



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ingeniería

TESIS DE DOCTORADO

MODELOS REDUCIDOS PARA EL CONTROL
DE FLUJOS CON ACTUADORES EHD

Presentada por:
Juan Gastón Leonel D'Adamo

Director: Guillermo Artana

Abril de 2007

Agradecimientos

La presente tesis es fruto de trabajo de investigación realizado dentro del Laboratorio de Fluidodinámica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.

Quiero expresar mi reconocimiento al Dr. Guillermo Artana por haber dirigido mi trabajo a lo largo de estos cuatro años. Valoro la calidad de sus consejos, la disponibilidad que tuvo conmigo, y la oportunidad que me ofreció para desarrollar mi vocación por la investigación en el Laboratorio que dirige.

Destaco también la colaboración de Nicolas Papadakis y del Dr. Etienne Mémin del grupo Vista del INRIA de Francia. Asimismo estoy agradecido al Dr. Jean-Antoine Désidéri por haberme recibido y dirigido en el grupo Opale del INRIA en Sophia Antipolis.

Agradezco la valiosa colaboración de la profesora Ada Cammilleri, quien me brindó paciente y continua ayuda con los problemas matemáticos. Gracias a mis amigos y compañeros de trabajo Roberto Sosa y Alejandro Gronskis, por secundarme en tareas de laboratorio y en simulaciones numéricas, respectivamente.

Por último, dedico este trabajo a mi familia, a mis padres Eva y Daniel, a mi hermana Florencia. Y a mi esposa, Clothilde.

Juan D'Adamo, marzo de 2007

Índice general

Introducción	9
1. Flujo en estudio: estela de un cilindro	13
1.1. Introducción	13
1.2. Formación de vórtices	14
1.3. Regímenes de escurrimiento	16
1.4. Desprendimiento laminar de vórtices	17
1.5. Régimen de Transición laminar	20
1.6. Estructuras coherentes	21
1.6.1. Definiciones	22
1.6.2. Métodos de identificación	23
1.7. Conclusiones	25
2. Control del escurrimiento alrededor de un cilindro	27
2.1. Introducción	27
2.2. Dispositivos de control activo.	27
2.2.1. Rotación uniforme del cilindro	27
2.2.2. Control mediante oscilaciones del cilindro	31
2.2.3. Control mediante inyección y succión de fluido	33
2.3. Control de flujos mediante actuadores electrohidrodinámicos	34
2.3.1. Generalidades de las descargas en gases.	34
2.3.2. Descarga corona	37
2.3.3. Descarga de lámina de plasma	38
2.3.4. Descarga con barrera dieléctrica(DBD)	39
2.3.5. Actuadores electrohidrodinámicos	41
2.3.6. Aplicaciones en el flujo alrededor del cilindro.	42
2.4. Conclusiones	46
3. Descomposición en modos ortogonales, POD	49
3.1. Introducción	49
3.2. Base POD	50

3.2.1.	Convergencia	53
3.2.2.	Base Óptima	57
3.2.3.	Modos espaciales y temporales	59
3.2.4.	Implementación	59
3.3.	Conclusiones	62
4.	Sistemas dinámicos de orden reducido	63
4.1.	Sistemas dinámicos	63
4.1.1.	Introducción	63
4.1.2.	Puntos de equilibrio y ciclos límite	64
4.2.	Proyección de Galerkin	67
4.2.1.	Formulación de sistemas de orden reducido	68
4.2.2.	Inclusión del modo cero	71
4.2.3.	Síntesis	72
4.3.	Hipótesis de cierre	72
4.3.1.	Truncamiento	72
4.4.	Identificación Polinomial	75
4.4.1.	Implementación	76
4.5.	Método de Asimilación	76
4.5.1.	Principio de la asimilación de datos	76
4.5.2.	Función de penalización	77
4.5.3.	Ecuaciones Recursivas	80
4.5.4.	Función de estado incremental	81
4.5.5.	Operador Tangente	81
4.5.6.	Convergencia y estabilidad numérica	82
4.5.7.	Síntesis	83
4.6.	Conclusiones	83
5.	Montaje experimental y primer tratamiento de los resultados	85
5.1.	Introducción	85
5.2.	Equipos para producir y medir el fenómeno fluidodinámico.	86
5.2.1.	Túnel de viento	86
5.3.	Técnica de medida por seguimiento de imágenes de partículas	87
5.3.1.	Fundamentos	87
5.3.2.	Equipo	88
5.3.3.	Algoritmo PIV.	90
5.3.4.	Dimensiones principales y parámetros del estudio.	92
5.4.	Actuador mecánico	96
5.5.	Actuador electrohidrodinámico	96
5.6.	Análisis convencional de las medidas PIV	100
5.6.1.	Flujo base	100

5.6.2.	Características del flujo bajo la rotación mecánica	103
5.6.3.	Características del flujo bajo el efecto de la actuación EHD .	106
5.6.4.	Comparación del flujo bajo ambos tipos de actuación.	110
5.7.	Conclusiones	112
6.	Modelos reducidos a partir de datos experimentales	113
6.1.	Introducción	113
6.2.	Aplicaciones de los modelos reducidos al filtrado.	114
6.2.1.	Filtrado de datos Gappy-POD	114
6.2.2.	Filtrado por asimilación	116
6.3.	Resultados de las experiencias de filtrado	116
6.3.1.	Caso del flujo base	116
6.3.2.	Filtrados para el flujo con rotación mecánica y con actuación EHD	117
6.4.	Aplicación de modelos reducidos en la estimación de flujos fuera de los instantes datos.	120
6.4.1.	Estimaciones para el flujo base	120
6.4.2.	Modelo Reducido del flujo actuado	128
6.5.	Estimación de los efectos de la actuación sobre el flujo base.	131
6.5.1.	Función de control	131
6.5.2.	Analogías entre la rotación mecánica y la actuación EHD . .	137
6.6.	Aplicaciones de modelos reducidos a problemas de control óptimo .	139
6.7.	Conclusiones	143
	Conclusiones y perspectivas	145
	Apéndice	147
A.	Resultados del análisis funcional	149
A.1.	Algunas definiciones	149
A.1.1.	Espacios de Hilbert	149
A.1.2.	Completitud	150
A.1.3.	Densidad	150
A.1.4.	Compacidad	150
A.1.5.	Espacios de Banach	150
A.1.6.	Teorema de la Proyección Ortogonal	150
A.1.7.	Adjunto de un operador	152
A.1.8.	Espacios de funciones diferenciables	152
A.1.9.	Derivación de operadores	153
A.2.	Sobre la integral de Lebesgue	153
A.2.1.	Definición: funciones características	154

A.2.2. Definición: funciones simples	154
A.2.3. Definición: Integración	154
A.2.4. Derivación bajo la Integral	155
A.2.5. Teorema de Fubini	155
A.3. Intercambiabilidad entre el el promedio temporal y la integración espacial.	156
A.4. Propiedades del operador de Fredholm	158
A.4.1. Teorema sobre convergencia de operadores compactos	160
A.5. Problema del cálculo de variaciones	162
A.5.1. Planteo general.	162
A.5.2. Aplicación sobre los modelos reducidos POD.	165
Bibliografía	169

Índice de figuras

1.1.	Regiones del flujo perturbado.(Zdravkovich (1997)[145])	14
1.2.	Formación de vórtices primaria.(Schlichting (1978)[114])	15
1.3.	Mecanismo de separación de la capa límite.(Schlichting (1978)[114])	15
1.4.	Formación de los vórtices von Karman. Visualización y esquema de Perry et al.(1982)[96]	18
1.5.	Evolución del número de Strouhal en función de Reynolds. (Williamson (1996) [142])	19
1.6.	Visualización de diferentes modos de desprendimiento laminar (Williamson (1988)[141])	19
1.7.	Inestabilidades de modo A. Williamson (1996)[143]	20
1.8.	Inestabilidades de modo B. Williamson (1996)[143]	21
2.1.	Visualización del flujo a $Re=4000$ alrededor de un cilindro que rota con velocidad tangencial U_r . (a) $U_r/U \rightarrow 0$, (b) $U_r/U = 1$, (c) $U_r/U = 2$, (d) $U_r/U = 4$, (e) $U_r/U = 6$, , (f) $U_r/U \rightarrow \infty$	29
2.2.	Buque con rotores. Flettner (1925)(<i>izquierda</i>). Vista del rotor del generador de Madaras (1931)(<i>derecha</i>)	30
2.3.	Variación de St con respecto a la rotación adimensional γ . Mittal y Kumar(2003)[85].	31
2.4.	Modificación de los patrones de líneas de corriente al aplicar oscilaciones del cilindro a bajos Re . Taneda (1978)[145].	32
2.5.	Visualización de un cilindro con una ranura de succión a $\theta = 140^\circ$, $Re = 4000$. Prandtl (1925)[145].	33
2.6.	Esquema del circuito de una descarga gaseosa en un tubo.	35
2.7.	Característica corriente-tensión y distintos regímenes de descarga para electrodos planos paralelos. Raizer (1991)[104].	36
2.8.	Descarga Corona. Configuración alambre-placa. La descarga corona se producirá siempre que $h \gg D$. La ionización del gas se produce en la zona donde la intensidad del campo supera un determinado valor crítico E_c . Williams (1993)[140].	38

2.9. Esquema de una descarga deslizante. 1 dieléctrico; 2 plasma; 3 electrodo iniciador; 4 y 5 contraelectrodo y cubierta puestos a tierra. Lagarkov y Rutkevich (1994)[72].	39
2.10. Configuración de electrodos con Barrera Dieléctrica (Kunhardt[71]).	39
2.11. Configuración de un actuador DBD. Roth (1998)[109]	40
2.12. Perfiles de velocidades de viento iónico. Forte et al. (2006)[45]	41
2.13. Vista esquemática de costado del cilindro. (a) electrodos montados sobre su superficie. (b) de las tomas de presión practicadas. Artana et al. (1999)[4].	42
2.14. Variación de la integral de la presión adimensional en función del número de Reynolds, con y sin la aplicación de la descarga generalizada. Desimone (2000)[35].	43
2.15. Distribución de presión en la superficie del cilindro para varios valores de corriente para $Re \simeq 58000$. Artana et al.(2003)[6].	44
2.16. (a) Esquema de los actuadores DBD montados en la superficie del cilindro. 1 y 4 son materiales aislante; 2 es el electrodo expuesto; 3 es el electrodo embutido en el aislante y 5 representa al la formación de plasma. (b) Flujo sin descarga. (c) Flujo con descarga. Thomas et al.[130].	45
2.17. (a) Comparación de los perfiles de las componentes de intensidad de turbulencia $((u'u')_m$ en la estela cercana $x/D=5$. Thomas et al. (2006)[130].	46
3.1. Ejemplo de Aplicación del método POD.	61
4.1. Clasificación de puntos de equilibrio. a) Nodo estable. b) Foco inestable. c) Nodo inestable. d) Punto silla.	66
4.2. Energía cinética fluctuante acumulada en una descomposición POD.	73
4.3. Diagramas de fases. En a), b), c) se distinguen trayectorias para el sistema dinámico. En d), el ruido de las observaciones no permite retratar una trayectoria coherente.	74
5.1. Vista del túnel de viento.	86
5.2. Ilustración del principio de funcionamiento de la técnica PIV.	87
5.3. Sección de prueba del túnel de viento.	89
5.4. Generador de humo de kerosén.	89
5.5. Arriba: Imágenes típicas de una adquisición PIV. Abajo: Primeros resultados del algoritmo	92
5.6. Dimensiones principales del flujo.	93
5.7. Líneas de corriente del primer modo construido a partir de: a) 250 observaciones (línea roja); b) 1000 observaciones (línea azul). $Re = 125$	95

5.8. Esquema del actuador electrohidrodinámico. (a) Conexiones eléctricas para generar y medir la descarga DBD. (b) Geometría del actuador.	97
5.9. Relación entre la frecuencia de pulsos y la potencia del actuador.	98
5.10. Característica de tensión y corriente del actuador EHD.	99
5.11. Característica de tensión y corriente del actuador EHD.(continuación)	101
5.12. Visualización del flujo sin actuación. $Re = 125$	102
5.13. Secuencia de visualización para el flujo sin actuación a $Re = 125$. Se identifican los vórtices (azul) a partir de las líneas de emisión generadas por las trazas de las partículas de humo.	102
5.14. Líneas de corriente. Campo de velocidades medio. $Re = 125$	103
5.15. Líneas de corriente de los campos de velocidades medios bajo actuación mecánica. $Re = 125$	104
5.16. Líneas de corriente de los campos de velocidades medios bajo actuación mecánica. $Re = 125$ (<i>continuación</i>)	105
5.17. Visualización del flujo bajo actuación EHD. $Re = 125$	107
5.18. Visualización del flujo bajo actuación EHD. $Re = 125$	108
5.19. Visualización del flujo bajo actuación EHD. $Re = 125$	109
5.20. Líneas de corriente de los campos de velocidades medios bajo actuación EHD. $Re = 125$	110
5.21. Líneas de corriente de los campos de velocidades medios bajo actuación EHD, $Re = 125$ (<i>continuación</i>).	111
6.1. Campo de vorticidad instantáneo del flujo base. (a) Datos de salida PIV sin filtrado, (b) filtrados con POD . (c) Datos de la asimilación sobre la salida PIV.	118
6.2. Secuencias de campos de vorticidad instantánea para el flujo alrededor de un cilindro a $Re = 125$. (a) Filtrado Gappy POD. (b) Filtrado y asimilación de datos.	119
6.3. Campo de vorticidad instantáneo del flujo actuado por rotación, $\gamma = 1,42$. (a) Datos de salida PIV sin filtrado, (b) filtrados con POD . (c) Datos de la asimilación sobre la salida PIV.	121
6.4. Campo de vorticidad instantáneo del flujo alrededor de un cilindro a $Re = 125$, actuado mediante EHD, $f = 729Hz$. (a) Datos de salida PIV sin filtrado, (b) filtrados con POD . (c) Datos de la asimilación sobre la salida PIV.	122
6.5. Energía cinética fluctuante acumulada.	123
6.6. Primeros 4 modos fluctuantes de la descomposición POD del campo de velocidades del flujo alrededor del cilindro. Las líneas de corriente definen la dirección y sentido y los niveles la norma en cada caso.	124

6.7.	Primer modo temporal fluctuante del flujo alrededor de un cilindro a $Re=125$. (a) Comparación entre los datos (símbolos) y la primera curva de solución amortiguada (sólida). (b) Comparación entre los datos (símbolos) y la curva asimilada. (c) Comparación entre los datos (símbolos) y la solución de la ecuación diferencial(ODE) a partir de la asimilación.	125
6.8.	Para el flujo alrededor de un cilindro a $Re=125$. Trayectorias de los primeros dos modos temporales (<i>izquierda</i>). Trayectorias de los primeros tres modos temporales (<i>derecha</i>). (a) La solución pista (sólida) corresponde al amortiguamiento del sistema. Inicialmente, hay correspondencia con las 1000 observaciones (símbolo). (b) La asimilación corrige la solución pista. (c) La solución de la ecuación diferencial(ODE) a partir del resultado POD-Asimilación.	127
6.9.	Para el flujo actuado bajo rotación a $\gamma = 1,42$. alrededor de un cilindro a $Re=125$. Se comparan los datos y la solución de la ecuación diferencial tras la asimilación. (a) Trayectoria del primer modo temporal y (b) diagrama de fases de los tres primeros modos temporales.	129
6.10.	Primeros 4 modos fluctuantes de la descomposición POD del campo de velocidades del flujo para actuación a 729 Hz. Las líneas de corriente definen la dirección y sentido y los niveles la norma en cada caso.	130
6.11.	Primer modo temporal fluctuante del flujo alrededor de un cilindro a $Re=125$, actuado EHD $f=729$ Hz. (a) Comparación entre los datos (símbolos) y la curva asimilada. (b) Comparación entre los datos (símbolos) y la solución de la ecuación diferencial(ODE) a partir de la asimilación.	131
6.12.	Para el flujo alrededor de un cilindro a $Re = 125$, actuado EHD a 729 Hz . (a) La asimilación de la solución pista. (b) La solución de la ecuación diferencial(ODE) a partir del resultado POD-Asimilación.	132
6.13.	Modo de control espacial extraído mediante la base POD extendida.	136
6.14.	Nivel de energía cinética contenido en el modo de control en los 4 casos de flujo actuado con desprendimiento.	136
6.15.	Potencia eléctrica adimensionalizada χ en función de la rotación mecánica γ	139

Introducción

Objetivos generales y específicos

La capacidad de manipular un escurrimiento en forma activa reviste gran importancia tecnológica y económica y es por ello que allí se dirige gran parte del trabajo científico en mecánica de fluidos. Asimismo, la necesidad de obtener mejores prestaciones aerodinámicas ha sido, desde hace más de un siglo, motor de progreso en la ingeniería mecánica. La creciente demanda energética en nuestro país y en el mundo requiere respuestas de la investigación tanto en el campo de la generación como en el del ahorro de energía. Se espera desde el presente estudio, realizar una contribución en este sentido.

Ante todo conviene definir qué es lo que se entiende por control de escurrimientos. El control sobre un flujo incluye todo mecanismo o proceso a través del cual se causan modificaciones sobre el mismo de forma que su comportamiento difiere del que se desarrolla en ausencia de control. Podemos citar a Prandtl(1904) como pionero del control en fluidodinámico. En los albores de la teoría de la mecánica de fluidos, introdujo la teoría de capa límite, explicó los mecanismos del fenómeno de separación de un flujo respecto a un cuerpo y describió varios experimentos en los que dicho fenómeno fue controlado.

A partir de la obra de Gad-el-Hak et al.(1998)[46] se han establecido los fundamentos de la moderna teoría de control aplicada a la mecánica de fluidos. Se enuncian allí diversas clasificaciones para el control de flujos, la primera de ellas distingue la forma en que se aplica desde un punto de vista energético. En efecto, control activo se define como aquél que requiere una fuente de energía externa para llevarse a cabo. Numerosos ejemplos de la vida cotidiana pueden hallarse desde la simple apertura manual en el control del caudal que sale de una canilla, hasta la observación del sofisticado diseño de la acción de los *flaps* en las alas de un avión, que modifican la fuerza de sustentación. Contrariamente, controles pasivos no requieren gasto energético alguno. Son ejemplos de control pasivo: el control de la pérdida de carga en una cañería a proyectar mediante el diseño de su diámetro o de su rugosidad; las sucesivas modificaciones de la forma que ha tenido los au-

tomóviles desde su creación hasta nuestros días, etc.

Un aspecto destacable de los problemas de control en mecánica de fluidos es que la ley que interviene es la ecuación de la dinámica de los fluidos, el conjunto de ecuaciones de Navier Stokes. La resolución de las mismas es, hasta la fecha, uno de los grandes problemas de la Matemática. Se tienen soluciones exactas sólo para un conjunto muy reducido de problemas de sencillas condiciones de borde.

Las soluciones numéricas sin simplificaciones, requieren importantes recursos computacionales. A pesar de que se han podido analizar importantes problemas con simulación, la técnica aún se encuentra lejos de poder dar respuesta a problemas comerciales.

Paralelamente, el desarrollo computacional ha venido en ayuda de la experimentación en mecánica de fluidos. Nuevas técnicas de medida no intrusivas permitieron no sólo la acumulación sistemática de resultados sino también la generación de modelos para el análisis y el control. Es en parte gracias a ello que ocurrió un creciente interés y progreso en la formulación de modelos reducidos. Estos consisten en una reducción de las ecuaciones de Navier Stokes hacia una forma cuya solución es posible, partiendo de observaciones de un escurrimiento dado que pueden provenir tanto de la experimentación como de la simulación. Los modelos que resultan son herramientas que sirven a la interpretación y a la predicción aplicada en control activo.

