M_{22}L_{11})] + K_{11}K_{22}[M_{12}(L_{12} + L_{21}) - (M_{11}L_{22} + M_{22}L_{11})]^2 \\
c &= (K_{22}L_{11} - K_{11}L_{22})^2(M_{11}M_{22} - M_{12}^2) - (K_{22}L_{11} - K_{11}L_{22})(K_{22}M_{11} + K_{11}M_{22})[M_{12} \\
&\quad (L_{12} + L_{21}) - (M_{11}L_{22} + M_{22}L_{11})] + K_{11}K_{22}[M_{12}(L_{12} + L_{21}) - (M_{11}L_{22} + M_{22}L_{11})]^2
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Simplificando el resultado a la forma de la ecuación 3.10, la solución de U_{cr} se tiene que es

$$U_{cr}^2 = -\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4.12}$$

Por tanto, se tienen cuatro valores de la velocidad crítica del aire U_{cr} . Para que se produzca la condición crítica de la oscilación amortiguada, se toma el valor más pequeño y que sea real y positivo, que es el valor que hace inestable el problema.

Para realizar estos cálculos, se van a utilizar los dos grupos de funciones definidas en el apartado anterior. De cada grupo de funciones, se obtendrá un valor aproximado de U_{cr} y se comparará con la solución exacta contenida en [4].

4.1 VALIDACIÓN DEL MÉTODO

Para la obtención de la velocidad crítica del aire U_{cr} , se resolverá el problema mediante un programa realizado en *Matlab*, que se adjunta en el Anexo 1. Para la realización del estudio y su solución, se parte de los valores contenidos en [4]. Los parámetros que definen estructuralmente el ala, se obtienen a partir de los modos primero y segundo de vibración de la estructura a flexión y a torsión. De estos modos de vibración se tienen los valores de m , la masa por unidad de longitud; EI la rigidez a flexión del ala; GJ la rigidez a torsión del ala. Las ecuaciones que definen los modos de vibración [2], se muestran a continuación

A flexión:

$$\omega_i = \left(\frac{\alpha_i}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (4.13)$$

A torsión:

$$\omega_i = \frac{(2i-1)\pi}{2l} \sqrt{\frac{GJ}{\rho I_\theta}} \quad (4.14)$$

Donde i define el modo de vibración que se está calculando y α_i es un número que toma distintos valores para cada modo de vibración.

Los datos de partida son 49,43 y 309,83 para el primero y segundo modo de vibración a flexión, los modos de vibración a torsión primero y segundo son 42,85 y 128,55.

A partir de estos modos de vibración se obtienen los datos que definen las características estructurales del ala del avión. A continuación, se muestran los valores que se utilizarán para el estudio del problema [10]

$$\begin{aligned}l &= 6,096 \text{ m} \\EI &= 9752,779 \text{ kN}\cdot\text{m}^2 \\GJ &= 987,676 \text{ kN}\cdot\text{m}^2 \\I_{\theta} &= 8,643 \text{ kg}\cdot\text{m} \\\rho &= 1,22 \text{ kg} / \text{m}^3 \\c &= 1,829 \text{ m} \\y_0 &= 0,914 \text{ m} \\y_{cg} &= 1,097 \text{ m} \\y_{\theta} &= 6,523 \text{ m} \\m &= 35,719 \text{ kg} / \text{m}\end{aligned}\tag{4.14}$$

Se ejecuta el programa realizado en *Matlab* para la obtención de los resultados. Para el primer grupo de funciones definidas en el apartado 3.3 de este documento y con los datos expuestos anteriormente, se obtiene la siguiente figura 4.2