Una forma particular de control activo es la utilización de actuadores electrohidrodinámicos. A partir de la introducción de descargas eléctricas en posiciones clave de un escurrimiento pueden lograrse importantes modificaciones. Los actuadores han sido estudiados bajo distintas configuraciones eléctricas(2004)[120] y en diversas situaciones de flujo.

Particularmente, nos interesaremos en el control del flujos en estelas de cuerpos pues constituyen un referente para una gran cantidad de aplicaciones de la ingeniería como lo son el transporte terrestre y aéreo, turbinas y compresores, generadores eólicos, intercambiadores de calor, estructuras civiles, etc. Entre las distintas geometrías a estudiar, la del cilindro es la más extendidamente utilizada en la materialización de estos flujos.

Es, en suma, objeto principal del presente trabajo, el desarrollo y la aplicación de los modelos reducidos en el estudio al flujo externo a un cilindro controlado con actuadores electrohidrodinámicos.

El presente trabajo se organiza de la siguiente manera, a continuación, en el Capítu-

lo 3 será estudiada la técnica POD que brindará los elementos para el planteo de los modelos reducidos basados en datos experimentales, que se realizará en el Capítulo 4. La base teórica de estos desarrollos se detalla en el Apéndice A.

La descripción del equipamiento necesario para efectuar las experiencias, y los primeros resultados experimentales serán presentados en el Capítulo 5. Por último, en el Capítulo 6 se analizarán los resultados relativos a la aplicación de modelos reducidos a los datos provenientes de las medidas experimentales. A partir de ello, se analizará un esquema de control y optimización basado en las técnicas desarrolladas a lo largo del trabajo.

Capítulo 1

Flujo en estudio: estela de un cilindro

1.1. Introducción

El flujo viscoso externo alrededor de un cilindro representa un flujo prototipo de gran interés para la fluidodinámica. Buena parte de los estudios de flujos en estelas de cuerpos romos han sido realizados sobre cilindros, gracias a su simple geometría y el comportamiento característico referente de los flujos de separación de la capa límite.

El estudio de este problema simple permite aprovechar en gran medida la bibliografía acumulada de anteriores trabajos y experiencias, a la vez que sirve como base para aplicaciones sobre problemas más complejos. Sin embargo, un problema sencillo como éste aún no consigue una solución ni exacta ni numérica cuando involucra regímenes de alta turbulencia. En efecto, la simulación numérica directa (DNS) aún resulta muy costosa en tiempo y no logra reproducir los regímenes en los que se desarrollan la mayor parte de las aplicaciones prácticas. De todas formas, incluso reduciendo los costos computacionales, conseguir la mera simulación de un escurrimiento en estas condiciones no apareja necesariamente su comprensión debido a las dificultades de interpretar de forma sencilla el carácter tridimensional y no estacionario del flujo.

Repasaremos entonces, los fundamentos del flujo alrededor de un cilindro antes de avanzar en el desarrollo de su control. Por empezar, distinguimos tres regiones fundamentales desde donde se originan, además de la corriente libre incidente, los distintos fenómenos para este flujo. Se muestran en la Figura 1.1, éstas son: las capas límite formadas en la superficie del cilindro (ii); las capas de corte, regiones de flujo separado y acelerado (iii); la estela del cilindro (iv). La mayor parte de la

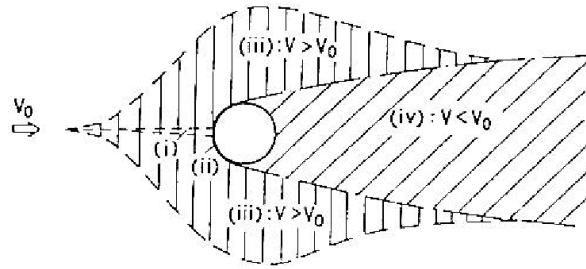


Figura 1.1: Regiones del flujo perturbado.(Zdravkovich (1997)[145])

investigación se centra en el estudio de estas regiones. Por otro lado, el estudio de la región señalada como (i) en el dibujo, llamada de flujo retardado o estancado, tiene solución en general conocida. Ésta puede presentar alternativas en casos en los que el flujo incidente es no estacionario. En base a las dimensiones del problema se define al número de Reynolds, $Re = \frac{UD}{\nu}$. Siendo U la velocidad del flujo incidente, D el diámetro del cilindro y ν la viscosidad cinemática.

1.2. Formación de vórtices

El conocimiento del fenómeno de desprendimiento de vórtices es particularmente importante en múltiples aplicaciones. Se puede destacar entre ellas el arrastre y la sustentación en cuerpos, el transporte de calor, las vibraciones, el ruido, etc.

Son varios los mecanismos de formación de vórtices, como permite ilustrar la Figura 1.2 respecto al fenómeno en su fase inicial, en el flujo externo al cilindro. Se muestra la zona inmediatamente cercana a la pared (región ii de la Figura 1.1), la capa límite, donde se concentran los efectos de la viscosidad de un flujo. La secuencia de imágenes corresponde al fenómeno conocido como separación de la capa límite, que es función de la distribución de presiones a lo largo de la capa límite. La distribución de presiones en el caso no separado se ilustra en la Figura 1.3. Se observa cómo el escurrimiento sufre una aceleración desde el punto de estancamiento D hasta el punto E. Asimismo, la curva de distribución de presiones indica cómo el flujo se frenaría desde E hacia F si no hubiera separación, la misma corresponde a un modelo no viscoso o potencial. En el flujo real, a la desaceleración debida al campo de presiones se suma la pérdida de cantidad movimiento por fricción viscosa en la pared del cuerpo. La energía cinética de las partículas fluidas llega a ser luego insuficiente para seguir la trayectoria potencia y el flujo se separa en el punto S. Como señaláramos, nos interesamos especialmente en flujo en la estela del cuerpo,

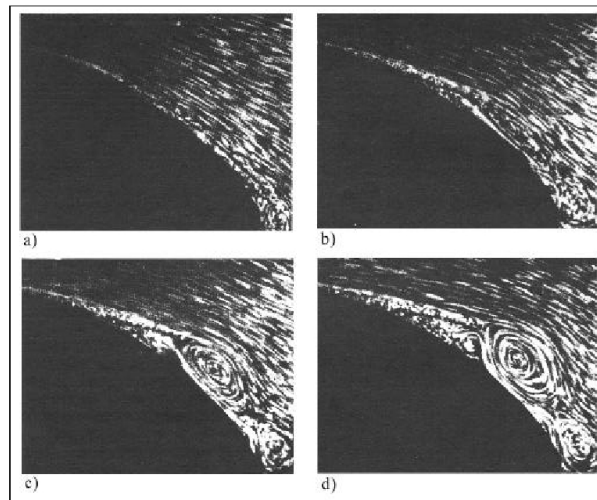


Figura 1.2: Formación de vórtices primaria.(Schlichting (1978)[114])

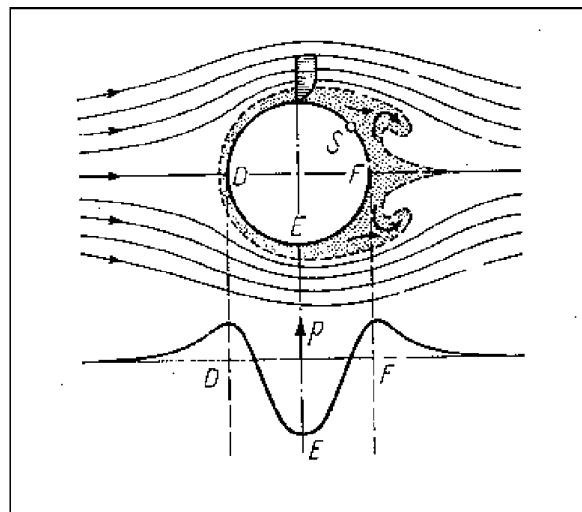


Figura 1.3: Mecanismo de separación de la capa límite.(Schlichting (1978)[114])

caracterizado por la formación y desprendimiento de vórtices. Este proceso será estudiado con mayor detalle luego de breve repaso de los regímenes de flujo externo a un cilindro.

1.3. Regímenes de escurrimiento

Los distintos regímenes que pueden tener lugar en el flujo alrededor de un cilindro se clasifican en función del número de Reynolds. Según Williamson(1996)[142], se distinguen:

- I. Régimen sin separación ($Re < 5$). Para bajos valores de Re , no ocurre separación de la capa límite, luego no se produce ni formación ni desprendimiento de vórtices.
- II. Régimen laminar permanente ($5 < Re < 49$). En este intervalo se genera un par de vórtices fijos y simétricos en la estela del cilindro, formando una región de recirculación detrás del cilindro. La región, llamada también burbuja en la bibliografía, aumenta de tamaño para Re crecientes.
- III. Régimen de desprendimiento laminar de vórtices $49 < Re < 190$. Comienzan a desarrollarse inestabilidades en la región de recirculación. La amplificación de éstas se manifiesta en la estela, señala Williamson[142], y el proceso se ajusta a un fenómeno de Bifurcación de Hopf que ampliaremos en 1.4. El desprendimiento de vórtices produce una fuerza de sustentación, de media cero, que cambia en el tiempo periódicamente de acuerdo a la frecuencia de aparición de los mismos. El límite superior para este régimen encuentra diferencias entre los autores: Williamson define un subintervalo $140 < Re < 194$ para la transición al próximo régimen. Por otra parte, Blevins(1997)[12] propone el valor de 150, en tanto que Sumer Fredsoe(1997)[123], 200. Asimismo, para Zdravkovich(1997)[145] la transición se produce en el rango $180 < Re < 200$.
- IV. Régimen de transición en las capas de corte $200 < Re < 3 \cdot 10^5$. En este régimen, en la región de la estela el flujo es completamente turbulento. Sin embargo, en la zona de separación el flujo continúa siendo laminar. Un fenómeno de transición hacia la turbulencia ocurre en las capas de corte. Como consecuencia de la complejidad del escurrimiento, comienzan a desarrollarse estructuras tridimensionales
- v. Régimen de desprendimiento asimétrico, $3 \cdot 10^5 < Re < 3,5 \cdot 10^5$. En esta estrecha franja de Re , la región de transición a la turbulencia se desplaza desde las capas de corte hacia el punto de separación de la capa límite. El desplazamiento no es completamente simétrico y por ello, cíclicamente, mientras

un lado de la superficie del cilindro deviene turbulenta, la otra permanece laminar. Los puntos de separación de la capa límite son entonces asimétricos y cambian alternativamente. Se observa una fuerza de sustentación cambiante en función del tiempo.

- VI. Régimen de desprendimiento simétrico $3,5 \cdot 10^5 < Re < 1,5 \cdot 10^6$. Se alcanza el régimen turbulento en la capa límite en ambos puntos de separación. El punto de desprendimiento es simétrico. El tamaño de la zona de recirculación y del ancho de la estela disminuye sensiblemente.

En nuestro caso, el estudio experimental se ha realizado para bajos números de Re , dentro del régimen de desprendimiento laminar de vórtices y en estados perturbados del mismo. Lo describiremos entonces con mayor detalle a continuación.

1.4. Desprendimiento laminar de vórtices

Como señalamos, el régimen comienza alrededor de $Re = 49$, la estela que continúa luego de la región de recirculación comienza a oscilar y el flujo se desestabiliza como se ilustra en la Figura 1.4. Según Provansal(1987)[101] el fenómeno se explica como una bifurcación de Hopf¹.

Un nuevo régimen de flujo se establece entonces, caracterizado por un desprendimiento regular de vórtices de signo opuesto, de una y otra parte del cilindro. Las sucesivas posiciones que ocupan los vórtices se denomina camino de Bénard-von Karman. Un número adimensional puede ser definido a partir de la frecuencia de desprendimiento, llamado número de Strouhal, $St = fD/U$. En este régimen, St varía en función del número de Reynolds como indica la Figura (1.5).

Puede observarse que a partir de $Re > 180$ se observa una discontinuidad para $St(Re)$. Experimentalmente se comprobó que el desprendimiento resulta ser un fenómeno tridimensional pues comienza éste a ser oblicuo con respecto al eje del

¹ Si pensamos al flujo como a un sistema dinámico (ver Capítulo 4) y al número de Reynolds como un parámetro del mismo, en el espacio de las fases, el estado estable para $Re < 49$ corresponde a un punto fijo, la primera de las fotos de la secuencia de la Figura 1.4. El sistema tiende a dicho punto ante pequeñas perturbaciones, el estado de equilibrio final no depende del tiempo. Con el aumento del número Reynolds, las pequeñas perturbaciones dejan de amortiguarse y, por el contrario, se amplifican. Dado que en un sistema físico, la energía cinética no puede aumentar indefinidamente, la amplificación es acotada y da lugar a una trayectoria periódica en el espacio de las fases. Ésta se corresponde con el flujo con un desprendimiento alternativo de vórtices. La periodicidad corresponde, en el lenguaje de sistemas dinámicos, a un ciclo límite, lugar geométrico de los distintos estados del escurrimiento. El proceso de cambio de estabilidad de un sistema dinámico desde un punto fijo a un ciclo límite estable se denomina bifurcación supercrítica de Hopf.

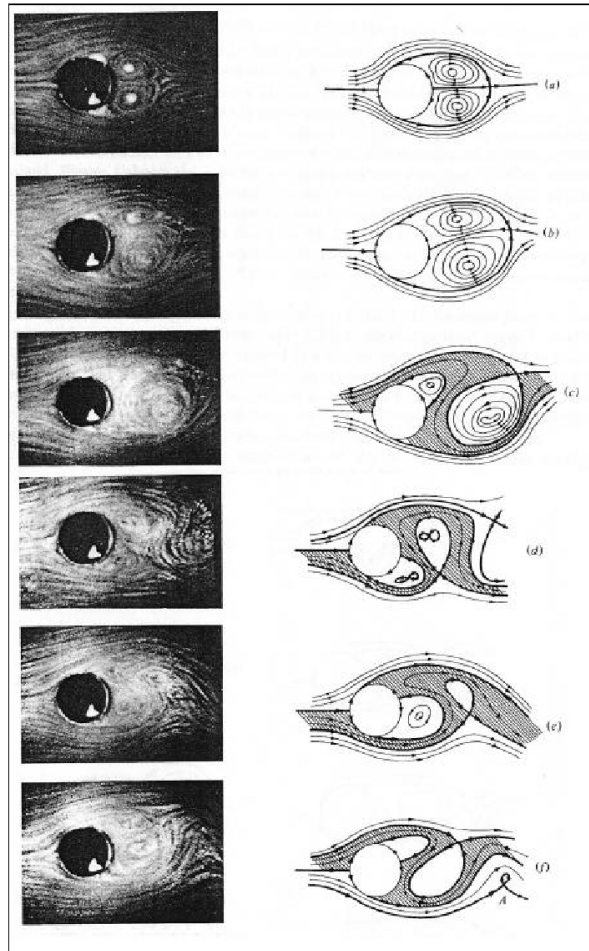


Figura 1.4: Formación de los vórtices von Karman. Visualización y esquema de Perry et al.(1982)[96]

cilindro. La relación entre la longitud y el diámetro de un cilindro, L/D así como también las condiciones en los extremos del cilindro son causas del pasaje del flujo de dos a tres dimensiones. Williamson (1988)[141] fue el primero en explicar la dispersión existente en las medidas de St en el régimen de desprendimiento laminar, producida por una transición de un modo de desprendimiento oblicuo hacia otro. En [141], Williamson considera que el desprendimiento paralelo es el de referencia, al que le asocia un Strouhal de referencia que indica como St_r .

Cualquier desprendimiento oblicuo posee un Strouhal que designa como St_o puede ser transformado en el modo de desprendimiento paralelo St_r a partir de la relación $St_r = St_o \cos \beta$, donde β es el ángulo entre el filamento de vórtices y la dirección del eje del cilindro.

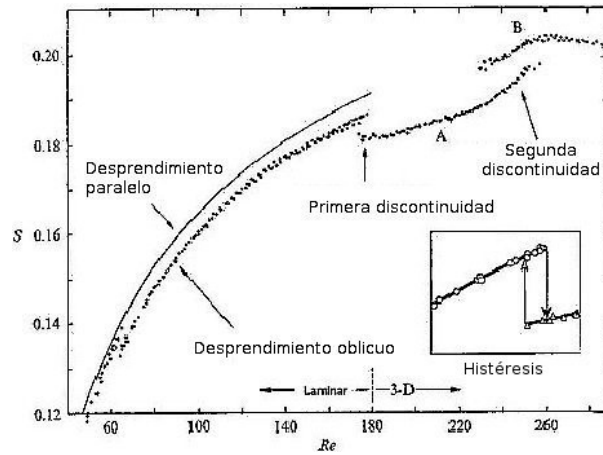


Figura 1.5: Evolución del número de Strouhal en función de Reynolds. (Williamson (1996) [142])

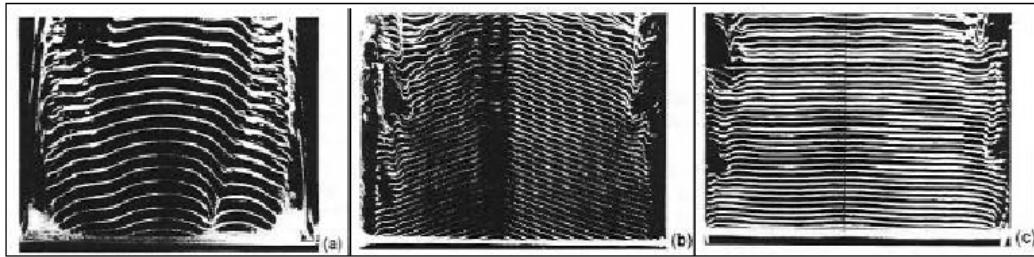


Figura 1.6: Visualización de diferentes modos de desprendimiento laminar (Williamson (1988)[141])

También Fey et al.(1998)[43] muestran que la evolución del número de Strouhal en función del número de Reynolds es consecuencia de la tridimensionalización del flujo en la estela. De su artículo, se tiene la correlación para la relación $St(Re) = 0,2684 - 1,0356/\sqrt{Re}$.

Una aplicación del conocimiento de la ley para el número de Strouhal es la sugerida por Roshko (1953)[108], como herramienta para ser utilizada en la medición de muy bajas velocidades a partir de St . La misma sirvió en el desarrollo de nuestras experiencias.

1.5. Régimen de Transición laminar

La primera discontinuidad que se observa en la Figura 1.5, marca la transición del régimen laminar a la turbulencia, sucede para $Re > 180$. En esa circunstancia, el desprendimiento pasa a ser tridimensional, en la forma llamada modo A de desprendimiento (1996)[143]. El origen de este comportamiento se debe a la inestabilidad en el alineamiento de los centros de los vórtices primarios. Estas estructuras son deformadas como ondas en dirección perpendicular al eje del cilindro. En la Figura 1.7 puede observarse la formación de una estructura longitudinal, llamada por Williamson bucle de vórtice de modo A.

La escala de longitud en la dirección del flujo de estos bucles es de aproximadamente 3 a 4 diámetros.

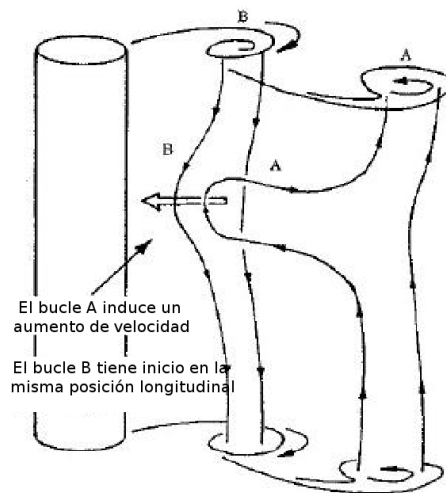


Figura 1.7: Inestabilidades de modo A. Williamson (1996)[143]

La discontinuidad en la frecuencia de desprendimiento de vórtices producida por el modo A es un fenómeno de histéresis, propiedad que puede verificarse para distintos Re según la trayectoria que se siga en una experiencia. Es así, por ejemplo, que la discontinuidad puede observarse aumentando paulatinamente Re desde el régimen laminar en un conjunto de mediciones, para un valor Re_1 . Si se deseara volver a las condiciones iniciales disminuyendo Re no puede asegurarse que la medida de la discontinuidad Re_2 sea igual que Re_1 . El proceso se señala en la Figura 1.5.