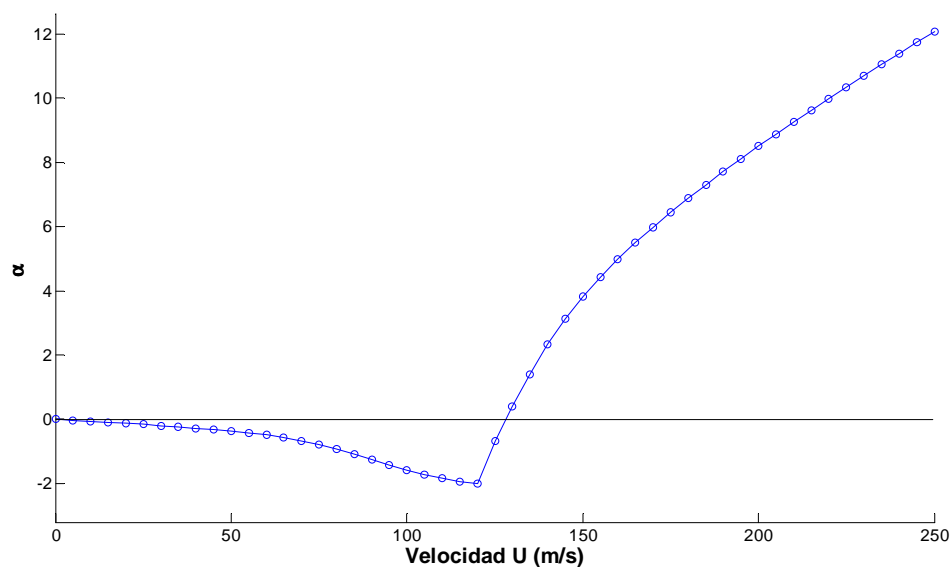


Figura 4.2: Solución del problema para el primer grupo de funciones

Para visualizar mejor el valor del resultado, se muestra la siguiente figura

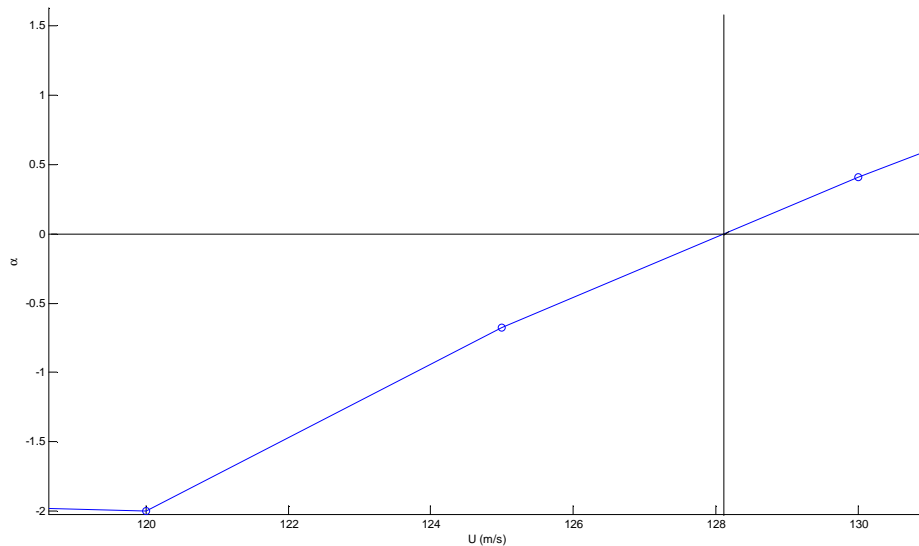


Figura 4.3: Solución del problema aumentada primer grupo de funciones

Aplicando el primer grupo de ecuaciones, que son las funciones definidas por partes en cada tramo entre nodos, se puede observar en la figura 4.3 que la solución al problema es aproximadamente igual a 128 m/s.

Se realiza el mismo procedimiento para la resolución del problema con el segundo grupo de funciones, que se han definido con un grado más para ser una única función entre nodos. A continuación, se muestra la figura 4.4 de la solución del problema

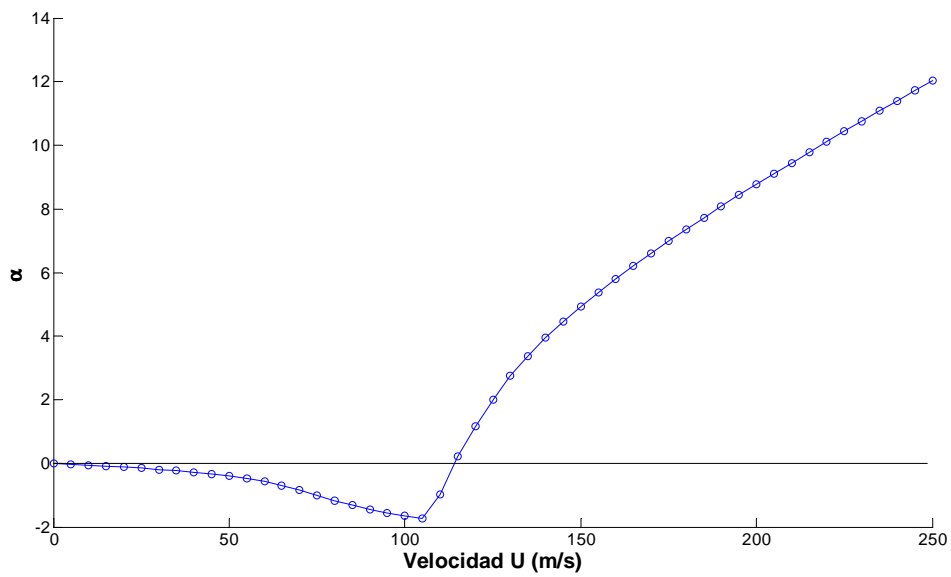


Figura 4.4: Solución del problema para el segundo grupo de funciones

Para poder visualizar de mejor forma la solución del problema con este grupo de funciones, se representa la siguiente figura

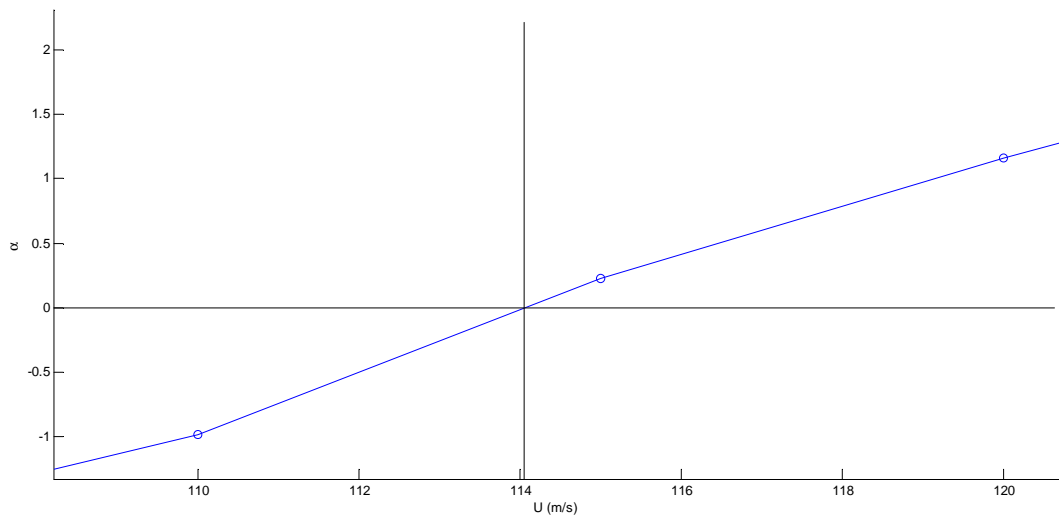


Figura 4.5: Solución del problema aumentada segundo grupo de funciones

Se tiene la siguiente figura 4.6, donde se muestra la solución exacta en el documento de Goland [4]

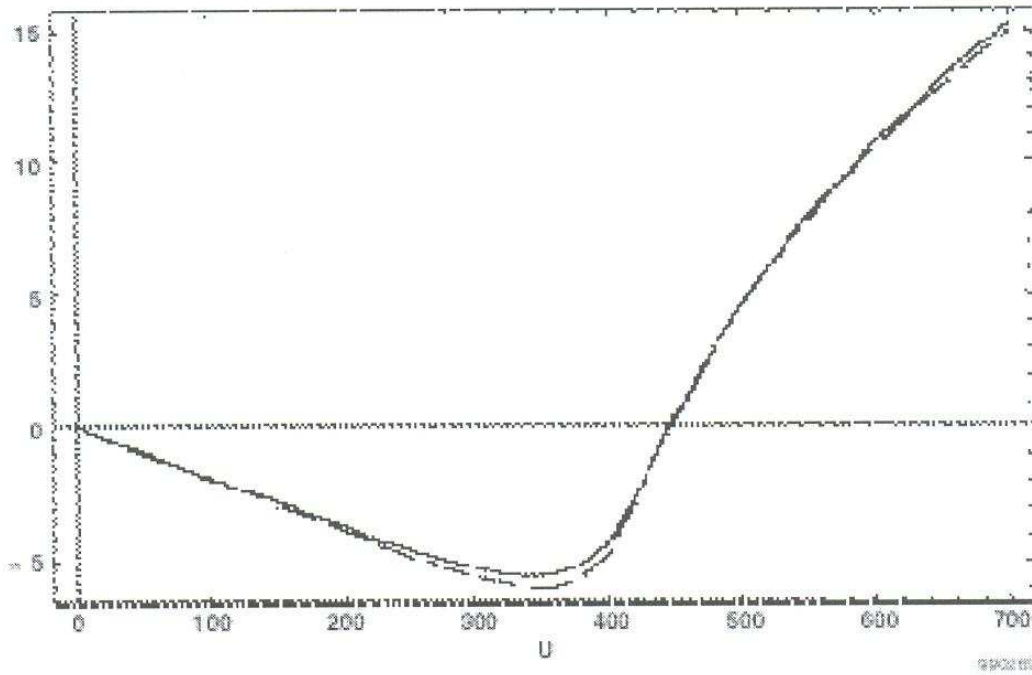


Figura 4.6: Solución exacta del problema

Como se puede observar por los valores de la gráfica 4.6, la velocidad está en unidades del sistema anglosajón, en pies por segundo, siendo 447 pies/s. El valor de la velocidad de la solución exacta en el sistema internacional es de 136 m/s. La comparación de los resultados obtenidos y el error cometido con respecto a la solución exacta, se muestra en la siguiente tabla

	U (m/s)	Error (%)
1º grupo de funciones	128	5,81
2º grupo de funciones	114	16,10

Tabla 4.1: Comparación de los resultados obtenidos

Debido a que con el primer grupo de funciones definidas para la solución del problema tratado se comete un menor error relativo, para realizar un estudio de la influencia de los parámetros del problema, se van a utilizar este grupo de funciones únicamente.

5 INFLUENCIA DE LAS DIFERENTES VARIABLES

En este apartado, se verá la influencia de las diferentes variables en la solución del problema planteado. Para ello, mediante el programa realizado, se podrá elegir el parámetro de estudio. Esto se debe a la aparición del siguiente menú en la ejecución del programa del *Anexo 1*



Figura 5.1: menú de elección de la variable de estudio

Como se puede observar en la imagen mostrada, las variables en las que se puede realizar el estudio son: masa, longitud, rigidez a flexión y rigidez a torsión. De cada variable, se resolverá el problema tomando la mitad, tres medios y el valor original de la variable de estudio. Viendo los resultados obtenidos en las siguientes gráficas, se verá las variables que modifican el valor de la solución inicial del problema. A continuación, se realiza el estudio descrito para la masa por unidad de longitud del ala