Cuando el número de Reynolds aumenta hasta el rango 230-260, ocurre una segunda discontinuidad para las curvas de $St(Re)$. Esta se identifica con la aparición de un modo B de desprendimiento. En efecto, consecuencia de la aparición de vor-

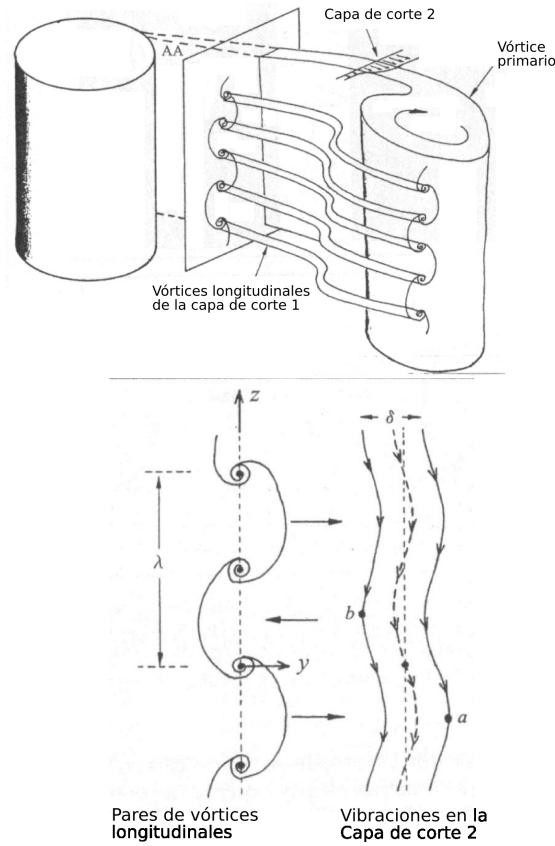


Figura 1.8: Inestabilidades de modo B. Williamson (1996)[143]

ticidad longitudinal inducida por el modo A, se producen inestabilidades en las capas de corte. Puede apreciarse en el esquema detallado en la Figura 1.8, que aparecen ondulaciones en las capas de cortes provocadas por vórtices longitudinales. La escala de estas nuevas estructuras es mucho más pequeña que aquella asociada al modo A. Se reconoce una longitud de onda en las capas de corte cuya longitud λ resulta del orden del diámetro del cilindro D . Asimismo, los ensayos han demostrada que, a diferencia de lo que ocurre con el modo A, este mecanismo no presenta histéresis. El resultado final de este proceso es la aparición de un nuevo régimen hacia $Re \sim 300$ caracterizado por la transición en las capas de corte.

1.6. Estructuras coherentes

Según la concepción puramente estadística de la turbulencia, la agitación turbulenta se compone de estructuras de vórtices cuyos tamaños se reparten continuamente

entre un máximo dado por la geometría del problema en estudio, y un mínimo dado por la escala de disipación viscosa. Éste último conjunto de vórtices, en interacción mutua, confiere el movimiento de agitación aleatoria, incoherente, en el cual no es posible distinguir una organización precisa.

El concepto de *estructura coherente* ha sido fundamental en la investigación de la turbulencia en la mecánica de fluidos. Se trata de estructuras presentes en un escurrimiento turbulento que poseen un movimiento cuasideterminístico, al contrario de las estructuras incoherentes, que tienen un carácter puramente aleatorio. Esta noción, fue sugerida primeramente por Townsend (1956)[133] en el contexto de flujos en capas de corte, en la observación de regiones de grandes escalas de movimiento organizado. En la época de esas primeras observaciones (1955) se podía contar sólo con mediciones puntuales, de las cuales difícilmente podían extraerse resultados sobre la forma y distribución de vórtices coherentes. Posteriormente éstos trabajos fueron complementados por los aportes de Brown y Roshko[107], quienes identificaron en el flujo de capas de corte a altos números de Reynolds, estructuras coherentes a partir de visualizaciones del escurrimientos. La identificación visual condujo a la construcción de modelos físicos *a priori* de las medidas sobre los escurrimientos.

A partir de los años 80, el desarrollo tanto de la capacidad computacional como de la técnica de medidas ha contribuido a la posibilidad de identificación y a la comprensión de los mecanismos de formación e interacción mutua de las estructuras coherentes. A continuación se describen estos resultados.

1.6.1. Definiciones

Los investigadores aún no se han puesto de acuerdo sobre la definición precisa de estructuras coherentes. A causa de ello, se tienen los distintos métodos matemáticos de detección y análisis de estructuras coherentes. Podemos citar:

- Según Hussain[61], una estructura coherente es un dominio donde la vorticidad instantánea presenta un alto nivel de correlación espacial.
- Para Lumley[60], una estructura coherente corresponde a un objeto espacio temporal cuya proyección sobre el campo de velocidades del escurrimiento es máxima en el sentido de mínimos cuadrados.
- Para Lesieur[74], un dominio que contiene una concentración de vorticidad local será considerado como coherente si conserva una forma reconocible durante un tiempo suficientemente largo (del orden de 5 veces) comparado con su período de recurrencia.

- Weiss[135] propuso como definición, regiones elípticas en un flujo donde la rotación domina la deformación. Este concepto supone que el tensor de velocidad de deformación varía lentamente, en espacio y tiempo, comparado con gradientes de vorticidad.

A pesar de la discrepancia en las definiciones, existe el interés común y la aceptación de que, a partir del estudio de las estructuras coherentes de un escurrimiento, pueden deducirse numerosas propiedades físicas tales como: el arrastre y la sustentación en cuerpos, el transporte de calor, las vibraciones, el ruido, la mezcla turbulenta, etc. También se acuerda en que la comprensión de su dinámica, su morfología y la forma en la que interactúan unas estructuras con otra es clave a la hora de plantear la optimización o el control en los problemas.

1.6.2. Métodos de identificación

Para tener un panorama completo de éstos métodos puede consultarse el artículo de Bonnet et al[13]. El método mas sencillo a llevar a cabo es el del tratamiento de medidas en un punto. Los estudios espectrales, cálculos de momentos o de densidad de probabilidad posibilitan acceder a informaciones globales como las frecuencias características, las separaciones o la intermitencia en fenómenos de transición.

Un primer desarrollo de técnicas de medida permitió llevar a cabo medidas sistemáticas en dos o más puntos logrando acceso a correlaciones espacio-temporales en el flujo. En un trabajo precursor, Townsend (1956)[133] se sirvió de un modelo analítico sobre estructuras de vórtices para validarlo mediante las correlaciones espacio-temporales en un flujo de capa de corte. Éste método presupone el conocimiento a priori del escurrimiento para poder extraer las estructuras coherentes. La técnica de reconocimiento de patrones fue introducida por Mumford(1982) y refinada posteriormente por varios autores, entre ellos el trabajo de Ferré y Girault 1989 citado por Bonnet (1998) en [13]. La técnica es un proceso iterativo que posibilita determinar el promedio muestral² de la estructura coherente y detectar los patrones incorporados en las series temporales. El proceso comienza desde una grilla inicial con una supuesta localización de una estructura coherente. Con análisis de correlaciones, se logra hacer converger la grilla para obtener la localización final. El método requiere, evidentemente, un conocimiento previo de la estructura coherente, que puede lograrse con visualización.

El muestreo condicional es la técnica que ha estado relacionada con la tradicional definición de estructura coherente dada por Hussain. Consiste en la elección, en alguna región del escurrimiento, de señales de referencia, a las cuales se les aplica un criterio para determinar los instantes que corresponden a la presencia de un

²Esto es, pensando a la medida como una variable aleatoria perteneciente a un espacio de muestreo

evento dado. Varios enfoques han sido considerados dependiendo en la variable de referencia considerada (velocidad, vorticidad, presión, ...).

Como en algunos casos, las estructuras coherentes se confunden con las estructuras de mayores escalas en un escurrimiento, se ha considerado el empleo de filtros óptimos como herramienta de identificación. Los casos que pueden tratarse son aquellos que presentan una gran concentración de energía para determinadas frecuencias. Esta ha sido la propuesta de trabajos como el de Brereton y Kodal (1994)[19] o bien el de De Souza et Al.(1999)[37]. En éste último trabajo, se utilizaron técnicas de filtrado basado en frecuencia dominantes extraídas mediante Análisis de Fourier. El esquema funcionó eficazmente pues la estructura coherente se hallaba bien localizada en el dominio de las frecuencias, como ocurre cuando se estudian desprendimiento de vórtices del tipo Kelvin Helmholtz. Los autores señalan, no obstante, que la técnica es en general ineficiente para flujos más complejos.

El método de estimación estocástica lineal fue introducido por Adrian (1979)[2] en su estudio sobre turbulencia isotrópica. Se utiliza información en uno o más puntos, conjuntamente con su estadística para estimar información en otras ubicaciones en el escurrimiento. La técnica se halla en conexión con la descomposición en modos ortogonales(POD). Según Holmes (1996)[60] puede ser vista como un modelo de función densidad de probabilidad basado en POD. El artículo de Bonnet et al. (1998)[14] muestra la relación entre ambos métodos en el análisis de capas de corte.

La descomposición en modos ortogonales, introducida por Lumley (1968)[77] en el contexto de turbulencia, consiste en la identificación de estructuras coherentes cuya proyección de energía cinética sobre el escurrimiento es máxima. El enfoque, de rápida convergencia, no requiere conocimiento a priori del flujo. La técnica se adapta a distintos tipos de medidas, sean éstas un conjunto limitado de sondas con gran resolución temporal o bien, medidas de buen muestreo espacial pero menor resolución en el tiempo. Ampliaremos suficientemente en el capítulo 3.

Mencionaremos por último, la extracción de estructuras coherentes a partir de la transformada Wavelet. El trabajo de Farge (1999)[41] considera especialmente la definición de estructura coherente de Weiss. La noción de coherencia la prefiere ligada a la medida de la vorticidad más que a la de la velocidad. Discute especialmente la consideración de las pequeñas estructuras como parte del flujo incoherente, hipótesis de varios métodos, entre ellos el de POD. En un más reciente trabajo, Farge (2003)[42], compara la capacidad de extracción de vórtices en un flujo turbulento homogéneo tridimensional entre wavelets y POD. La técnica Wavelet resulta de mayor eficiencia en el problema ya que logra reproducir con un menor número de funciones base o modos la dinámica del escurrimiento.

1.7. Conclusiones

Se ha presentado a lo largo del Capítulo el contexto donde se ubica nuestro trabajo de investigación. Se ha estudiado brevemente el problema del flujo alrededor de un cilindro a partir de recientes publicaciones. A partir de las nociones de estructuras coherentes que se exponen en la literatura, hemos elegido trabajar con el modelo POD en nuestro trabajo por las siguientes razones. En primer lugar, en la práctica es mucho menor el costo computacional de emplear POD frente al método de Wavelets. Además, hay un conjunto de problemas en los cuales no se dan las características de flujo turbulento homogéneo, en los que el modelo POD funciona correctamente. Pueden citarse trabajos sobre flujos en capa límite Rempfer (1996)[106], jets Gordeyev et al. (2002)[51], Glaze et al. (2003)[50], flujos en cavidades Cazemier et al. (1998)[20], flujo alrededor de un cilindro Deane et al. (1991)[34], Xia et al. (2002)[144], Noack et al. (2003)[87] (2005)[11], en capas de corte Rajaei et al. (1994)[103], Braud (2003) (2004)[17][18], Perret et al. (2005)[94], flujo compresible Vigo (2000)[127], modelado de turbomáquinas Willcox (2000)[138], etc.

Particularmente, el escurrimiento alrededor de un cilindro con baja turbulencia puede ser descripto por muy pocos modos según Deane et al. (1991)[34], como verificamos en el desarrollo basado en datos de simulación numérica DNS (2005)[33]. La elección del método también depende del método de medición PIV³ que adoptamos. Como detallaremos, la resolución que brinda nuestro equipo de PIV no permite la obtención de las escalas pequeñas del escurrimiento. Al utilizar POD, estas estructuras son descartadas por un criterio energético mientras que en un planteo con wavelets, las pequeñas estructuras no deberían ser necesariamente descartadas del modelo.

La descomposición POD es suficientemente eficiente para el flujo que estudiamos. Asimismo, numerosos trabajos en control se sirven de la técnica en la construcción de sistemas de ecuaciones ordinarias Ravindran (2002)[105], Homescu et al. (2002)[59], Protas y Wesfreid (2002) [98], Siegel et al. (2003)[117], Noack et al. (2004)[90], etc.

³Véase su descripción en la sección 5.3

Capítulo 2

Control del escurrimiento alrededor de un cilindro

2.1. Introducción

El flujo alrededor de un cilindro sirve como banco de pruebas para el estudio y el control sobre flujos en estelas de cuerpos romos. Asimismo, la geometría del cilindro se ajusta a muchos casos de aplicaciones directas de la fluidodinámica. Entre las acciones de control activo que se han ejecutado hasta la fecha, destacamos en primer lugar la rotación del cilindro sometido al flujo uniforme. También se han realizado distintos trabajos empleando succión e inyección de fluido sobre la superficie. Por otra parte, el calentamiento y el enfriamiento localizado de la superficie de los cuerpos en cuestión, han sido utilizados como método alternativo de control. Más recientemente, se han proyectado nuevas experiencias con actuación electrohidrodinámica en el entorno de la superficie, cuyos efectos son objetos de recientes investigaciones.

A continuación, describiremos algunos elementos esenciales de la actuación sobre flujos alrededor de cilindros.

2.2. Dispositivos de control activo.

2.2.1. Rotación uniforme del cilindro

El primer trabajo de control del que se tiene noticia fue publicado por Gustav Magnus en 1853 para explicar la desviación de proyectiles debido a fuerzas aerodinámicas. Los proyectiles, de geometría asimilables a la de un cilindro, sometidos a rotación en su impulsión, experimentan una fuerza de sustentación cuando atraviesan un flujo uniforme. En una época donde la teoría de la Mecánica de Fluidos

no contaba con sólidas bases, el fenómeno fue llamado *efecto Magnus*. Puede lograrse una primera estimación de la fuerza de sustentación que experimenta un cilindro a partir de la teoría de Flujo Potencial como una aplicación del teorema de Kutta Joukowski. Según esta teoría, el coeficiente de sustentación¹ para un cilindro que rota $c_L = 4\pi$. No obstante, el resultado se aleja de lo que experimenta el flujo real debido a una serie de factores. Estos son:

- I. La distribución de presión es simétrica solamente relativa al eje paralelo al flujo uniforme.
- II. Siempre ocurre separación del flujo.
- III. el punto de estancamiento posterior descrito por la teoría potencial no existe a causa de la separación.
- IV. Existe siempre una considerable fuerza de arrastre.

Después de las experiencias de Magnus, Prandtl (1925)[145] condujo una serie de experimentos para determinar los cambios introducidos por la rotación de un cilindro (Figura 2.1).

Entre otros resultados, determinó que la máxima sustentación que puede experimentar el cilindro es $c_L \leq 4\pi$. Estudió además los efectos de borde y de la relación L/D sobre este valor. Dichos valores serían más adelante discutidos y origen de nuevas investigaciones.

Tempranas aplicaciones del cilindro rotativo, o *rotor*, fueron las efectuadas por Flettner(1925) y Madaras(1931). El primero, construyó un buque propulsado por rotores (Figura 2.2). El buque probó ser confiable y eficiente pero, en la época del diseño, no pudieron competir comercialmente con los barcos de propulsión a motor². Flettner propuso también por entonces un generador eólico basado en el efecto Magnus. Por la misma época, Madaras(1912) comenzó su proyecto de un generador de energía basado en una serie de rotores. El modelo tuvo poca fortuna pues al ensayarse el prototipo (Figura 2.2), éste sufrió la acción de fuertes vientos que lo derribaron. La compañía que financiaba el proyecto, Detroit Edison Co., desistió de esta forma de generación.

Después de Prandtl, numerosos estudios se han llevado a cabo desde entonces sobre el flujo alrededor de un cilindro con rotación, un compendio de los cuales presentan Chew et al. (1995)[28]. Uno de los temas de interés de investigación es el de la estimación de la máxima sustentación que puede lograrse en este tipo de flujos.

¹El coeficiente de sustentación para un cilindro $c_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho U^2 LD}$, donde F_L es la fuerza de sustentación.

²Jaques Cousteau y la sociedad Cousteau utilizaron un barco similar, llamado Calypso II, para la exploración oceanográfica durante la década de 1990.

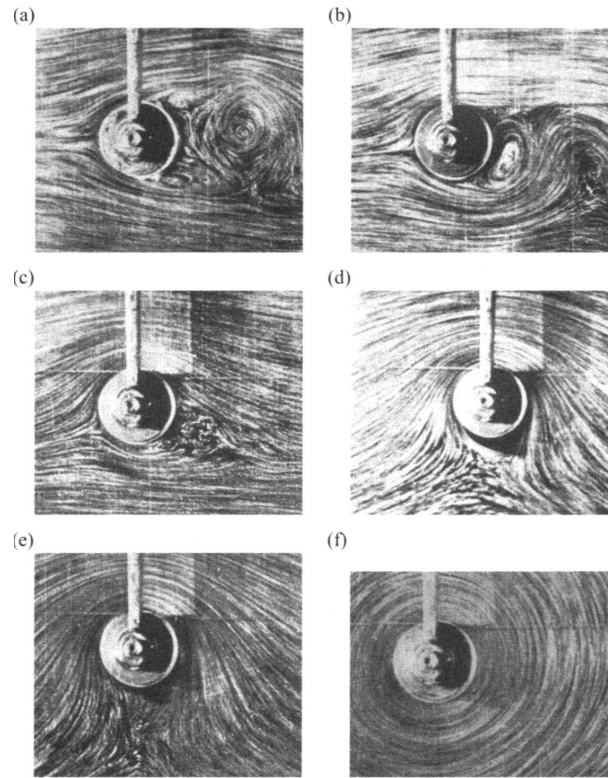


Figura 2.1: Visualización del flujo a $Re=4000$ alrededor de un cilindro que rota con velocidad tangencial U_r . (a) $U_r/U \rightarrow 0$, (b) $U_r/U = 1$, (c) $U_r/U = 2$, (d) $U_r/U = 4$, (e) $U_r/U = 6$, (f) $U_r/U \rightarrow \infty$

Una de las fuentes de discrepancia es la dificultad de realizar medidas debida a las limitaciones impuestas por la rotación del cilindro. Tokumaru et al.(1993)[131] demostraron para resultados $Re = 3800$ que para una rotación adimensional³ $\gamma = 10$ y una relación entre el largo y el diámetro del cilindro $L/D > 18,7$ el límite $c_L = 4\pi$ es superado en un 20 %.

Otro aspecto para analizar es la variación de la frecuencia de desprendimiento de vórtices a causa de la rotación. Existió un relativo desacuerdo al respecto, para valores de $\gamma < \gamma_L = 1,91$, Chew et al.(1995)[28], Diaz et al.(1983), Kimura y Tsutahara (1991) y Jaminet y Van Atta (1969)[66] muestran que St aumenta con γ . Por otra parte, Hu et al(1996) y Kang y Choi(1999) reportan que St disminuye con γ .