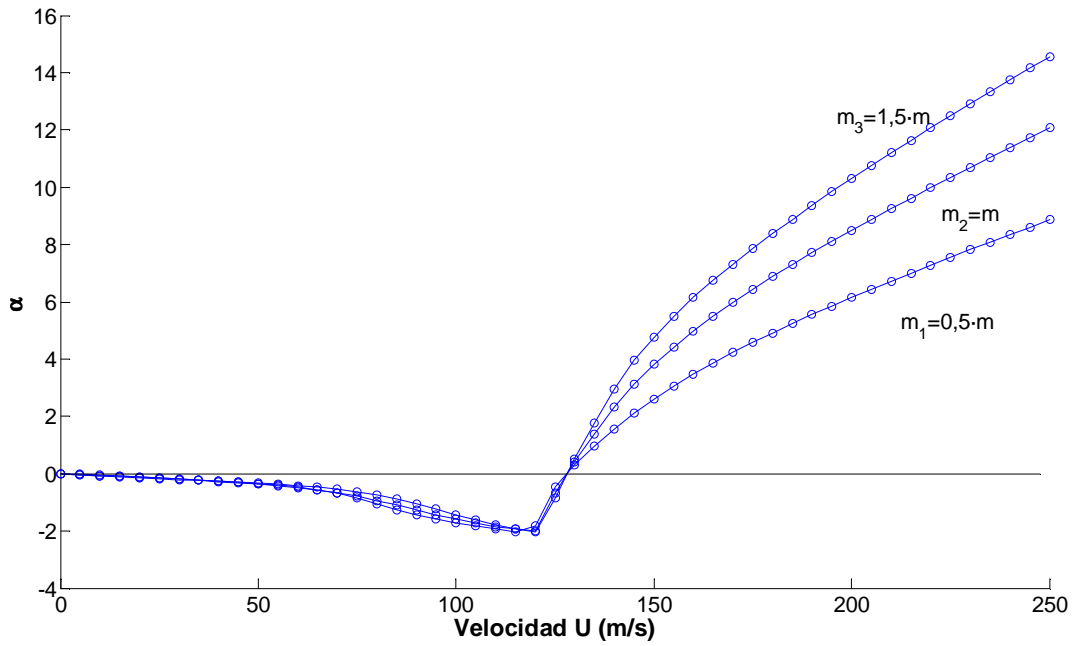


Figura 5.2: Estudio de la influencia de la masa

Como se puede observar, la variación del valor de la masa no influye en la variación de la solución de la velocidad crítica del aire. La segunda gráfica que se muestra es la solución del problema con la variación de la longitud del ala

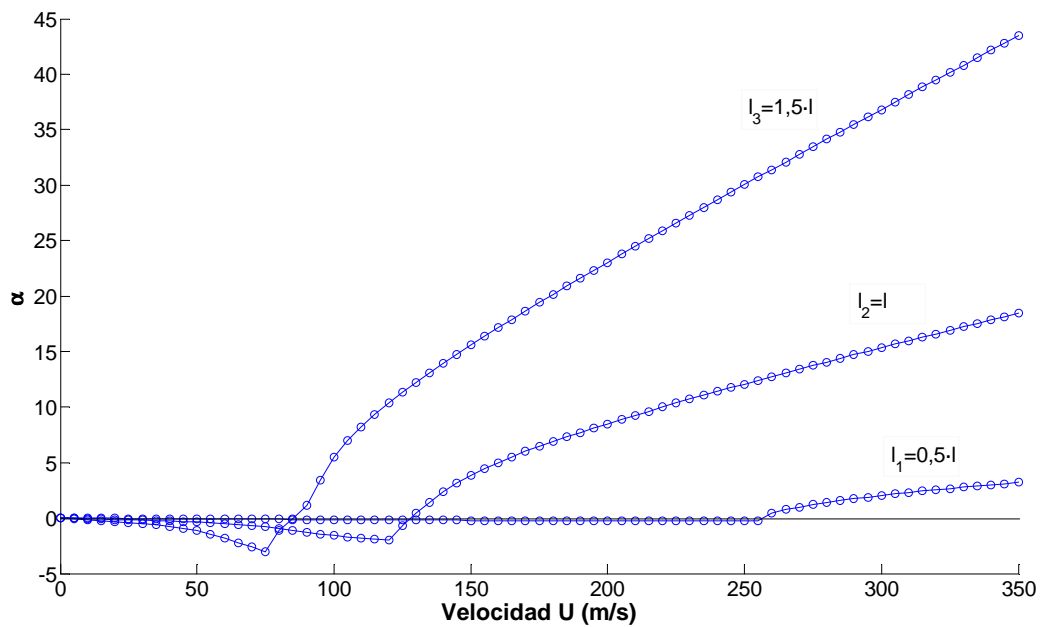


Figura 5.3: Estudio de la influencia de la longitud

La variación de la longitud del ala produce que al aumentar su valor, disminuye la velocidad crítica del aire y viceversa. La siguiente gráfica muestra el resultado del problema tratado con la variación de la rigidez a flexión