Éstos y otros aspectos del flujo alrededor de un cilindro rotativo motivaron el trabajo de Mittal y Kumar (2003)[85], de simulación numérica validada por experiencias, que efectuaron un estudio para $Re=200$. Estos autores señalan que para

³Para una definición de éste parámetro véase la sección 5.6.2.

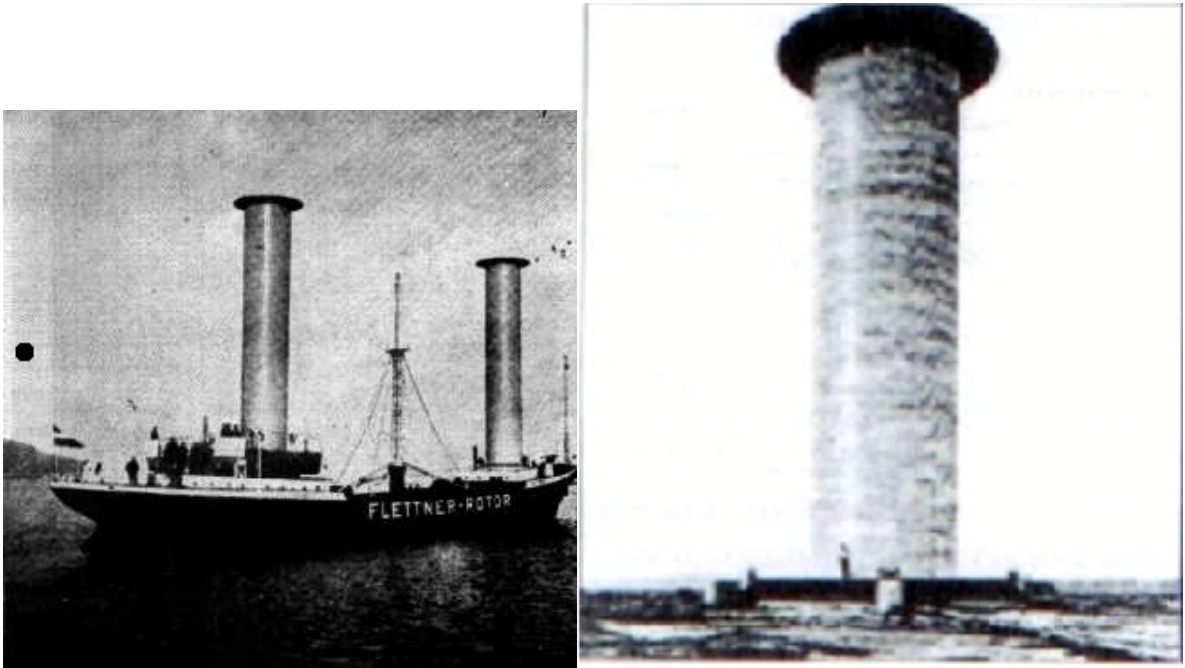


Figura 2.2: Buque con rotores. Flettner (1925)(*izquierda*). Vista del rotor del generador de Madaras (1931)(*derecha*)

número de Re mayores, los efectos tridimensionales, una probable causa del desacuerdo en cuanto a la relación $St - \gamma$, comienzan a tomar un rol más importante y deben incluirse. Realizan un análisis de estabilidad lineal en este régimen para determinar los valores entre los cuales hay desprendimiento de vórtices. Determinan el intervalo $0 < \gamma < 1,91$, donde el camino de vórtices de von Karman se estrecha y se desvía respecto del eje del cilindro paralelo al flujo incidente. Para determinar el intervalo sin desprendimiento $1,91 \leq \gamma \leq 4,34$, aplicaron un análisis de estabilidad. Dentro de este intervalo, los tiempos numéricos de extinción de las perturbaciones son relativamente muy largos. Es por ello que, en trabajos anteriores de simulación, algunos investigadores consideraron que continuaba el régimen desprendimiento. Para valores de $\gamma > 4,34$ se produce desprendimiento de una forma distinta, con frecuencias de desprendimiento mucho más bajas y desde sólo uno de los lados del cilindro. En cuanto a la variación del número de St , su resultado se muestra en la Figura 2.3 donde pueden observarse los intervalos de cada régimen mencionado.

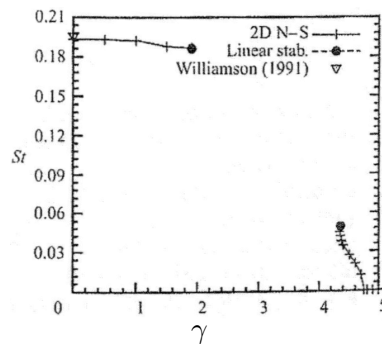


Figura 2.3: Variación de St con respecto a la rotación adimensional γ . Mittal y Kumar(2003)[85].

2.2.2. Control mediante oscilaciones del cilindro

Existe también otro tipo de control que se puede lograr a partir de rotaciones no uniformes del cilindro. Uno de los primeros intentos por implementar esta idea fue hecho por Taneda(1978), quien estudió la acción oscilatoria sobre la formación de vórtices detrás del cilindro (Figura 2.4). Más tarde, Tokumar y Dimotakis (1991)[132], unun aplicaron una señal sinusoidal simple para la rotación de un cilindro bajo el régimen $Re = 15000$ y lograron una notable modificación de la estela, incluyendo una importante supresión de desprendimiento de vórtices acompañada por una reducción del arrastre. El efecto de oscilaciones fue luego estudiado por varios investigadores. Filler et al. (1991)[44] estudiaron la respuesta de las capas de corte separadas respecto a oscilaciones de pequeña amplitud. Lu y Sato (1996)[76], y Shiels y Leonard estudiaron el problema de la dinámica de vórtices y su relación con el número de Re .

Más recientemente, Graham et al. (1997)[52][53], He et al. (2000)[57], Homescu et al. (2002)[59] comenzaron a utilizar la teoría de modelos reducidos para el diseño del control en este tipo de problemas. He et al. y Homescu et al. estudian el problema de optimización del control mediante funciones de rotación constantes y armónicas, sin pasar por la utilización de modelos reducidos basados en POD. Graham et al., propusieron un modelo basado en funciones POD con el objeto de reducir el nivel de intensidad de las fluctuaciones de los campos de velocidades asociadas al desprendimiento de vórtices. Plantean un sistema de lazo cerrado⁴ en el cual la excitación es la rotación angular, una función continua. La limitación

⁴En un sistema de lazo cerrado las variables de salida son comparadas con las variables de entrada al sistema de manera tal que se establece una acción de control como función de la diferencia entre la entrada y la salida. Por el contrario, un sistema de lazo abierto es aquel donde la salida no tiene efecto sobre la entrada.

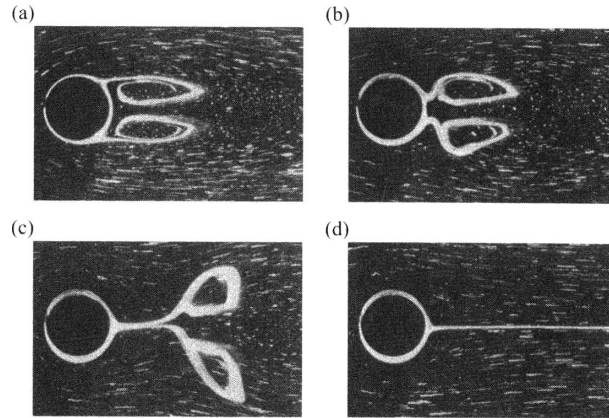


Figura 2.4: Modificación de los patrones de líneas de corriente al aplicar oscilaciones del cilindro a bajos Re . Taneda (1978)[145].

que encontraron los autores es la necesidad de refrescar las bases POD durante el lazo cerrado y la necesidad de un número relativamente grande de variables para representar al escurrimiento controlado.

El problema fue retomado, entre otros, por Protas y Wesfreid (2002)[98] quienes agregaron al modelo reducido POD una función estacionaria que llaman "modo cero". Este modo surge de la consideración de la solución estacionaria inestable del flujo alrededor de un cilindro. Para bajos Reynolds $Re = 150$, los autores suponen que el mecanismo debería conservarse para más altos Reynolds, realizan la optimización del flujo a partir de funciones armónicas en pos de reducir el arrastre a un mínimo. El modo cero⁵ otorga estabilidad a su sistema dinámico de lazo abierto. Con la incorporación del modo cero, Gerhard et al. (2003)[48] condujeron el diseño de un sistema de control basado en la acción de fuerzas volumétricas incluidas en un modelo reducido POD. Noack et al. (2004)[89][90] trabajaron sobre la construcción de modelos reducidos POD para el control de lazo cerrado con la incorporación de fuerzas volumétricas así como también oscilaciones armónicas, con el objeto de suprimir los desprendimientos de vórtices. Bergmann et al. (2005)[11] trabajaron sobre el mismo objetivo utilizando modelos reducidos POD. En su estudio, el empleo de optimización sobre una función armónica de las oscilaciones produce una reducción del 25% del arrastre sobre el cilindro. Este trabajo, como los anteriores, se han desarrollado a partir de datos de simulaciones numéricas, que permiten obtener soluciones en bajos Reynolds. A pesar de los resultados obtenidos, Bergmann señala que la resolución de un problema de optimización sobre las ecuaciones diferenciales ordinarias de los modelos reducidos no asegura necesariamente encontrar el óptimo de la ecuación de Navier Stokes. No obstante, se han

⁵Más detalles se dan en la sección 4.2.2.

desarrollado herramientas que permiten obtener resultados verificables con bajo costo computacional.

2.2.3. Control mediante inyección y succión de fluido

También Prandtl fue precursor en el control de la capa límite mediante succión de fluido. La Figura 2.5 presenta la visualización del flujo realizada por Prandtl donde se realiza la succión a partir de una ranura ubicada a un ángulo $\theta = 140^\circ$ respecto del punto de estancamiento. Puede observarse que el fenómeno de desviación de la estela es similar al logrado mediante rotación del cilindro. Esto es debido a que la aspiración de la capa límite en un lado del cilindro retarda la separación del flujo de la superficie superior.

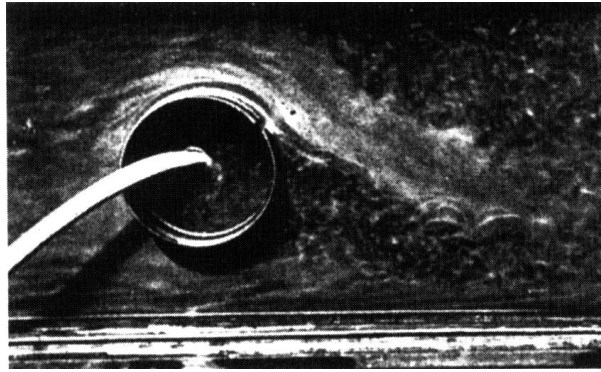


Figura 2.5: Visualización de un cilindro con una ranura de succión a $\theta = 140^\circ$, $Re = 4000$. Prandtl (1925)[145].

Más tarde, Thwaites (1948) y Chessemán (1968) retomaron las experiencias de Prandtl de succión. Uno de los objetivos propuestos era el de lograr un incremento de la sustentación en cuerpos romos independientemente del ángulo de incidencia entre su dirección principal y la del flujo incidente. Mediante la acción de control en cilindros porosos Thwaites consiguió reproducir un escurrimiento similar al que predice la teoría de flujo potencial, la cual no considera los efectos viscosos y en consecuencia, la existencia de la capa límite.

El soplado o inyección de fluido en forma tangencial a la superficie de un cuerpo es otra forma de controlar el desprendimiento de la capa límite. Desde un punto de vista práctico, la inyección de fluido resulta más sencilla de conseguir que su succión. Esto se debe a que puede producirse aire comprimido fácilmente a partir de un motor y además la ranuras de inyección, a diferencia de cuando succionan, no tienen el inconveniente de taparse con suciedad.

Para obtener resultados más completos Mathelin et al. (2002)[80] estudiaron el

efecto de inyección uniforme en un cilindro a bajos Re donde el flujo permanece bidimensional. Sus resultados, validados con anteriores experiencias (2001)[81][82], permiten crear un modelo que relaciona el número de Strouhal con la inyección, así como también los efectos sobre el arrastre y la transmisión de calor.

El trabajo de Park et al. (1994)[93], constituyó un esfuerzo por lograr un sistema de lazo cerrado a partir de este tipo de control. A partir de simulaciones numéricas para bajos números de $Re (< 100)$, construyeron su modelo mediante entradas de inyección por un lado y succión por el otro, y un grupo de sensores. Para valores de $Re < 80$ los autores logran la supresión del desprendimiento y reducciones de la fuerza de arrastre de hasta un 16 %. Los autores señalan que cuando el número de Re aumenta, el sistema de control se vuelve inestable, presumiblemente, por la aparición de inestabilidades no contempladas en el modelo. Asimismo, el modelo se manifiesta muy sensible a la ubicación de los sensores.

2.3. Control de flujos mediante actuadores electrohidrodinámicos

En los siguientes párrafos se realizará un estudio de los conceptos fundamentales de la física de las descargas gaseosas. Se podrá entonces introducir la descripción de de los actuadores electrohidrodinámicos y sus aplicaciones en fluidodinámica.

2.3.1. Generalidades de las descargas en gases.

El término *descarga gaseosa* tiene su origen en el estudio de capacitores en un circuito. Un capacitor que consiste en un par de electrodos separados por un medio dieléctrico se encuentra cargado, cuando entre sus electrodos hay una diferencia de potencial. Cuando la diferencia de potencial aumenta, existe un umbral que, alcanzado, da inicio a la conducción a través del dieléctrico. Se produce una descarga del capacitor. En particular, si el medio es gaseoso, la ruptura dieléctrica del gas forma un estado ionizado, de pares electrón-ion. Posteriormente el término "descarga" fue utilizado para describir cualquier flujo de corriente en un gas ionizado, y cualquier proceso de ionización de un gas por un campo eléctrico aplicado.

Podemos apreciar en la Figura 2.6 un circuito sencillo para producir una descarga en gases. Se distinguen dos electrodos: el cátodo(C) desde donde se emiten electrones y el ánodo(A), hacia donde migran. La ionización, la producción de partículas con carga, tiene lugar a lo largo del espacio interelectrodos y se distribuye de acuerdo a los mecanismos que tienen lugar según los regímenes de descarga. Si entre los electrodos se aplica un voltaje bajo, del orden de decenas de Voltios, no se

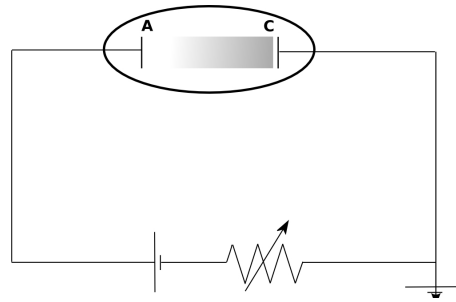


Figura 2.6: Esquema del circuito de una descarga gaseosa en un tubo.

manifiesta ningún efecto visible, aunque un instrumento muy sensible podría detectar una corriente muy baja, $\sim 10^{-15}$ A. Esta corriente es debida a la migración de las cargas libres generadas por rayos cósmicos y radioactividad natural. Si se usa intencionalmente una fuente radioactiva o de rayos X, se puede obtener una corriente más elevada del orden de $\sim 10^{-6}$ A. En este caso, el grado de ionización impuesto aún no es suficiente para producir luz. La descarga, que sobrevive sólo por la presencia de un agente externo, se llama *no-autosostenida*.

Si se eleva el voltaje, la corriente se incrementa (tramo A-B de la Figura 2.7), porque aumenta la cantidad de cargas producidas por ionización que son llevadas a los electrodos. Cuando el campo eléctrico es capaz de remover todas las cargas del volumen gaseoso, la corriente cesa de crecer, y se alcanza una saturación (tramo B-C). La ionización volumétrica del gas (natural o impuesta) limita el valor de corriente.

Subiendo más la tensión, la corriente aumenta bruscamente a partir de un valor umbral, y se observa emisión de luz. Estas son manifestaciones de la ruptura dieléctrica del gas⁶. El voltaje de ruptura depende de la cantidad de partículas presentes y de la intensidad del campo eléctrico. En términos de variables mensurables, es función de la presión y de la distancia entre los electrodos. El proceso se inicia con un pequeño número de electrones espurios⁷, o inyectados intencionalmente. Así, la descarga se hace inmediatamente *autosostenida*, es decir, la energía ganada por los electrones es suficiente para ionizar, produciendo pares ión-electrón, y entonces se produce una avalancha electrónica. El gas es apreciablemente ionizado en tiempos cortos ($\sim 10^{-7} - 10^{-3}$ s), y la corriente, bajo estas circunstancias, crece por varios órdenes de magnitud.

Existen varias condiciones que gobiernan el proceso a mayores voltajes. La Figura 2.7 muestra la característica de tensión y corriente en distintos regímenes.

⁶El fenómeno en el cual el gas pierde su carácter de aislante eléctrico. En inglés el término que se utiliza es *breakdown*.

⁷Producidos, verbigracia, por radiación cósmica

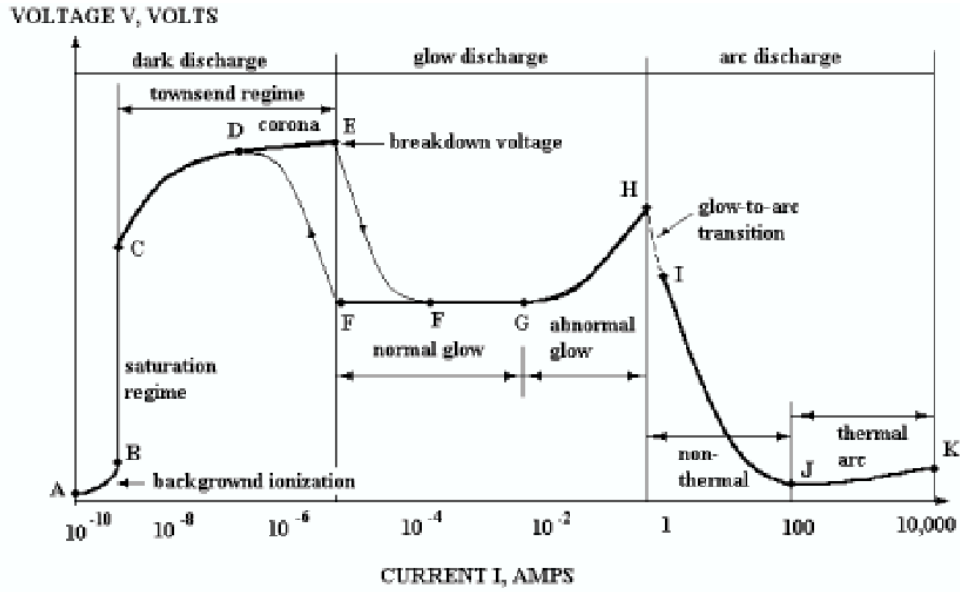


Figura 2.7: Característica corriente-tensión y distintos regímenes de descarga para electrodos planos paralelos. Raizer (1991)[104].

A bajas presiones ($\sim 1 - 10 \text{ torr}$)⁸ y resistencia elevada del circuito externo, se desarrolla una descarga luminiscente, *glow*, caracterizada por una corriente relativamente baja ($10^{-6} - 0,1 \text{ A}$) y voltajes altos entre los electrodos ($10^2 - 10^3 \text{ V}$). Se forma una llamativa columna radiante en tubos largos (de longitudes $L \sim 10 \text{ cm}$, con radios $R \sim 1 \text{ cm}$), que se usa comúnmente en letreros luminosos. El grado de ionización α , definido como el cociente entre la densidad de partículas con carga y la densidad total, es bajo ($\sim 10^{-8} - 10^{-5}$), y los electrones están mucho más calientes que las partículas pesadas ($T_e \sim 1 \text{ eV} \gg T_{amb}$)⁹. Este estado es mantenido por un lento y suave calentamiento Joule bajo condiciones de alto calor específico y elevada tasa de enfriamiento del gas. El bajo α es el resultado de una alta tasa de recombinación¹⁰, y es mucho menor al que correspondería si hubiera equilibrio termodinámico entre las especies a una $T_e \sim 1 \text{ eV}$.