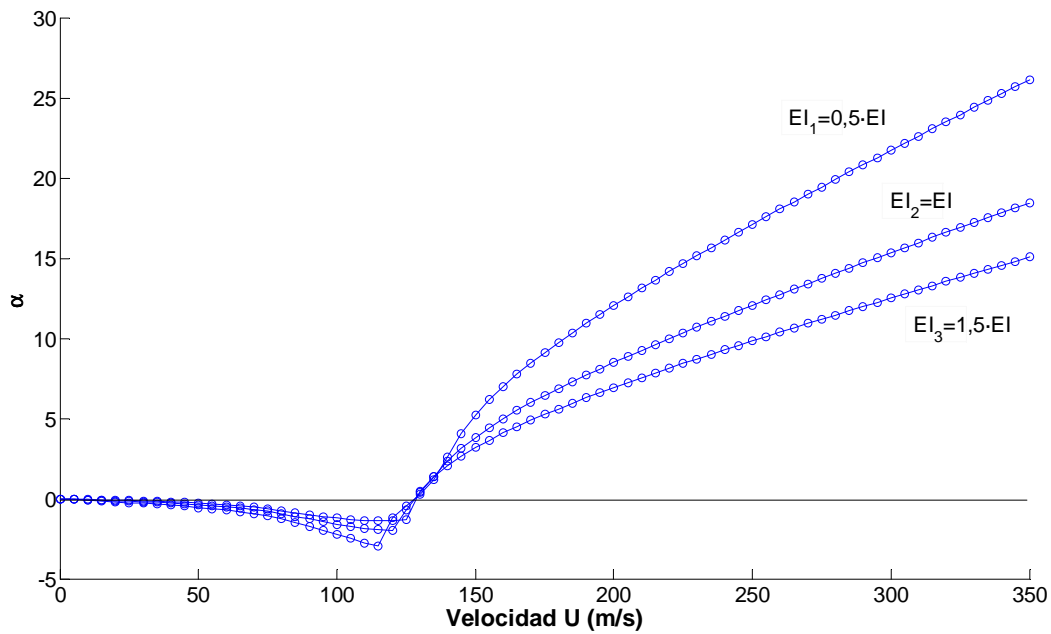


Figura 5.4: Estudio de la influencia de la rigidez a flexión

Como en el caso de la masa, con la variación de la rigidez a flexión del ala, la solución del problema no se ve afectado en el valor de la velocidad crítica. Por último, el estudio se realizará con la variación de la rigidez a torsión del ala

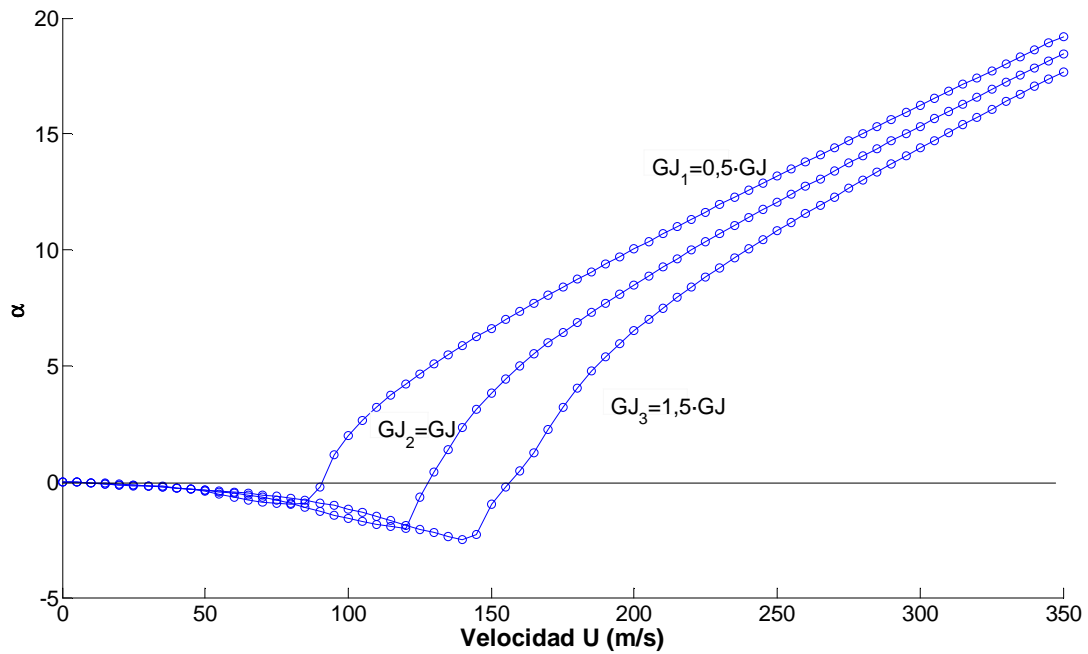


Figura 5.5: Estudio de la influencia de la rigidez a torsión

Un aumento de la rigidez a torsión provoca que aumente la velocidad crítica. Como se puede ver entonces, las variables que modifican el valor de la velocidad crítica de flutter son la longitud del ala y la rigidez a torsión de la misma.

6 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

6.1 CONCLUSIONES

A continuación, se muestran las conclusiones que se obtienen del estudio realizado en este documento:

- La aproximación realizada a través del método de los elementos finitos, siendo concretamente el método de Galerkin, es válida puesto que, en la solución del problema, el error cometido es aceptable.
- El grupo de funciones que mejor define un problema por medio del método de Galerkin, son las que están definidas a trozos comparadas con las funciones definidas con grado mayor.
- De las propiedades físicas que definen el ala de una aeronave, la rigidez a torsión del ala (GJ) y la longitud del ala (l) son las que modificando su valor produce la variación de la velocidad crítica de flutter. Para la rigidez a torsión del ala, un aumento de su valor provoca que la velocidad crítica aumente. Para la longitud del ala, al aumentar el valor disminuye el rango de velocidades apto sin que se produzca el fenómeno de flutter.

6.2 TRABAJOS FUTUROS

Para trabajos futuros, se podría realizar el estudio teniendo en cuenta la función de Theodorsen. En el estudio realizado, se ha considerado como constante e igual a 1, pero, como se expuso en el capítulo 3, es función de la frecuencia reducida del ala. Por lo tanto, en cada iteración, se tendrá que volver a calcular el valor de la función de Theodorsen.

Otro posible estudio sería la comparación de los resultados obtenidos para distintos tipos de ala de la velocidad crítica de flutter. Para ello, se tomaría como dato inicial la misma longitud de la envergadura del ala, puesto que ya se ha visto que es una de las variables que cambiando su valor se modifica el resultado obtenido.

7 BIBLIOGRAFIA

1. *Rotating wing structural dynamics and aeroelasticity*. Richard L. Bielawa. Reston (Virginia): American Institute of Aeronautics and Astronautics, cop. 2006.
2. *Introduction to structural dynamics and aeroelasticity*. D. H. Hodges y G. Alvin Pierce. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
3. *Flutter suppression using active controls based on the concept of aerodynamic energy*. E. Nissim. NASA TM 6199. 1971.
4. *Aerodynamic lift and moment calculations using a closed-form solution of the Possio equation*. J. Lin y KW. Iliff. NASA/TM-2000-209019; 2000.
5. *Mechanical vibrations*. Singiresu S. Rao. Reading, Massachusetts [etc.] : Addison-Wesley , cop. 1990.
6. *The renaissance of aeroelasticity and its future*. PP Friedmann. J Aircraft 1999; 36(1):105–21.
7. *An introduction to the theory of aeroelasticity*. Y. Fung. Dover, Dover Publications. 2002.
8. *Aeroelasticity*. RL. Bisplinghoff, H. Ashley, RL. Halfman. Reading, MA: Addison-Wesley; 1955.
9. *General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter*. T. Theodorsen. U. S. National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Report N° 496, Washington, D. C., 1934.
10. *The Flutter of a Uniform Cantilever Wing*. M. Goland. Journal of Applied Mechanics, vol. 12, n° 4, 1945.
11. *Flutter of subsonic wing*. M.R. Moosavi, A.R. Naddaf Oskouei, A. Khelil. Imam Hossein University, Tehram, Iran. 2004.
12. *A modern course in aeroelasticity*. EH. Dowell. Norwell, MA: Kulwer Academic, 1995.
13. *Aircraft Structural Mechanics*. R. Steinbacher y G. Gerard. Pitman Publishing Corp., 1952.
14. *Physically weighted approximations of unsteady aerodynamic forces using the minimum-state method*. M. Karpel y ST. Hoadley. NASA TP 3025, 1991.

15. *Design for active and passive flutter suppression and gust alleviation*. M. Karpel. NASA CR3482, 1981.
16. *Introduction to aircraft aeroelasticity and loads*. Jan R. Wright. Chichester (England) : John Wiley & Sons, cop. 2007.
17. *State space representation of unsteady airfoil behavior*. JG. Leishman y KQ. Nguyen. AIAA J 1990;28(5).
18. *Aeroelasticity of plates and shells*. E.H. Dowell. Leiden: Noordhoff International, 1975.
19. *Galerkin finite element methods for parabolic problems*. V. Thomée. Springer, 2006.
20. *Unsteady aerodynamics of a flapped airfoil in subsonic flow by indicial concepts*. N. Hariharan y JG. Leishman. J Aircraft 1996.

8 ANEXO

A continuación, se muestran los programas realizados para el estudio realizado. Hay tres programas: los dos primeros corresponden al estudio del grupo de funciones que definen el problema inicial, en los que se han visto el error cometido con respecto al valor real; el último programa, corresponde con el estudio realizado para la influencia de las variables del problema en la solución del mismo

Grup01.m

```

% Variables del problema
long=20*0.3048;
l=1;
EI=23.6e6*4.448222*(0.3048^2);
GJ=2.39e6*4.448222*(0.3048^2);
Iteta=1.943*14.593902*0.3048;
ro=1.22;
dCl=2*pi;
c=6*0.3048;
y0=0.5*c;
m=0.746*14.593902/0.3048;
yteta=0.447*14.593902;

% Valores adimensionalizados
gj=GJ/EI;
c=c/long;
y0=y0/long;
yteta=yteta/(m*long);
iteta=Iteta/(m*long^2);
ro=ro*long^2/m;

% Se inicializan los valores de las matrices
K=zeros(2);
H=zeros(2);
L=zeros(2);
M=zeros(2);

% Se definen los puntos del problema

```

Unidades

% m
% adimens
% Nm²
% Nm²
% kg*m²/m
% kg/m³
% adimens
% m
% m
% kg/m
% kg/m/m

```

h=1/2; % Ya que solo tenemos un
valor de n
xj=1/2;

% Se definen las constantes tanto de phi1(b y c) como de phi2(d
y e)

b1=-1/(2*h^3);
b2=3*xj/(2*h^3);
b3=-3*(xj^2-h^2)/(2*h^3);
b4=((xj+2*h)*(xj-h)^2)/(2*h^3);
c1=3/(2*h);
c2=1-xj*c1;
d1=1/h;
d2=1-xj/h;
e1=0;
e2=1;

% Se calcula para cada punto, la función phi1 y phi2

q=100000;

for j=0:q
    x=(xj-(q-j)*h/q);
    fila=b1*x^3+b2*x^2+b3*x+b4;
    ddfila=6*b1*x+2*b2;
    filb=c1*x+c2+h*c1;
    ddfilb=0;
    fi2a=d1*x+d2;
    dfi2a=d1;
    fi2b=e1*x+e2;
    dfi2b=e1;

    v=x+h;

    hold on
    plot(x,fila,'b-')
    plot(v,filb,'b-')
    plot(x,fi2a,'r-')
    plot(v,fi2b,'r-')

    % Se realizan las integrales
    K(1,1)=K(1,1)+(ddfila^2)*h/q;
    K(2,2)=K(2,2)+gj*(dfi2a^2)*h/q;
    H(1,2)=H(1,2)+(ro*dCl*c/2)*((fila*fi2a)+(filb*fi2b))*h/q;
    H(2,2)=H(2,2)+(ro*dCl*(c^2)/2)*(1/4-
y0/c)*((fila*fi2a)+(filb*fi2b))*h/q;
    L(1,1)=L(1,1)+(ro*dCl*c/2)*((fila^2)+(filb^2))*h/q;
    L(1,2)=L(1,2)+(ro*dCl*(c^2)/2)*(3/4-
y0/c)*((fila*fi2a)+(filb*fi2b))*h/q;
    L(2,1)=L(2,1)+(ro*dCl*(c^2)/2)*(1/4-
y0/c)*((fila*fi2a)+(filb*fi2b))*h/q;
    L(2,2)=L(2,2)+(ro*(c^3)/2)*((1/4-y0/c)*(3/4-
y0/c)*dCl+pi/8)*((fi2a^2)+(fi2b^2))*h/q;
    M(1,1)=M(1,1)+((fila^2)+(filb^2))*h/q;