Si la presión en el circuito es elevada, y la resistencia del circuito externo es baja, se desarrolla un arco. Estos poseen corrientes altas ($i > 1 \text{ A}$) y voltajes bajos (\sim decenas de V). El arco libera una considerable potencia térmica, que puede incluso destruir el tubo. Se forma usualmente un plasma en equilibrio termodinámico con $T_e \sim T \sim 1 \text{ eV}$ y con $\alpha \sim 10^{-3} - 1$. La principal diferencia entre una descarga glow y un arco está en el mecanismo de inyección de electrones desde el cátodo.

⁸ $1 \text{ torr} = 0,13 \text{ kPa}$.

⁹ $1 \text{ eV} = 1,610^{-12} \text{ erg}$, y equivale a una temperatura $T = 11600 \text{ K}$

¹⁰La neutralización de carga entre electrones e iones en el gas.

Si $p \sim 1 \text{ atm}$ y $L > 10 \text{ cm}$, y el voltaje es lo suficientemente alto, aparecen chispas, características del régimen de descarga *spark*. Aquí la ruptura se debe a un rápido crecimiento de canales de plasma, o *streamers*, de un electrodo al otro, y se trata de un fenómeno intrínsecamente no-estacionario. Una manifestación gigante de una descarga *spark* son los rayos, cuyos electrodos los constituyen las nubes y la tierra. Las descargas *spark* son indeseables para nuestras aplicaciones debido a su inestabilidad y a la gran cantidad de energía que consumen. En consecuencia, nos interesamos en lo sucesivo en regímenes de descargas donde la tasa de ionización es débil.

2.3.2. Descarga corona

La descarga corona es un tipo particular de descarga autónoma, que ocurre sólo si el campo eléctrico es marcadamente no uniforme. La presión del gas puede tomar valores del orden de la presión atmosférica y menores. El carácter no uniforme del campo eléctrico implica que se alcancen valores significativamente más altos cerca de uno o de ambos electrodos que en el resto del espacio interelectrodos. Se logra tal configuración del campo eléctrico a partir de la selección adecuada de la geometría de los electrodos. Así, por ejemplo, cuando el tamaño característico D de los electrodos es mucho menor que el espaciado h entre ellos; o bien, más típicamente cuando los electrodos adoptan configuraciones aguja - placa (Figura 2.8) o alambre placa. Los mecanismos que intervienen en la ionización dependen de la polaridad que tenga el electrodo alambre, sobre el que se tienen los mayores valores de campo eléctrico.

Como consecuencia del apantallamiento del campo eléctrico que produce la carga espacial en este tipo de descargas, distinguimos en general tres regiones: electrodos activos rodeados de una zona de ionización donde se generan las cargas libres; una región de deriva, donde la intensidad del campo eléctrico es baja y las partículas cargadas que se dirigen hacia los electrodos pasivos interactúan con el medio; y la zona de neutralización de carga alrededor de los electrodos pasivos. Asimismo, cuando los dos electrodos poseen un bajo radio de curvatura, se dan procesos de ionización en ambos y, en ese caso, las descargas corona se llaman bipolares, en contraposición al caso donde un solo electrodo es el activo, situación en la que suelen denominarse unipolares. Los fenómenos de la descarga corona y la descarga *spark* no difieren sustancialmente; ambos tipos de descarga tienen los mismos requerimientos en cuanto a la presencia de electrones promotores y la existencia de algún mecanismo de ionización secundaria que genere una descarga auto sostenida. En la descarga corona el volumen de gas ionizado se incrementa conforme se aumenta la diferencia de potencial aplicada entre los electrodos. Si la diferencia de potencial aplicada es aumentada aún más, eventualmente se desarrolla *spark* o

ruptura eléctrica.

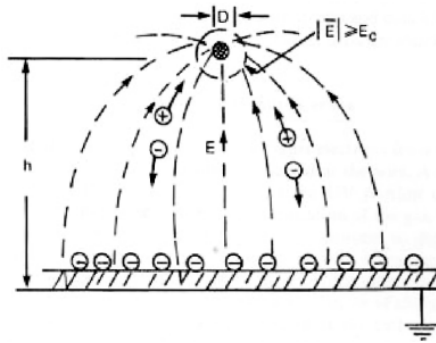


Figura 2.8: Descarga Corona. Configuración alambre-placa. La descarga corona se producirá siempre que $h \gg D$. La ionización del gas se produce en la zona donde la intensidad del campo supera un determinado valor crítico E_c . Williams (1993)[140].

2.3.3. Descarga de lámina de plasma

La descarga de lámina de plasma (PSD)¹¹ se produce con dos electrodos expuestos al aire montados sobre la superficie de un cuerpo dieléctrico. La excitación puede ser producida con tensión continua o alterna de modo que la tensión se ajusta para generar un proceso de ionización que ocupa todo el espacio entre los electrodos. La aplicación de un pulso de alta tensión a uno de los electrodos causa la formación de un campo eléctrico que tiene alta intensidad cerca del mismo. Esto inicia la ionización por impacto del gas que ocupa la región cercana a la superficie del dieléctrico y al electrodo de alta tensión. Las distribuciones de las cargas superficiales en el dieléctrico y las espaciales en el gas, estas últimas originadas como resultado de la deriva de electrones en un campo eléctrico no uniforme, deforman el campo eléctrico original. Este campo ioniza el gas y lleva a la formación de un frente de cargas que se desliza alejándose del electrodo de alta tensión con forma de una onda solitaria. Cabe aclarar que la ionización del gas en el frente de la onda se debe principalmente a la acción del campo transversal, normal a la superficie del dieléctrico. Así, en este tipo de descarga se forman picos de los campos eléctricos transversal y longitudinal que se propagan a lo largo de la superficie dieléctrica. Como resultado del proceso, en la región entre los electrodos, la superficie dieléctrica aparece contorneada por una fina capa de aire ionizado o lámina de plasma. La corriente de plasma incluye una componente de corriente continua y

¹¹Del inglés plasma sheet discharge.

un gran número de pulsos con frecuencias del orden de algunos kHz que se asocian a streamers[121].

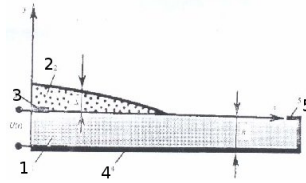


Figura 2.9: Esquema de una descarga deslizante. 1 dieléctrico; 2 plasma; 3 electrodo iniciador; 4 y 5 contraelectrodo y cubierta puestos a tierra. Lagarkov y Rutkevich (1994)[72].

2.3.4. Descarga con barrera dieléctrica(DBD)

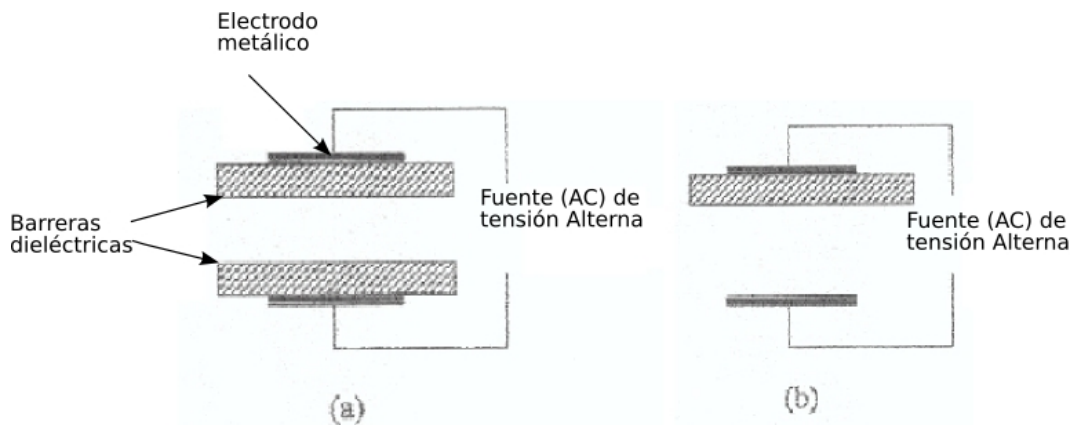


Figura 2.10: Configuración de electrodos con Barrera Dieléctrica (Kunhardt[71]).

Una configuración particular de descarga se obtiene cuando una barrera dieléctrica cubre uno o ambos electrodos (Figura 2.10). La finalidad de esta barrera es estabilizar la descarga y evitar la transición al arco. Así, mediante esta técnica, se pueden obtener plasmas difusos y estables. Por otro lado, debido a la barrera dieléctrica, debe suministrarse tensión alterna para obtener la descarga. Cuando la frecuencia del potencial aplicado es del orden de los Megahertz se le llama Descarga de Radio Frecuencia, *RF Discharge*. Para presiones medias ($10 \sim 100\text{torr}$), se producen plasmas débilmente ionizados en configuraciones como las de la Figura 2.10, similares en aspecto a la descarga glow. Debido a la oscilación del campo eléctrico externo con estas frecuencias, los iones y electrones tienen también un

movimiento oscilatorio. Según Raizer (1991)[104], las velocidades de deriva y amplitud de las oscilaciones de los iones son aproximadamente 100 veces menores que las de los electrones. Por lo tanto, en la mayoría de los casos en que se quiere analizar la dinámica de la carga del espacio, el movimiento de los iones puede ser ignorado. Así, se considera que los electrones se balancean alrededor de los iones relativamente fijos.

La acción de descargas DBD sobre flujos externos a presión ambiente fue primeramente estudiada por Roth et al. (1998)[109](1998)[116] quien las denomina bajo la sigla OAGUDP (One Atmosphere Glow Uniform Discharge Plasma). Una gran cantidad de trabajos de aplicaciones en control de flujos basados en este dispositivo han sido publicados a la fecha Corke et al. (2002)[26], Corke y Chuan (2004)[27], Roth y Sherman (2000)[110], Roth y Xin (2006)[111], Thomas et al. (2006)[130], etc. El Dr. Roth asimismo patentó la aplicación de la descarga DBD con varios fines que exceden los aspectos aerodinámicos: remoción de contaminantes en superficies atacadas por agentes químicos o biológicos, tratamiento de superficies para incrementar su energía superficial en papeles y películas, tratamiento de materiales electrónicos, etc.

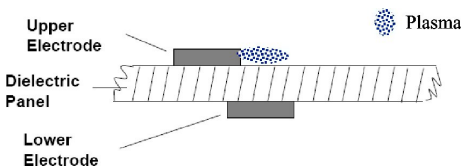


Figura 2.11: Configuración de un actuador DBD. Roth (1998)[109]

Podemos distinguir entre las descargas DBD, aquellas que son volumétricas, cuya disposición de electrodos se presentó en la Figura 2.10, de las que se establecen sobre la superficie del material aislante (Figura 2.11). Típicamente, son éstas las que se utilizan en control de escurrimientos.

En la descarga DBD se utilizan electrodos excitados periódicamente, uno de ellos expuesto al aire y el otro encapsulado en material dieléctrico (Figura 2.11). Las configuraciones usuales consisten en un par de electrodos paralelos separados por una lámina dieléctrica en un arreglo que tiene la dirección transversal al flujo sobre una superficie aerodinámica. Para lograr la descarga auto-sostenida, las frecuencias de excitación son del orden del kHz. El proceso de ionización ocurre en la vecindad del electrodo expuesto al aire, allí la descarga emite en el visible.

Como consecuencia de la descarga, los iones móviles tienen colisiones con las partículas neutras y se induce un flujo macroscópico. La transferencia de cantidad de movimiento hacia las partículas neutras es del orden de un centésimo de la que disponen los iones (2003)[112]. Numerosos trabajos consisten en la aplicación de este fenómeno en varias configuraciones. Perfiles típicos del viento iónico producido por los actuadores DBD se muestran en la Figura 2.12. No obstante, el resultado es mayormente experimental, según Likhasnkii et al. (2006)[75], hasta la

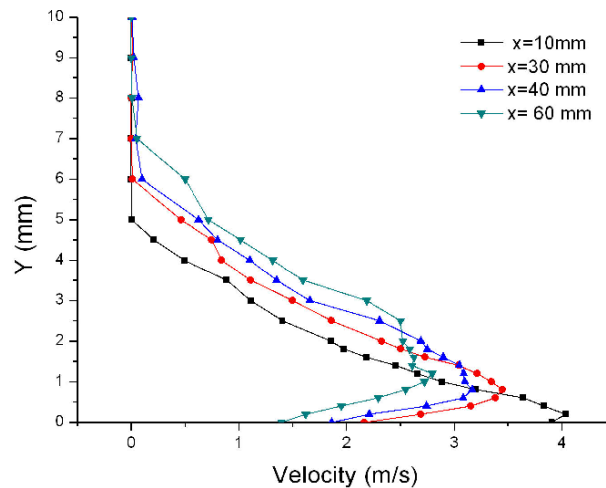


Figura 2.12: Perfiles de velocidades de viento iónico. Forte et al. (2006)[45]

fecha no fue establecido ningún modelo consistente para explicar fehacientemente la física de la descarga DBD superficial.

Los autores[75] proponen un modelo físico para explicar la aceleración inducida en un actuador con la geometría similar a la de la Figura 2.11.

El sentido y la intensidad de la aceleración pueden analizarse en cada hemicycle de una señal de corriente alterna. Durante el hemicycle de polaridad negativa, el sentido y la intensidad son dependientes del tamaño del electrodo embutido. Por otra parte, en el hemicycle positivo, la intensidad de la aceleración es función de la frecuencia de la señal. Según los autores, la resultante del hemicycle positivo es siempre mayor en módulo a aquella correspondiente al hemicycle negativo y, por ello, la resultante de la aceleración siempre tiene el sentido observado por los distintos autores, ilustrado en la Figura 5.8a. Es objeto de muy reciente investigación la comprobación de este modelo.

2.3.5. Actuadores electrohidrodinámicos

En los últimos años, ha crecido el interés por los actuadores electrohidrodinámicos (EHD) para el control de la aerodinámica de cuerpos y, en particular, para el de flujos con aplicaciones en aeronáutica. A través de la ionización del aire cercano a la superficie de un cuerpo aerodinámico, los dispositivos EHD producen una modificación de la condición del flujo cercano a las paredes[119]. Como consecuencia de choques elásticos entre las partículas cargadas que migran y las partículas neutras del aire, se produce un intercambio de cantidad de movimiento que da lugar a un "viento iónico". Cuando el número de especies cargadas es grande, otros mecanismos pueden agregarse a este acople electromecánico, como pueden ser alteraciones

de las propiedades físicas del gas (densidad, viscosidad, etc) en regiones muy cercanas a las paredes de un sólido.

Los dispositivos EHD son atractivos desde un punto de vista tecnológico porque son de simple constitución (no existen partes móviles) y tienen tiempos de respuesta muy cortos (los retardos en el establecimiento de una descarga son del orden, teóricamente, del nanosegundo).

Los actuadores EHD pueden ser clasificados en tres grandes grupos basados en las diferentes características eléctricas de la descarga[121]: dispositivos basados en descargas corona unipolares (UCD) y dispositivos de descarga de lámina de plasma (*plasma sheet*); dispositivos de descarga con barrera dieléctrica (DBD).

2.3.6. Aplicaciones en el flujo alrededor del cilindro.

Actuadores EHD del tipo corona y de lámina de plasma.

El primer estudio sobre control de flujos alrededor de cilindro con actuadores electrohidrodinámicos fue publicado por Noger et al. (1997)[91] quienes dispusieron un actuador UCD que consistió en un electrodo montado sobre la superficie del cilindro y otro electrodo aguja externo al cilindro. Sobre un diseño similar misma, Hyun y Chun (2003)[63] investigaron el control de la estela, obteniendo una descarga que actúa sobre el volumen de la misma.

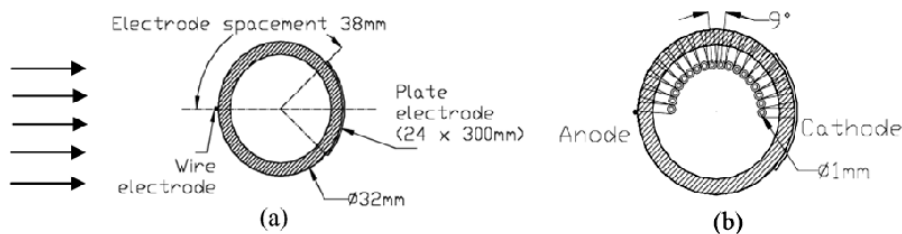


Figura 2.13: Vista esquemática de costado del cilindro. (a) electrodos montados sobre su superficie. (b) de las tomas de presión practicadas. Artana et al. (1999)[4].

Este diseño fue modificado por Artana et al.[4] al disponer los dos electrodos montados sobre la superficie, un alambre ánodo y un electrodo placa. De esta forma, la actuación se realiza fundamentalmente sobre la capa límite del cuerpo. La energía del actuador se concentra allí donde la cantidad de movimiento es mínima dentro del flujo. Un esquema se muestra en la Figura 2.13. Se obtuvo una nueva forma de descarga que llamamos PSD en párrafos anteriores. Los trabajos

de Artana et al. (2001)[5] y Desimone (2000)[35](Figura 2.14) fueron realizados para determinar las modificaciones en un rango de $750 < Re < 10000$.

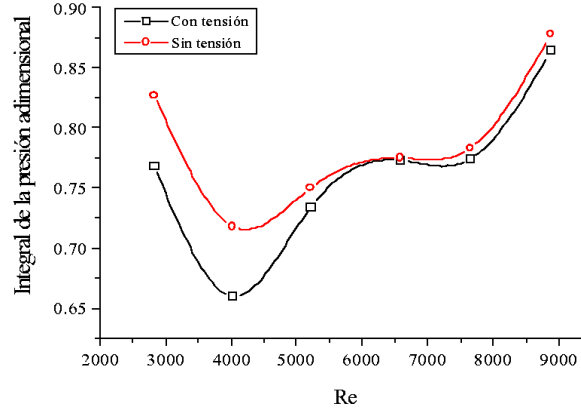


Figura 2.14: Variación de la integral de la presión adimensional en función del número de Reynolds, con y sin la aplicación de la descarga generalizada. Desimone (2000)[35].

Más tarde, en (2003)[6], los autores continuaron con medidas de PIV y tomas de presión en el análisis de escurrimientos de hasta $Re < 58000$. Las experiencias de PIV permitieron comprobar reducciones de la zona de recirculación detrás del cilindro así como sirvieron a la verificación de las aceleraciones inducidas por el flujo ehd en las capas de corte. Por otro lado, la curva del coeficiente de presión¹² en función de la coordenada angular en el cilindro, se modifica con la acción de esta descarga según se muestra en la Figura 2.15.

En [32] estudiamos los efectos de la descarga de lámina de plasma sobre el escurrimiento alrededor de un cilindro a partir de POD. El análisis se efectuó para un flujo a $Re = 35600$ y se limitó a poder reconstruir el flujo con y sin descarga. Se verificó que el flujo bajo actuación EHD precisa una mayor cantidad de modos para poder ser reconstruido con el mismo umbral de energía cinética fluctuante que el flujo sin actuación.