```

```
M(1,2)=M(1,2)+yteta*((fila*fi2a)+(filb*fi2b))*h/q;
M(2,1)=M(2,1)+yteta*((fila*fi2a)+(filb*fi2b))*h/q;
M(2,2)=M(2,2)+iteta*((fi2a^2)+(fi2b^2))*h/q;
end

% Se introduce la velocidad

s=0;
V=[];
E=[];

for U=0:5:250
    u=U/sqrt(EI/(m*long^2));
    alpha=sym('alpha');
    A=K+(u^2).*H+((alpha)*u).*L+(alpha)^2.*M;
    B=det(A);
    C=double(solve(B));
    D=(real(C));
    V=[U V];
    E=[D(3) E];
    figure(2)
    hold on
end

% Gráfico de la solución

plot(V,E,'o-')
```

Grupo2.m

```

% Variables del problema
long=20*0.3048;
l=1;
EI=23.6e6*4.448222*(0.3048^2);
GJ=2.39e6*4.448222*(0.3048^2);
Iteta=1.943*14.593902*0.3048;
ro=1.22;
dCl=2*pi;
c=6*0.3048;
y0=0.5*c;
m=0.746*14.593902/0.3048;
yteta=0.447*14.593902;

% Valores adimensionalizados
gj=GJ/EI;
c=c/long;
y0=y0/long;
yteta=yteta/(m*long);
iteta=Iteta/(m*long^2);
ro=ro*long^2/m;

% Se inicializan los valores de las matrices
K=zeros(2);
H=zeros(2);
L=zeros(2);
M=zeros(2);

% Se definen los puntos del problema
h=1/2;
xj=1/2;

% Se definen las constantes tanto de phi1(b1, b2, b3, b4 y b5) como
de phi2(c1, c2 y c3)
b1=1/(17*h^4);
b2=-4*(xj+h)/(17*h^4);
b3=6*(xj+h)^2/(17*h^4);
b4=-4*(xj-h)*(xj^2+4*xj*h+7*h^2)/(17*h^4);
b5=(xj-h)^2*(xj^2+6*xj*h+17*h^2)/(17*h^4);
c1=-1/(3*h^2);
c2=2*(xj+h)/(3*h^2);
c3=-(xj-h)*(xj+3*h)/(3*h^2);

% Se calcula para cada punto, la función phi1 y phi2
q=100000;
for j=0:q
    x=(xj-(q-j)*h/q);
    v=x+h;

    fila=b1*x^4+b2*x^3+b3*x^2+b4*x+b5;

```

Unidades

```

% m
% adimens
% Nm^2
% Nm^2
% kg*m^2/m
% kg/m3
% adimens
% m
% m
% kg/m
% kg/m/m

```

```

ddfila=12*b1*x^2+6*b2*x+2*b3;
filb=b1*v^4+b2*v^3+b3*v^2+b4*v+b5;
ddfild=12*b1*v^2+6*b2*v+2*b3;
fi2a=c1*x^2+c2*x+c3;
dfi2a=2*c1*x+c2;
fi2b=c1*v^2+c2*v+c3;
dfi2b=2*c1*v+c2;

hold on
plot(x,filb,'b-')
plot(v,filb,'b-')
plot(x,fi2a,'r-')
plot(v,fi2b,'r-')

% Se realizan las integrales

K(1,1)=K(1,1)+(ddfila^2)*h/q;
K(2,2)=K(2,2)+gj*(dfi2a^2)*h/q;
H(1,2)=H(1,2)+(ro*dCl*c/2)*((fila*fi2a)+(filb*fi2b))*h/q;
H(2,2)=H(2,2)+(ro*dCl*(c^2)/2)*(1/4-
y0/c)*((fila*fi2a)+(filb*fi2b))*h/q;
L(1,1)=L(1,1)+(ro*dCl*c/2)*((fila^2)+(filb^2))*h/q;
L(1,2)=L(1,2)+(ro*dCl*(c^2)/2)*(3/4-
y0/c)*((fila*fi2a)+(filb*fi2b))*h/q;
L(2,1)=L(2,1)+(ro*dCl*(c^2)/2)*(1/4-
y0/c)*((fila*fi2a)+(filb*fi2b))*h/q;
L(2,2)=L(2,2)+(ro*(c^3)/2)*((1/4-y0/c)*(3/4-
y0/c)*dCl+pi/8)*((fi2a^2)+(fi2b^2))*h/q;
M(1,1)=M(1,1)+((fila^2)+(filb^2))*h/q;
M(1,2)=M(1,2)+yteta*((fila*fi2a)+(filb*fi2b))*h/q;
M(2,1)=M(2,1)+yteta*((fila*fi2a)+(filb*fi2b))*h/q;
M(2,2)=M(2,2)+iteta*((fi2a^2)+(fi2b^2))*h/q;
end

% Se introduce la velocidad

s=0;
V=[];
E=[];

for U=0:5:250
    u=U/sqrt(EI/(m*long^2));
    alpha=sym('alpha');
    A=K+(u^2).*H+((alpha)*u).*L+(alpha)^2.*M;
    B=det(A);
    C=double(solve(B));
    D=(real(C));
    V=[U V];
    E=[D(3) E];
    figure(2)
    hold on
end

% Gráfico de la solución del problema

plot(V,E,'o-')