Por otra parte, en (2002)[7] y en (2002)[31] evaluamos la acción dinámica introducida por la descarga en la configuración del flujo sobre una placa plana para números de Reynolds $90000 < Re < 140000$. En este contexto, la determinación de la fuerza de arrastre es más sencilla y es posible independizar el resultado de las fuerzas de presión que aparecen en el flujo alrededor del cilindro.

¹²El coeficiente de presión para un cilindro $c_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2}\rho U^2}$, donde p es la presión medida y p_0 , la presión estática.

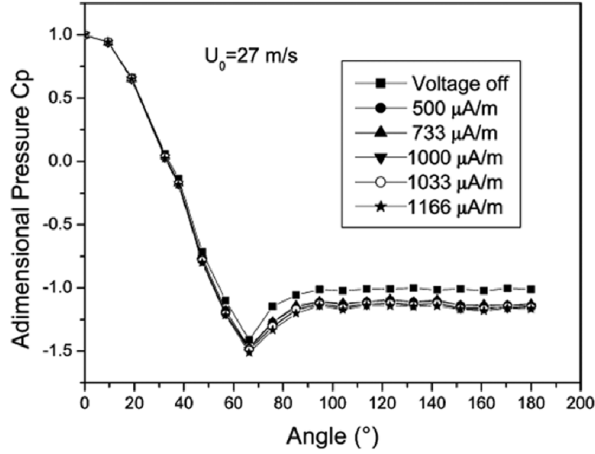


Figura 2.15: Distribución de presión en la superficie del cilindro para varios valores de corriente para $Re \simeq 58000$. Artana et al. (2003)[6].

Actuadores EHD del tipo DBD

Con el desarrollo de los actuadores DBD, McLaughlin et al. (2004)[78] trabajaron en el régimen $Re < 7400$ utilizando un actuador DBD montado sobre la superficie del cilindro para poder manipular la separación del flujo y el comportamiento en la estela. A partir de medidas de anemometría de hilo caliente, demostraron que logran conducir la frecuencia de desprendimiento de vórtices a los valores de frecuencia impuestos por su actuador.

En el mismo sentido, Thomas et al. (2006)[130] estudiaron el control de flujo alrededor de un cilindro, motivados por la necesidad de reducir ruidos en las condiciones de despegue y aterrizaje de aviones. En la Figura 2.16 se ilustra el dispositivo DBD utilizado por los autores, que modifica notablemente las líneas de corriente que contornean al cilindro para regímenes de $Re < 33500$. El dispositivo, tiene asociadas dos frecuencias: una es característica eléctrica de la DBD como señalamos en 2.3.4; y la otra, ordenes de magnitud menor, sirve a la regulación de la actuación no estacionaria. En el caso que analizan, según las dimensiones de su modelo, la velocidad máxima en el flujo es de 5 m/s , luego, siendo $St \sim 0,2$ en este régimen, la frecuencia de desprendimiento es del orden del Hz . Cuando aplican la descarga, consiguen los autores la supresión del camino de vórtices de von Karman y a raíz de ello, el nivel de turbulencia en la estela es reducido significativamente. En la Figura 2.17 pueden observarse los efectos sobre las componentes paralelas al flujo $(u'u')_m = [(u - u_m)(u - u_m)]_m$, donde el subíndice m indica promedio temporal de la magnitud. Para el caso de acción estacionaria de la descarga, obtienen los

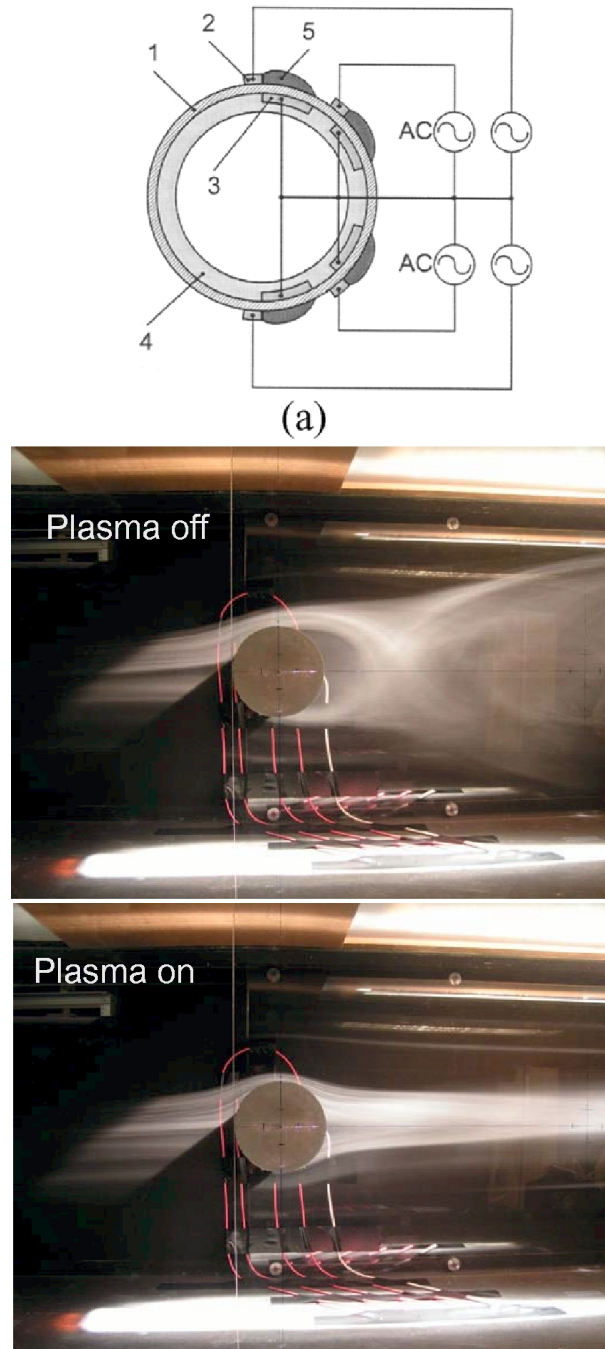


Figura 2.16: (a) Esquema de los actuadores DBD montados en la superficie del cilindro. 1 y 4 son materiales aislante; 2 es el electrodo expuesto; 3 es el electrodo embutido en el aislante y 5 representa al la formación de plasma. (b) Flujo sin descarga. (c) Flujo con descarga. Thomas et al.[130].

autores reducciones de hasta un 50 % del valor de pico de la intensidad turbulencia. El valor óptimo hallado experimentalmente es de un 66 % con la aplicación de una señal de frecuencia $f = 1Hz$. Resulta además un gasto energético menor a la aplicación estacionaria.

En síntesis, el método de control fluidodinámico mediante descargas aún se encuentra en pleno desarrollo, una completa y reciente revisión del mismo puede consultarse en el artículo de Moreau[86].

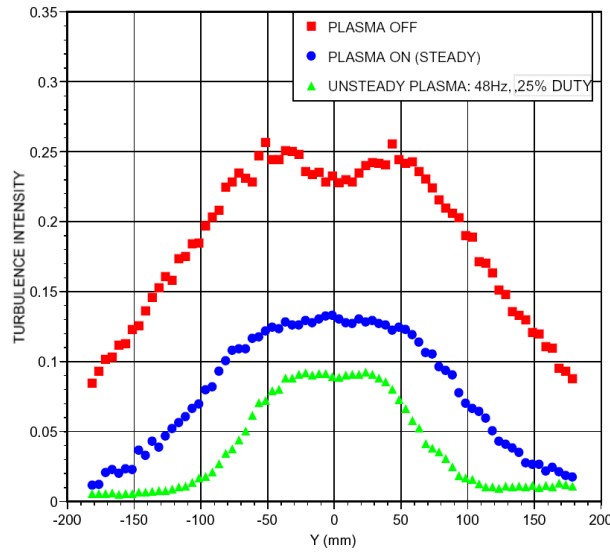


Figura 2.17: (a) Comparación de los perfiles de las componentes de intensidad de turbulencia $((u'u')_m)$ en la estela cercana $x/D=5$. Thomas et al. (2006)[130].

2.4. Conclusiones

Se ha pasado revista a distintos métodos que se encuentran en la literatura concernientes al control del flujo alrededor de un cilindro. La rotación uniforme y de oscilaciones, la succión e inyección, constituyen los métodos más difundidos para realizar el control.

El alto grado de turbulencia añade complicaciones al modelo POD, todavía no resueltas en la literatura. Por ello, para poder avanzar con el estudio, decidimos investigar el fenómeno a bajos números de Reynolds.

Por otro lado, parte del trabajo que concierne a esta tesis se dirigió primeramente

al estudio de la acción de control que ejercen dispositivos del tipo PSD. La descarga PSD tiene una fuerte dependencia respecto a la disposición y tamaño de los electrodos. Existen distancias mínimas ($\sim 25 \text{ mm}$) entre los electrodos para que la descarga no torne al arco cuando se trabaja a presión ambiente. Dada entonces una escala de la geometría mínima de trabajo, para conseguir bajos números de Reynolds ($Re < 200$) la velocidad del flujo de aire debe ser muy baja ($\sim 1 \text{ cm/s}$). Comprobamos que la descarga PSD induce viento iónico en una escala de velocidad ($\sim 1 \text{ m/s}$) que introduce modificaciones demasiado importantes al aplicarse sobre flujos a bajos Reynolds. Por ello, consideramos en nuestro estudio la aplicación de la descarga DBD, que permite una mayor modulación a bajas velocidades.

Destacamos, por último que la acción de control electrohidrodinámica, de reciente desarrollo, no conoce aún modelos reducidos que puedan servir a optimizar y mejorar el control. Asimismo, podemos destacar que la utilización de modelos reducidos sobre flujos controlados a partir de datos experimentales, particularmente de la técnica PIV se encuentra en una etapa de desarrollo inicial. Contamos con el presente trabajo para contribuir en estos aspectos. En consecuencia, introduciremos las bases para la construcción de modelos reducidos en los siguientes Capítulos.

Capítulo 3

Descomposición en modos ortogonales, POD

3.1. Introducción

El método Proper Orthogonal Decomposition (Descomposición en modos ortogonales, POD), conocido también como Descomposición de Karhunen-Loève, Descomposición en valores singulares, Análisis de componentes principales, sive esencialmente para la identificación y la construcción de modelos reducidos que proporcionan descripciones aproximadas de problemas dinámicos complejos. Fue introducido en el contexto de la Mecánica de los Fluidos por Lumley (1967)[77]. Ha sido utilizado por distintos autores (para una revisión completa véase por ejemplo Holmes (1996)[60]) como una manera de obtener descripciones aproximadas de estructuras de gran escala, o *estructuras coherentes*, en flujos laminares y turbulentos. La técnica ha sido utilizada en varias disciplinas como por ejemplo el análisis de procesos estocásticos, procesamiento de imágenes, análisis de señales, identificación de procesos y control en ingeniería química, oceanografía, comprensión de datos de computación, como herramienta de búsqueda de información en informática, etc.

A partir de la observación de un fenómeno fluidodinámico, proveniente tanto de simulaciones numéricas como de experimentos, la POD reconoce los patrones recurrentes del mismo. A partir de ello, se construye un modelo de representación lineal, que es óptimo respecto de todas las representaciones lineales posibles. El modelo permite la reducción de la dimensión de las ecuaciones de Navier Stokes hacia un sistema de ecuaciones ordinarias en el cual puede recuperarse la dinámica esencial de un escurrimiento.

Sin hipótesis *a priori* sobre los escurrimientos, la técnica POD consigue represen-

tarlos como una media y la superposición de funciones base, o *modos*, ordenadas decrecientemente respecto a su contenido de energía cinética.

El modelo resultante de la descomposición, reproduce las estructuras coherentes del flujo a partir de los modos espaciales o de combinaciones lineales de los mismos. En flujos de moderada turbulencia, es posible realizar buenas aproximaciones del campo de velocidades con un reducido número de modos.

3.2. Base POD

A fin de poder construir una base de funciones sobre la cual podamos resumir el comportamiento de un flujo, es necesario realizar una serie de definiciones. Trabajamos con campos de velocidades $u(x_1, x_2, x_3, t)$, funciones definidas en un dominio Ω . Pueden considerarse todas las dimensiones del problema descriptas en Ω , de modo que un elemento $x \in \Omega$ puede representar un elemento espacio-temporal (x_1, x_2, x_3, t) . Suponemos que los campos $u(x)$ pertenecen a un espacio de Hilbert, $L^2(\Omega)$ de funciones de cuadrado integrable, con producto interno definido por:

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v^*(x)dx \quad (3.1)$$

donde v^* denota el conjugado complejo de v . La norma en este espacio puede ser escrita como:

$$\|v\|^2 = (v, v)$$

En aplicaciones de mecánica de fluidos, considerar las funciones correspondientes a los campos de velocidades u pertenecientes al espacio $L^2(\Omega)$ es una hipótesis razonable, pues ello implica, en un espacio y tiempo acotados, que la energía cinética integrada en el dominio analizado permanece finita. En caso de contar con funciones vectoriales $\mathbf{u}(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$, el producto interno se define según:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (u_1v_1^* + u_2v_2^* + u_3v_3^*) dx \quad (3.2)$$

Para simplificar la notación, en los sucesivos desarrollos consideramos campos escalares, sabiendo que es simple la extensión a campos vectoriales. Asumiremos también que u son campos reales.

Definimos promedios temporales con la siguiente notación:

$$\langle u(x_1, x_2, x_3, t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u(x_1, x_2, x_3, t_i)$$

donde N es un número de instantes suficientemente grande como para asegurar la convergencia. Un fenómeno físico se considera ergódico cuando resultan equivalentes los promedios temporales de una magnitud y los promedios estadísticos de la misma. Utilizaremos como hipótesis en el análisis de flujos turbulentos, que éstos son ergódicos. Considerando una sucesión de muestras de campos de velocidades, $\{u^{(k)}\}$, podemos afirmar:

$$\langle u(x) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u^{(k)}(x) \quad (3.3)$$

Entre las descomposiciones posibles del conjunto $\{u^{(k)}\}$ sobre una base de funciones $\{\psi\}$, nos interesamos por una que nos permita asegurar que la cantidad $\|(u, \psi)\|^2$ sea la máxima posible. Esto significa que la proyección de las $\{u^{(k)}\}$ sobre la base de funciones $\{\psi\}$ sea óptima en relación a la energía cinética, entre todas las posibles bases. Para encontrar una base con estas características, nos servimos de las propiedades de un operador lineal. Para determinarlo, definimos primeramente la función de autocorrelación promediada como:

$R(x, y) = \langle u(x)u^*(y) \rangle$. La función resulta simétrica si los campos son reales es decir, si $u \in \mathbb{R} \Rightarrow R(x, y) = R(y, x)$.

A partir de R , se define al operador $\mathfrak{R} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ tal que

$$\mathfrak{R}[\psi(y)](x) = \int_{\Omega} R(x, y)\psi(y)dy$$

Es posible demostrar que este operador, de núcleo $R(x, y)$, es compacto y autoadjunto (ver Apéndice, Teorema A.4). De esta condición surgen útiles resultados:

- I. Los valores propios del operador son reales.

Sea $\mathfrak{R}\varphi = \lambda\varphi$, $\varphi \neq 0$, entonces, $\lambda(\varphi, \varphi) = (\mathfrak{R}\varphi, \varphi) = (\varphi, \mathfrak{R}\varphi) = \bar{\lambda}(\varphi, \varphi)$. Luego $\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

- II. Los vectores propios del operador correspondientes a diferentes valores propios son ortogonales.

Si $\mathfrak{R}\varphi = \lambda\varphi$, $\mathfrak{R}\psi = \mu\psi$ y $\lambda \neq \mu$
 $\lambda(\varphi, \psi) = (\mathfrak{R}\varphi, \psi) = (\varphi, \mathfrak{R}\psi) = (\varphi, \mu\psi) = \bar{\mu}(\varphi, \psi) = \mu(\varphi, \psi)$
 de donde $(\varphi, \psi) = 0$.

- III. Se cumplen las hipótesis del teorema de Hilbert-Schmidt,

Ver Apéndice (A.7).

Luego, podemos asegurar que existe una base ortonormal del espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$ compuesta por los vectores propios φ_n del operador \mathfrak{R} .

iv. El núcleo R del operador \mathfrak{R} puede representarse según:

$$R(x, y) = \sum_i \lambda_i \varphi_i(x) \varphi_i(y) \quad (3.4)$$

En efecto, si los φ_i son autovectores del operador \mathfrak{R} :

$$\mathfrak{R}[\varphi_i(x)] = \lambda_i \varphi_i(y)$$

Asimismo, si $\{\varphi_n\}$ es base ortonormal de $L^2(\Omega)$,

$$u(x) = \sum_i (u(x), \varphi_i(x)) \varphi_i(x)$$

Aplicando el operador sobre lo anterior, y en virtud del teorema de Hilbert-Schmidt:

$$\mathfrak{R}[u(x)] = \sum_i (u(x), \varphi_i(x)) \mathfrak{R}[\varphi_i(x)]$$

$$\mathfrak{R}[u(x)] = \sum_i (u(x), \varphi_i(x)) \lambda_i \varphi_i(y)$$

Desarrollando el producto interno en $L^2(\Omega)$,

$$\mathfrak{R}[u(x)] = \sum_i \int_{\Omega} u(x) \varphi_i(x) dx \lambda_i \varphi_i(y)$$

$$\mathfrak{R}[u(x)] = \int_{\Omega} \underbrace{\sum_i \varphi_i(x) \lambda_i \varphi_i(y)}_{R(x,y)} u(x) dx$$

A raíz de la simetría de la función de autocorrelación R , puede asegurarse que el operador es semi-definido positivo y los autovalores del operador \mathfrak{R} , $\lambda_i \geq 0$.

$$\begin{aligned} (\mathfrak{R}\varphi, \varphi) &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \langle u(x)u(y) \rangle \varphi(y) dy \varphi(x) dx \\ \lambda(\varphi, \varphi) &= \left\langle \int_{\Omega} \int_{\Omega} u(x)u(y) \varphi(y) dy \varphi(x) dx \right\rangle \\ \lambda &= \left\langle \int_{\Omega} u(y) \varphi(y) dy \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx \right\rangle \end{aligned}$$

$$\lambda = \left\langle \left| \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx \right|^2 \right\rangle \geq 0 \quad (3.5)$$

Más adelante se detalla el resultado que permite el intercambio entre el promedio temporal y la integral espacial. Ver teorema A.7).

Para encontrar los vectores propios del operador se plantea el problema:

$$\Re\varphi = \lambda\varphi$$

Es decir,

$$\int_{\Omega} \langle u(x)u(y) \rangle \varphi(y)dy = \lambda\varphi(x) \quad (3.6)$$

Resolviendo (3.6) podemos contar con una base ortogonal para $L^2(\Omega)$. Es posible escribir:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\varphi_i(x) \quad (3.7)$$

Llamando $a_i = (u(x), \varphi(x))$. La construcción de la base de funciones $\varphi(x)$ proviene de conjuntos de datos $\{u^k\}$ que surgen de problemas particulares de escurrimientos. Es por ello que suele denominarse en la literatura base *empírica* de autofunciones, así como al conjunto de autovalores asociados.