```

Variables.m

```

opt=menu('variable de estudio','masa','longitud','rigidez a
flexion','rigidez a torsion');

for t=1:3

% Variables del problema                                Unidades

long=20*0.3048;                                       % m
l=1;                                                    % adimens
EI=23.6e6*4.448222*(0.3048^2);                       % Nm^2
GJ=2.39e6*4.448222*(0.3048^2);                      % Nm^2
Iteta=1.943*14.593902*0.3048;                       % kg*m^2/m
ro=1.22;                                               % kg/m3
dCl=2*pi;                                              % adimens
c=6*0.3048;                                           % m
y0=0.5*c;                                              % m
m=0.746*14.593902/0.3048;                            % kg/m
yteta=0.447*14.593902;                               % kg/m/m

if opt==1
    m=m*(t/2)
elseif opt==2
    long=long*(t/2)
elseif opt==3
    EI=EI*(t/2)
elseif opt==4
    GJ=GJ*(t/2)
end

% Variables dimensionales

gj=GJ/EI;
c=c/long;
y0=y0/long;
yteta=yteta/(m*long);
iteta=Iteta/(m*long^2);
ro=ro*long^2/m;

% Se inicializan los valores de las matrices

K=zeros(2);
H=zeros(2);
L=zeros(2);
M=zeros(2);

% Se definen los puntos del problema

h=1/2;
xj=1/2;

```

```

% Se definen las constantes tanto de phi1(b y c) como de phi2(d
y e)

b1=-1/(2*h^3);
b2=3*xj/(2*h^3);
b3=-3*(xj^2-h^2)/(2*h^3);
b4=((xj+2*h)*(xj-h)^2)/(2*h^3);
c1=3/(2*h);
c2=1-xj*c1;
d1=1/h;
d2=1-xj/h;
e1=0;
e2=1;

% Se calcula para cada punto, la función phi1 y phi2

q=100000;

for j=0:q
    x=(xj-(q-j)*h/q);
    fila=b1*x^3+b2*x^2+b3*x+b4;
    ddfila=6*b1*x+2*b2;
    filb=c1*x+c2+h*c1;
    ddfilb=0;
    fi2a=d1*x+d2;
    dfi2a=d1;
    fi2b=e1*x+e2;
    dfi2b=e1;

    % Se realizan las integrales

    K(1,1)=K(1,1)+(ddfila^2)*h/q;
    K(2,2)=K(2,2)+gjj*(dfi2a^2)*h/q;
    H(1,2)=H(1,2)+(ro*dCl*c/2)*((fila*fi2a)+(filb*fi2b))*h/q;
    H(2,2)=H(2,2)+(ro*dCl*(c^2)/2)*(1/4-
y0/c)*((fila*fi2a)+(filb*fi2b))*h/q;
    L(1,1)=L(1,1)+(ro*dCl*c/2)*((fila^2)+(filb^2))*h/q;
    L(1,2)=L(1,2)+(ro*dCl*(c^2)/2)*(3/4-
y0/c)*((fila*fi2a)+(filb*fi2b))*h/q;
    L(2,1)=L(2,1)+(ro*dCl*(c^2)/2)*(1/4-
y0/c)*((fila*fi2a)+(filb*fi2b))*h/q;
    L(2,2)=L(2,2)+(ro*(c^3)/2)*((1/4-y0/c)*(3/4-
y0/c)*dCl+pi/8)*((fi2a^2)+(fi2b^2))*h/q;
    M(1,1)=M(1,1)+((fila^2)+(filb^2))*h/q;
    M(1,2)=M(1,2)+yteta*((fila*fi2a)+(filb*fi2b))*h/q;
    M(2,1)=M(2,1)+yteta*((fila*fi2a)+(filb*fi2b))*h/q;
    M(2,2)=M(2,2)+iteta*((fi2a^2)+(fi2b^2))*h/q;
end

% Se introduce la velocidad

s=0;
V=[];
E=[];

for U=0:5:250

```



```
u=U/sqrt(EI/(m*long^2));
alpha=sym('alpha');
A=K+(u^2).*H+((alpha)*u).*L+(alpha)^2.*M;
B=det(A);
C=double(solve(B));
D=(real(C));
V=[U V];
E=[D(3) E];
figure(2)
hold on
end

% Gráfico de la solución de la variable de estudio

plot(V,E,'o-')

end
```