La ecuación (3.7) se ajusta a la definición de la serie de Fourier para u . Si la base $\{\varphi_n\}$ es ortonormal, los coeficientes a_i son los coeficientes de Fourier de u respecto de φ_i . Particularmente la base POD se elige tal que sus autovalores se ordenan de manera decreciente $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots$

3.2.1. Convergencia

Definimos el conjunto S de autovectores tal que los autovalores asociados son positivos $S = \{\varphi_i : \lambda_i > 0\}$. De acuerdo con la definición del operador (3.4), este conjunto contiene los elementos *relevantes* de la base, aquellos que pueden mejor representarlo. Podemos demostrar que se consigue reconstruir cualquier elemento que pertenece al conjunto $\{u^{(k)}\}$ a partir de lo que puede ser generado por el conjunto S . Para ello, establecemos qué se entiende por igualdad en el espacio $L^2(\Omega)$ respecto de la medida de Lebesgue. Dos funciones f y g son iguales si:

$$\int_{\Omega} |f - g|^2 dx = 0 \quad (3.8)$$

Entonces, sea $u \in L^2(\Omega)$ una función a reconstruir y $\{\varphi\}$ la secuencia de autovectores ortonormales en S . La reconstrucción de u es una función

$$u_s = \sum_j (u(x), \varphi_j(x)) \varphi_j(x)$$

Luego, u_s convergerá a u en el sentido de (3.8) si:

$$\int_{\Omega} |u_s - u|^2 dx = 0$$

De acuerdo a nuestra definición de medida, ampliada en (A.6), esto equivale a:

$$\langle \|u - u_s\|^2 \rangle = 0 \quad (3.9)$$

Podemos probarlo desarrollando el miembro izquierdo de (3.9). Recordando que trabajamos con campos reales:

$$\langle \|u - u_s\|^2 \rangle = \langle (u - u_s, u - u_s) \rangle = \langle (u, u) - 2(u, u_s) + (u_s, u_s) \rangle \quad (3.10)$$

Como demostramos en el Apéndice A, podemos intercambiar el orden entre el promedio temporal y la integración espacial. Luego, desarrollamos cada uno de los términos de (3.10):

$$\langle (u, u) \rangle = \left\langle \int_{\Omega} u(x)u(x)dx \right\rangle = \int_{\Omega} R(x, x)dx \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \langle -2(u, u_s) \rangle &= -2 \left\langle \int_{\Omega} u(x)u_s(x)dx \right\rangle \\ &= -2 \left\langle \int_{\Omega} u(x) \left[\sum_j (u(x), \varphi_j(x)) \varphi_j^*(x) \right] dx \right\rangle \\ &= -2 \left\langle \int_{\Omega} u(x) \left[\sum_j \int_{\Omega} u(y) \varphi_j(y) dy \right] \varphi_j(x) dx \right\rangle \\ &= -2 \int_{\Omega} \left[\sum_j \int_{\Omega} \langle u(x)u(y) \rangle \varphi_j(y) dy \right] \varphi_j(x) dx \end{aligned}$$

$$\langle -2(u, u_s) \rangle = -2 \int_{\Omega} \left[\sum_j \Re[\varphi_j(y)] \right] \varphi_j(x) dx$$

De (3.6) resulta:

$$-2 \int_{\Omega} \left[\sum_j \Re[\varphi_j(y)] \right] \varphi_j(x) dx = -2 \int_{\Omega} \sum_j \lambda_j \varphi_j(x) \varphi_j(x) dx$$

De la representación (3.4) del núcleo del operador, se tiene finalmente:

$$\langle -2(u, u_s) \rangle = -2 \int_{\Omega} R(x, x) dx \quad (3.12)$$

El tercer término de (3.10):

$$\begin{aligned} \langle (u_s, u_s) \rangle &= \left\langle \int_{\Omega} \left[\sum_j (u(x), \varphi_j(x)) \varphi_j(x) \right] \left[\sum_i (u(x), \varphi_i(x)) \varphi_i(x) \right] dx \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i,j} (u, \varphi_j)(u, \varphi_i) \int_{\Omega} \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx \right\rangle \end{aligned}$$

Por la ortonormalidad de las $\{\varphi_n\}$,

$$\begin{aligned} \langle (u_s, u_s) \rangle &= \left\langle \sum_i \int_{\Omega} u(x) \varphi_i(x) dx \int_{\Omega} u(y) \varphi_i(y) dy \right\rangle \\ &= \sum_i \int_{\Omega} \left[\int_{\Omega} \langle u(x) u(y) \rangle \varphi_i(y) dy \right] \varphi_i(x) dx \\ &= \sum_i \int_{\Omega} \Re[\varphi_i(y)] \varphi_i(x) dx \\ &= \sum_i \int_{\Omega} \lambda_i \varphi_i(x) \varphi_i(x) dx \end{aligned}$$

Para intercambiar la suma y la integral, debemos asegurar que $\sum_i \lambda_i \varphi_i(x) \varphi_i(x) dx$ converge uniformemente.

De la representación (3.4),

$$\left| \sum_i \lambda_i \varphi_i(x) \varphi_i(y) \right| = |R(x, y)|$$

Como los $\lambda_i \geq 0$,

$$\sum_i \lambda_i |\varphi_i(x) \varphi_i(y)| = |R(x, y)|$$

Siendo R acotado (A.4):

$$\sum_i \lambda_i |\varphi_i(x)\varphi_i(y)| \leq \sup_{x \in \Omega} |R(x, x)|$$

Luego se verifica que la suma tiene convergencia uniforme.

$$\begin{aligned} \langle (u_s, u_s) \rangle &= \sum_i \int_{\Omega} \lambda_i \varphi_i(x) \varphi_i(x) dx = \int_{\Omega} \sum_i \lambda_i \varphi_i(x) \varphi_i(x) dx \\ \langle (u_s, u_s) \rangle &= \int_{\Omega} R(x, x) dx \end{aligned} \quad (3.13)$$

Combinando (3.11), (3.12) y (3.13) se demuestra (3.9). Casi todo elemento¹ del conjunto $\{u^{(k)}\}$ puede reconstruirse como combinación lineal de autovectores cuyos autovalores son positivos.

Es posible también probar que cualquier elemento del conjunto de autovectores relevantes $S = \{\varphi_n : \lambda_n > 0\}$ puede obtenerse a partir de la combinación de elementos de $X = \{u^{(k)}\}$. Esta propiedad sirve para demostrar que los autovectores heredan propiedades del escurrimiento. Es decir, sea $\varphi_m \in S$, se cumple:

$$\varphi_m = \sum_j b_j u^j \quad (3.14)$$

Para justificar la expresión, definimos al conjunto formado por todas las combinaciones lineales de u^j , $S_1 = \{\sum_j b_j u^j\}$ para todo $u^j \in L^2(\Omega)$ y demostraremos que $S_1 = S$.

$S^\perp = \{\xi : (\xi, \varphi_n) = 0\}$ para todo $\varphi_n : \lambda_n > 0$.

Sabemos que $u^j = \sum_i a_i \varphi_i$ donde $\lambda_i > 0$. Luego, $(\xi, u^j) = 0$ y entonces cualquier combinación lineal de u^j : $(\xi, \sum_j b_j u^j) = 0$. Si $\xi \in S^\perp \Rightarrow \xi \in S_1^\perp$, que implica que $S^\perp \subset S_1^\perp$.

Por otro lado, $\zeta \in S_1^\perp \Rightarrow (\zeta, u^j) = \int_{\Omega} \zeta(x) u^j(x) dx = 0$.

Luego $\langle u^j(y) \int_{\Omega} \zeta(x) u^j(x) dx \rangle = 0$. Intercambiando la integración y el promedio,

$$\int_{\Omega} \langle u^j(y) u^j(x) \rangle \zeta(x) dx = 0$$

¹En la teoría de la medida, se dice que una propiedad se cumple en casi todo elemento de un conjunto, cuando allí donde no se cumple la medida es nula. En nuestro caso, la medida definida por (A.6). En la práctica, podemos considerar este tipo de elementos como aquellas observaciones alejadas de la secuencia de estados físicos (u^k).

De (3.6),

$$\Re\zeta = 0$$

Lo que implica que para todo $\lambda_i > 0$, $(\zeta, \varphi_i) = 0$. Resulta entonces

$$S_1^\perp \subset S^\perp.$$

Finalmente $S^\perp = S_1^\perp$ y $S_1 = S$.

Entre las propiedades que se heredan a partir del conjunto de funciones de un escurrimiento $X = \{u^{(k)}\}$, destacamos que si éstas corresponden a un campo de divergencia nula, caso de flujo incompresible, las φ_n también lo serán. Asimismo, las condiciones de borde de los campos se repiten en los autovectores, por ejemplo, la condición de no-deslizamiento y de superficies impenetrables, es decir $\mathbf{u}_w = 0$ en las paredes de cuerpos.

3.2.2. Base Óptima

Queda por verificar que la base $\{\varphi\}$ resulta óptima frente a cualquier otra base de $L^2(\Omega)$, de forma que es máximo $\|(u, \varphi)\|^2$. Equivale lo anterior en nuestra medida del espacio $L^2(\Omega)$ a:

$$\langle |(u, \varphi)|^2 \rangle = \max_{\psi \in L^2(\Omega), \|\psi\|=1} \langle |(u, \psi)|^2 \rangle$$

Si examinamos la descomposición de la velocidad u en una base ortonormal cualquiera, la energía cinética promedio puede ser cuantificada con la expresión:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\langle \int_{\Omega} u u dx \right\rangle &= \frac{1}{2} \left\langle \int_{\Omega} \sum_i b_i \psi_i \sum_j b_j \psi_j dx \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \sum_i b_i b_j \int_{\Omega} \psi_i \psi_j dx \right\rangle = \frac{1}{2} \sum_i \langle b_i b_i \rangle \end{aligned}$$

donde los b_i son los coeficientes de Fourier de u en ψ_i . Tenemos así escrita la energía cinética contenida en función de los coeficientes de la base. En particular, cuando utilizamos la base POD, $\frac{1}{2} \langle \int_{\Omega} u u dx \rangle = \frac{1}{2} \sum_i \langle a_i a_i \rangle$. Podemos así relacionar la energía cinética contenida en el escurrimiento con la suma de los autovalores del operador \Re . En consecuencia, podemos conocer el contenido energético de los primeros n modos de la descomposición a partir de la suma de los primeros n autovalores.

Recuperando el resultado de (3.5),

$$\sum_i \langle a_i a_i \rangle = \sum_i \lambda_i$$

Puede demostrarse que para las primeras n funciones base se cumple:

$$\sum_{i=1}^n \langle a_i a_i \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \geq \sum_{i=1}^n \langle b_i b_i \rangle \quad (3.15)$$

Es decir, la base POD es óptima dentro de la clase de representaciones mediante superposiciones lineales, las primeras n funciones bases POD capturan igual o más energía que las primeras n funciones de cualquier otra base.

Para probarlo, considérese el subespacio de $L^2(\Omega)$, S , generado por un conjunto ortonormal de funciones: $S = \text{gen}\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$. Sea P_S el operador de proyección sobre S .

$$P_S(u) = \sum_{j=1}^n (\psi_j, u) \psi_j(x) = \sum_{j=1}^n b_j \psi_j(x)$$

Si aplicamos el operador \mathfrak{R} sobre un elemento de S :

$$\begin{aligned} (\mathfrak{R}_{P_S(u)} \psi_k)(x) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \langle b_i b_j \rangle \psi_i(x) \psi_j(y) \psi_k(y) dy \\ &= \sum_{i,j=1}^n \langle b_i b_j \rangle \psi_i(x) \underbrace{\int_{\Omega} \psi_j(y) \psi_k(y) dy}_{\begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}} \\ &= \sum_i^n \langle b_i b_k \rangle \psi_i(x) \end{aligned}$$

El resultado asegura que $\mathfrak{R}_{P_S(u)}$ es un operador de S en S . Como S tiene dimensión finita n , ésta es la cantidad de autovalores del operador proyectado, que son algunos de los autovalores del operador \mathfrak{R} . Dado que los autovalores de \mathfrak{R} se hayan ordenados de mayor a menor, podemos asegurar que la traza del operador proyectado, que es la suma de sus n autovalores, es menor o igual que la suma de los primeros n autovalores de \mathfrak{R} .

$$\text{tr}(\mathfrak{R}_{P_S(u)}) = \underbrace{\text{suma de sus } n \text{ autovalores}}_{\text{p.ej } \lambda_2 + \lambda_5 + \dots} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Resta por probar que la traza de $\mathfrak{R}_{P_S(u)} = \sum_{i=1}^n \langle b_i b_i \rangle$. Para ello calculamos:

$$(\mathfrak{R}\psi, \psi) = \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} R(x, y) \psi_i(y) dy \right) \psi_i(x) dx$$

Como $R(x, y) = \sum_{i,j} \langle b_i b_j \rangle \psi_i(x) \psi_j(y)$

Luego, reemplazando y por la ortonormalidad del conjunto de las ψ_i :

$$(\Re\psi, \psi) = \sum_{i,j} \langle b_i b_j \rangle \int_{\Omega} \psi_i(y) \psi_j(y) dy \int_{\Omega} \psi_j(x) \psi_i(x) dx = \langle b_i b_i \rangle$$

Entonces:

$$\sum_{i=1}^n (\Re\psi, \psi) = \sum_{i=1}^n \langle b_i b_i \rangle = \text{traza de } \Re_{P_S(u)} \quad (3.16)$$

Con lo que queda demostrado (3.15)

3.2.3. Modos espaciales y temporales

En la definición de nuestro espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$ hemos considerado para el desarrollo que las dimensiones espaciales y de tiempo se confunden en una sólo variable x . Los productos internos en Ω son entonces integrales sobre las dimensiones tanto espaciales como la temporal. En vista del desarrollo de modelos reducidos de la ecuación de Navier Stokes, buscaremos solamente una base de funciones espaciales. Luego, los coeficientes a_i son dependientes del tiempo, y el campo de velocidades puede escribirse según:

$$u(x, t) = \sum_i a_i(t) \varphi_i(x) \quad (3.17)$$

Por esta razón se reconocen los modos temporales a_i y los modos espaciales φ_i de la descomposición.

3.2.4. Implementación

En la práctica los datos se obtienen discretizados en tiempo y espacio con lo cual la ecuación integral (3.6) se reduce a un problema estándar de autovalores. En este caso, la POD es equivalente a la descomposición en valores singulares de una matriz. La matriz se construye considerando las observaciones del campo de velocidades $u(x_i, t_j)$, donde x_i es una coordenada espacial y t_j una secuencia de instantes.

$$u = \begin{pmatrix} \vec{u}_1^{(1)} & \vec{u}_1^{(2)} & \dots & \vec{u}_1^{(M)} \\ \vec{u}_2^{(1)} & \vec{u}_2^{(2)} & \dots & \vec{u}_2^{(M)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{u}_N^{(1)} & \vec{u}_N^{(2)} & \dots & \vec{u}_N^{(M)} \end{pmatrix}$$

Donde N es la cantidad de puntos de la grilla de coordenadas espaciales y M es el número de observaciones. Si u_{ij} representa la matriz de la componente horizontal de la velocidad y v_{ij} , la componente vertical, se define la matriz

$$c = u^T u + v^T v \quad (3.18)$$

de modo que su descomposición en valores singulares proporciona las funciones base. Siendo c por construcción una matriz cuadrada simétrica, la formulación coincide con el problema de diagonalización de c . Es decir:

$$c = U \Sigma U^*$$

Donde U representa una matriz de autovectores y Σ la matriz diagonal formada por los autovalores de c ordenados de mayor a menor.

Observamos que el problema de calcular los autovalores de (3.18) es equivalente al de hacerlo sobre una matriz $d = uu^T + vv^T$. La elección dependerá entonces del tamaño, de evaluar la magnitud de M comparado con N .

En dimensión infinita, Sirovich[118] demostró este resultado que se conoce como método de *Snapshots*. La cantidad de instantáneas del escurrimiento, *snapshots*, se compara con la cantidad de puntos que posee la grilla espacial de las mismas. En relación a ello se acomoda el cálculo de (3.18).

Luego, los autovectores de c corresponden a los modos temporales del flujo, $a_i(t_j)$. De (3.14) sabemos que los modos espaciales pueden expresarse como combinación lineal de las observaciones. En consecuencia, los $\varphi_i(x)$ se obtienen según:

$$\varphi_i(x) = \sum_{k=1}^M a_i(t_k) u(x, t_k) \quad (3.19)$$

En forma similar, para la matriz d , su matriz de autovectores se compone de las modos espaciales $\varphi_i(x)$. Las funciones temporales $a_i(t_j)$ se calculan de la proyección de cada una de las observaciones $u(x_1 \dots x_N, t_j)$ sobre cada una de los autovectores.

Ejemplo de aplicación A modo de ilustración de las herramientas descriptas para el análisis de datos de mecánica de fluidos, se presenta en la Figura 3.1(a) una instantánea típica para el escurrimiento en la estela de un cilindro a $Re = 125$. Los modos más energéticos, la Figura 3.1(b) muestra el primero de ellos, se calculan a partir de (3.18). Dado que los modos espaciales se construyen ortonormales, es posible mediante líneas de corriente simplificar su representación. Asimismo se representa el modo temporal asociado (Figura 3.1(c)), $a_1(t)$, resultado de la proyección del campo de velocidades instantáneo sobre el modo 1.

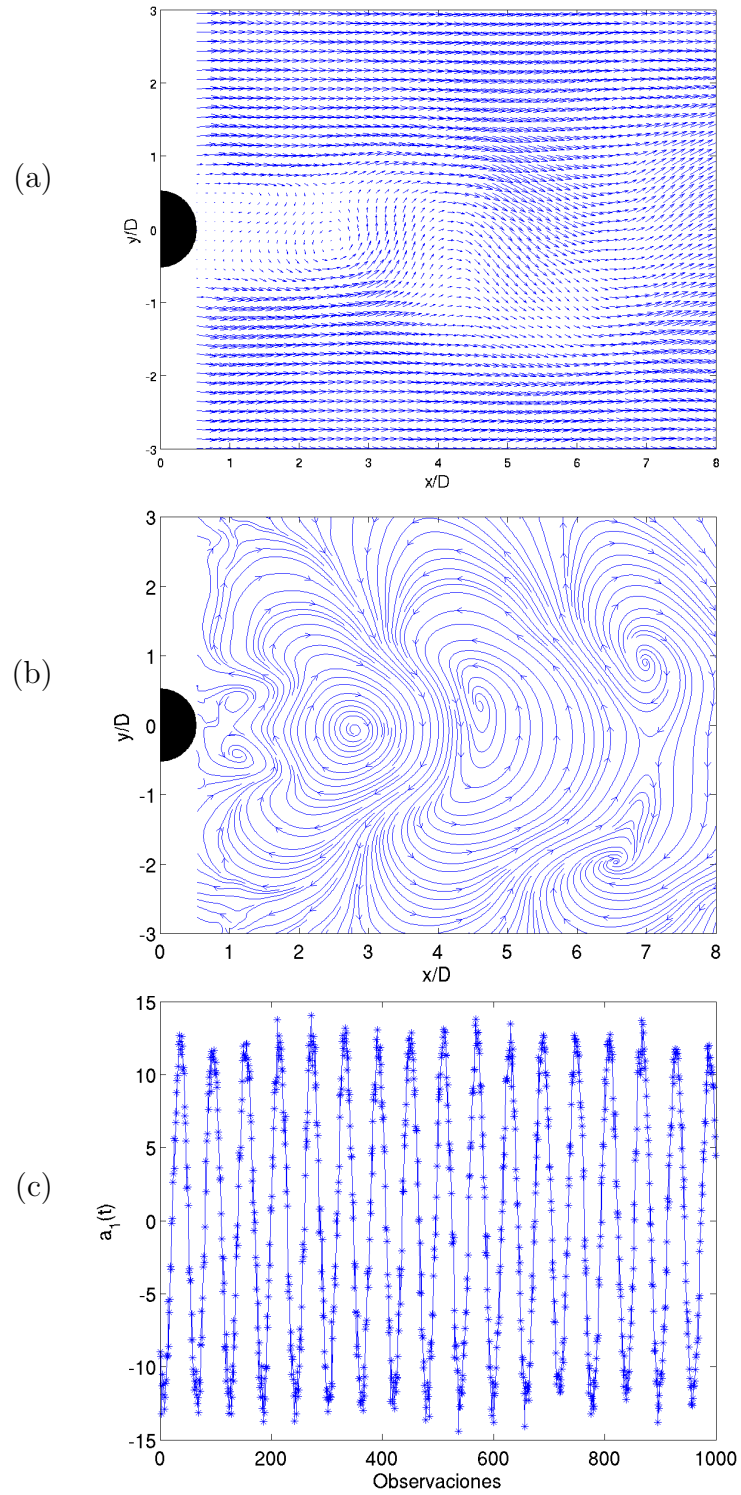


Figura 3.1: Ejemplo de Aplicación del método POD.. (a) Campo de velocidades instantáneo del flujo alrededor de un cilindro. $Re=125$. (b) Primer modo espacial ortonormalizado. (c) Modo temporal correspondiente.

3.3. Conclusiones

Hemos desarrollado a lo largo del capítulo, las bases de la técnica POD, una herramienta para el análisis y el modelado de escurrimientos. Permite reconocer estructuras coherentes de un flujo de acuerdo al contenido de energía cinética que contienen, tal como se detalló en 3.2.2. El desarrollo del método se ha realizado desde un planteo dentro de la teoría de Espacios de Hilbert, a fin de conservar la mayor generalidad sobre los problemas que nos interesan. Vinculamos así el concepto de observación de un escurrimiento con el de poseer, en un instante, una solución de la ecuación de Navier Stokes, elemento de un espacio $L^2(\Omega)$. En relación a ello, se estudiará en el siguiente capítulo la construcción de modelos reducidos. Por último, la descripción de método sobre un contexto matricial, posibilita la implementación computacional y el trabajo con datos de observaciones que pueden provenir tanto de la simulación numérica como de la experimentación. Veremos en los próximos capítulos, resultados conseguidos con la ayuda del método POD.

Capítulo 4

Sistemas dinámicos de orden reducido

4.1. Sistemas dinámicos

4.1.1. Introducción

El concepto de sistema dinámico tiene sus orígenes en la mecánica newtoniana. La ecuación de Newton aplicada sobre un conjunto de masas puntuales permite conocer el estado inicial y la evolución del mismo. Más generalmente, el estudio de sistemas dinámicos, involucra toda relación fija que describe la dependencia temporal de un conjunto de variables cualesquiera. La relación está dada por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias que permiten la construcción de modelos matemáticos determinísticos. A pesar de que algunas definiciones extienden el análisis a ecuaciones en derivadas parciales, a la inclusión de efectos estocásticos, nos limitamos al citado dominio como fue desarrollado en [60][22].

Una característica esencial del concepto de estado de un sistema dinámico es que debe contener toda la información sobre el pasado del sistema que sea relevante en su comportamiento posterior. En términos matemáticos, todo sistema dinámico debe plantearse como un conjunto de ecuaciones a lo sumo de primer orden¹. Las variables dependientes de estas ecuaciones son llamadas variables de estado. Aquellas variables que participan de las ecuaciones, definidas externamente, se denominan de entrada o bien, desde el punto de vista newtoniano, de forzado. Resumimos entonces:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1 \dots u_m, t) \quad i \in 1 \dots n \quad (4.1)$$

¹Podría caber entonces también como definición de sistemas dinámicos, el estudio de ecuaciones diferenciales de primer orden aplicadas a la física, a la química a la economía, etc.

constituye un sistema de n variables de estado x_i , con un conjunto de m variables de entrada u_j relacionadas mediante n funciones de estado f_i que en forma general son no lineales. El sistema es función explícitamente, en este caso, del tiempo. Cuando la relación es implícita, los sistemas se denominan autónomos. La mayor parte de los problemas de aplicación corresponde a sistemas autónomos y aún es posible, agregando ecuaciones, transformar todo sistema dinámico en un sistema dinámico autónomo.

La existencia y unicidad de las soluciones de los sistemas se aseguran imponiendo restricciones a la forma de la función de estado $\mathbf{f} = (f_1 \dots f_n)$. La continuidad de \mathbf{f} respecto a $\mathbf{x} = (x_1 \dots x_n)$ y a t garantiza el resultado. Una vez que es posible la resolución de (4.1), dado un estado inicial \mathbf{x}_0 , es posible determinar una colección de estados posteriores, que se denomina trayectoria del sistema. Conforme a la propiedad de unicidad, la trayectoria, u órbita, es una curva que no puede intersectarse consigo misma.

Si se suprime la dependencia de un sistema respecto de la entrada $\mathbf{u} = (u_1 \dots u_m)$, o bien se considera una entrada fija, las ecuaciones diferenciales de estado para un sistema autónomo pueden escribirse como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (4.2)$$

El conjunto de las trayectorias posibles de esta ecuación proporciona una descripción geométrica del comportamiento del sistema. El diagrama en el cual se grafican las variables de estado unas en función de otras se llama diagrama de fases del sistema. Aunque la interpretación geométrica se limita a las 3 dimensiones, es posible analizar sistemas de mayor orden mediante diagramas de fase parciales a fin de establecer relaciones dinámicas entre las variables.

4.1.2. Puntos de equilibrio y ciclos límite

Los puntos de equilibrio de un sistema autónomo se definen como aquellos que cumplen:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \quad (4.3)$$

También son llamados puntos singulares pues, aparentemente, de su definición se desprende que más de una trayectoria puede conducir a un mismo punto. Esto no es del todo exacto pues aquellas trayectorias que tienden hacia un punto de equilibrio no lo alcanzan rigurosamente sino que se aproximan asintóticamente.

Si bien consideramos que f es una función no lineal, es una herramienta del análisis no lineal la linealización de la función de estado en el entorno de un punto de equilibrio \mathbf{x}_e . La aproximación conduce a:

$$\frac{d}{dt}(\Delta\mathbf{x}) = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} \quad (4.4)$$

donde \mathbf{A} es la matriz jacobiana de \mathbf{f} evaluada en \mathbf{x}_e y $\Delta\mathbf{x}$ los incrementos de la variable de estado.

La naturaleza del equilibrio en \mathbf{x}_e se relaciona con las propiedades de la matriz A . Las soluciones del problema linealizado se hayan en efecto vinculadas por la siguiente expresión²:

$$\Delta\mathbf{x} = e^{tA}\Delta\mathbf{x}_0 \quad (4.5)$$

Se deduce que los autovalores de A definen el tipo de equilibrio del sistema. Se construye una clasificación de acuerdo a la representación en un diagrama de fases del comportamiento en el entorno de un punto de equilibrio. El siguiente cuadro resume las características posibles de un sistema linealizado:

Nodo estable	Autovalores reales y negativos;
Nodo inestable	Autovalores reales y positivos;
Foco estable	Autovalores complejos conjugados, con parte real negativa.
Foco inestable	Autovalores complejos conjugados, con parte real positiva.
Punto silla	Autovalores reales y de signo opuesto.
Centro	Autovalores complejos conjugados de parte imaginaria pura.

Cuadro 4.1: Clasificación de puntos de equilibrio en un sistema linealizado.

En la Figura 4.1 se grafican diagramas de fase correspondientes a algunos de estos casos. Los diagramas permiten conocer el estado a largo plazo del sistema, por ejemplo en la Figura 4.1a), el sistema tiende asintóticamente a ser representado por un único punto, el punto de equilibrio \mathbf{x}_e . En mecánica newtoniana, este caso

²Si A es una matriz diagonal:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

, luego e^A se obtiene aplicando la función sobre cada elemento de la diagonal

$$e^A = \begin{bmatrix} e^{a_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{a_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{a_n} \end{bmatrix}.$$

Esto permite también utilizar la función exponente sobre matrices diagonalizables. Si $A = UDU^{-1}$ y D es diagonal, entonces $e^A = Ue^DU^{-1}$. Véase un desarrollo detallado en [84].

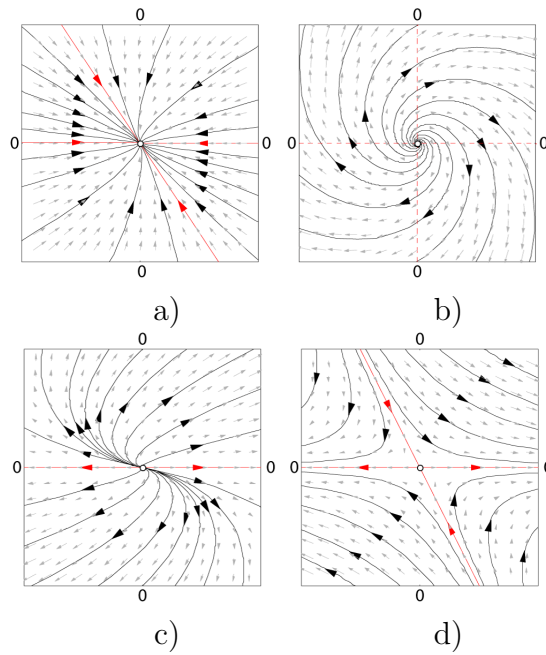


Figura 4.1: Clasificación de puntos de equilibrio. a) Nodo estable. b) Foco inestable. c) Nodo inestable. d) Punto silla.

podría corresponderse con el de un sistema sobreamortiguado. Asimismo, un sistema con un punto de equilibrio centro, puede asimilarse con el de un oscilador armónico³. Cada uno de los estados estables puede identificarse con el comportamiento alrededor de un sólo punto.

Cómo se había presentado en 1.3, el escurrimiento alrededor de un cilindro para bajos números de Reynolds puede ser interpretado bajo la óptica del análisis de sistemas dinámicos. En consecuencia, para $Re < 49$ sabemos que el sistema responde a una solución estacionaria en sentido estricto, ninguna porción del escurrimiento es función del tiempo. Podemos pensar entonces que el estado del sistema a largo plazo temporal, en un entorno de un punto de equilibrio, corresponde a dicha solución. Ante alguna perturbación externa, el sistema respondería retornando al punto de equilibrio que toma la forma de un nodo estable⁴.

En sistemas de dos o más variables de estado, es posible la aparición de un comportamiento periódico. En el espacio de las fases, el comportamiento se caracteriza por la aparición de trayectorias que toman la forma de curvas cerradas. Éstas trayectorias reciben el nombre de ciclos límite. El teorema de Poincaré-Bendixon establece

³Por ejemplo un resorte ideal sin fricción.

⁴Es posible también que el sistema retorne como un foco estable si la perturbación es amortiguada con un transitorio más largo.

las condiciones de existencia y estabilidad de los ciclos límite. Su enunciado dice que "si una región acotada y cerrada del espacio de las fases no contiene ningún punto de equilibrio y tiene la propiedad de que toda trayectoria que comienza en ella nunca la abandona, entonces, la región contiene al menos un ciclo límite".

Volviendo al flujo alrededor de un cilindro, reconocemos en el régimen de desprendimiento laminar de vórtices a un sistema de comportamiento periódico que se encuadra bajo la definición de ciclo límite. Si analizamos el flujo bajo la teoría de POD, las variables de estado en este caso corresponden a los modos temporales del escurrimiento.

Es de interés el análisis, en el marco de nuestro estudio, de parámetros que modifican la naturaleza del sistema dinámico. Esto equivale a:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \eta) \tag{4.6}$$

donde η es un parámetro que modifica a la función f o, en la versión linealizada, a la matriz A . Cuando el parámetro es capaz de cambiar el tipo de estabilidad del sistema, se lo denomina parámetro de bifurcación. Como adelantamos en el Capítulo 1, el número de Reynolds es un parámetro de bifurcación para el escurrimiento alrededor de un cilindro. Allí señalamos que el proceso de cambio de estabilidad de un sistema dinámico desde un punto fijo a un ciclo límite estable se denomina bifurcación supercrítica de Hopf.

Presentadas éstas definiciones y herramientas de sistemas dinámicos, estudiaremos a continuación las formas de plantear en este marco problemas de la mecánica de fluidos, que se rigen según la ecuación de Navier Stokes, no lineal y a derivadas parciales.

4.2. Proyección de Galerkin

El método de proyección de Galerkin consiste en convertir una ecuación diferencial en derivadas parciales, o una ecuación ordinaria infinito-dimensional, en un conjunto finito de ecuaciones diferenciales ordinarias. Para ello, es necesario proyectar las funciones que componen la ecuación original sobre un subespacio de dimensión finita. Suele referirse en la literatura como *funciones de prueba* a las funciones que generan dicho subespacio.

En nuestros problemas fluidodinámicos, esto significa proyectar los elementos del espacio $L^2(\Omega)$ sobre un subespacio definido por un conjunto finito de funciones. De acuerdo a nuestro desarrollo, las funciones óptimas para realizar esta proyección resultan las autofunciones que provienen de la descomposición POD. Remarcamos

que, a diferencia de otros desarrollos numéricos utilizados en la mecánica computacional, el origen de nuestras funciones de prueba es puramente experimental. Más aún, se encuentra ligado a la noción de estructura coherente(1.6.1) que hemos adoptado, tal como se demuestra en (3.2.2).

Tratando la ecuación de Navier Stokes con la proyección de Galerkin, resulta un problema infinito dimensional. Es entonces necesario realizar un truncamiento de los modos que participan de la dinámica del problema. Esto conduce a problemas de estabilidad de los sistemas de orden reducido que pueden ser resueltos de distintas formas. Se desarrollará, entonces, en lo que sigue, el planteo y la resolución de sistemas dinámicos aplicados a nuestro estudio fluidodinámico.

4.2.1. Formulación de sistemas de orden reducido

La dinámica de un flujo incompresibles se haya gobernada bajo las ecuaciones de Navier Stokes:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \vec{u} \cdot \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} + f_v \quad (4.7)$$

Y la ecuación de conservación de la masa:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (4.8)$$

Donde $\vec{u} = (u, v, w) = \mathbf{u}$ es la velocidad, p , la presión, ρ , la densidad y ν la viscosidad cinemática.

Resumiendo en un operador diferencial no lineal \mathcal{F} las derivadas sobre \mathbf{u} , las ecuaciones pueden reescritas bajo la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathcal{F}(\mathbf{u}) \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), t \geq 0, \mathbf{x} \in \Omega \quad (4.9)$$

El problema cumple con condiciones de borde,

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), t \geq 0, \mathbf{x} \in \Omega$$

y se completa con condiciones iniciales $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)$.

Reemplazando en (4.9) el resultado de la descomposición del campo \mathbf{u} definida en (3.7), y proyectando sobre cada una de las funciones base, se llega a un sistema de ecuaciones ordinarias de dimensión infinita sólo sobre la componente temporal del escurrimiento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_i a_i(t) \varphi_i(\mathbf{x}) &= \mathcal{F} \left(\sum_i a_i(t) \varphi_i(\mathbf{x}) \right) \\ \left(\sum_i \varphi_i(\mathbf{x}) \frac{da_i(t)}{dt}, \varphi_i \right) &= \left(\mathcal{F} \left(\sum_i a_i(t) \varphi_i(\mathbf{x}) \right), \varphi_i \right) \end{aligned}$$

$$\frac{da_i}{dt} = \dot{a}_i = F(a) \quad (4.10)$$

El operador F resulta de la proyección del operador \mathcal{F} sobre cada una de las funciones base $\phi(x)$.⁵ Se supone que (4.10) es una representación exacta de las ecuaciones de Navier Stokes. Las condiciones de borde se verifican por la propiedad heredada de las funciones base como se demostró al final de 3.2.1. Las condiciones iniciales pueden elegirse de cualquiera de las proyecciones del campo sobre las funciones base.

Como en la práctica se trabaja con representaciones aproximadas, si denotamos \tilde{a} como un vector de dimensión finita de s componentes, el sistema queda:

$$\tilde{a} = \tilde{F}(\tilde{a})$$

Puede demostrarse [60] que el error entre la solución del sistema aproximado y el sistema exacto tiene la forma:

$$\epsilon(t) = \left[\epsilon(0) + \frac{K}{L} \right] e^{Lt} \quad (4.11)$$

Donde las constantes K y L no pueden estimarse a priori de la resolución de un problema. En general, se cuenta con un error que crece de manera exponencial y el esquema de cálculo necesita suposiciones adicionales sobre la naturaleza de las soluciones. Antes de abordar el problema, detallamos la obtención del operador⁶ $F(a)$.

La construcción del operador \mathcal{F} depende de la formulación que se elija para las ecuaciones de Navier Stokes. De acuerdo a la naturaleza de los datos que se dispongan y de la aplicación del modelo, convendrá adoptar uno u otro esquema. Se distinguen: la formulación en velocidad presión, basada en el campo de velocidades totales, o basada en el campo de velocidades fluctuantes; la formulación en vorticidad.

Formulación en velocidad-presión sobre el campo total

Las ecuaciones de Navier-Stokes se escriben de la manera siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla u \cdot u = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 u \quad (4.12)$$

⁵En adelante consideraremos como notación $x \equiv \mathbf{x}$, $x \in \Omega$ y $u \equiv \mathbf{u} \in L^2(\Omega)$.

⁶En lo sucesivo, llamamos al operador de dimensión finita $F(a) = \tilde{F}$.

Efectuando la proyección de Galerkin de esta ecuación sobre la base resultante de la descomposición POD del campo de velocidades total,

$$\frac{da_i}{dt} = (\varphi_i, -\nabla p) + \frac{1}{Re} \left(\varphi_i, \sum_j a_j \nabla^2 \varphi_j \right) + \left(\varphi_i, \sum_j a_j \nabla \varphi_j \cdot \sum_k a_k \varphi_k \right) \quad (4.13)$$

En esta ecuación, el término de presión es una incógnita que no puede expresarse directamente en términos de los coeficientes temporales. Por la propiedad de divergencia nula de las funciones base φ_i (3.2.1):

$$\int_{\Omega} \nabla(p\varphi_i) dx = \int_{\Omega} \varphi_i \nabla p + p \nabla \varphi_i dx = \int_{\Omega} \varphi_i \nabla p = (\varphi_i, \nabla p)$$

Podemos escribir en virtud del teorema de Stokes:

$$(\varphi_i, \nabla p) = \int_{\delta\Omega} (p\varphi_i) \cdot \mathbf{dl} \quad (4.14)$$

Donde $\delta\Omega$ es la curva que delimita la superficie Ω y \mathbf{dl} es normal a la frontera $\delta\Omega$. Este término entonces puede ser calculado directamente si la presión es conocida, que puede ocurrir si trabajamos sobre datos provenientes de simulaciones numéricas. Por otra parte, según las condiciones de borde que adopten los problemas a estudiar, (4.14) puede anularse. En otros casos, la formulación en términos de vorticidad permite evitar el cálculo.

Formulación en velocidad-presión fluctuantes

La descomposición de Reynolds se utiliza a menudo en el modelado de la turbulencia. Consiste en escribir las ecuaciones de Navier Stokes considerando a la velocidad como la superposición de una componente promedio u_m mas otra fluctuante u' : $u(x, t) = u_m(x) + u'(x, t)$. Aplicando esta descomposición, después de proyectar la ecuación resultante, aparece un término adicional sobre el sistema anterior, $(a_k(t)a_j(t))_m$. El modelado de este término se ha realizado de distintas maneras:

- Evaluando el término a lo largo de la integración numérica de (4.10) mediante un promedio temporal de los pasos de tiempo ya calculados[13].
- Imponiendo la condición de no correlación de las $a_i(t)$, así resulta $(a_k(t)a_j(t))_m = \lambda_j \delta_{kj}$.
- El carácter estacionario del campo promedio u_m , permite demostrar [94] que el término adicional corresponde a:

$$\left(\frac{\partial u_m}{\partial t} \right)_m = 0 \Rightarrow (\mathcal{F}(u)) = \sum_{j,k} (a_k(t)a_j(t))_m \nabla(\varphi_j \varphi_k)$$

El esquema de mantener la superposición entre la media temporal y modos fluctuantes tiene por desventaja que se fuerza el desacople entre ellos.

Formulación en vorticidad

Según la idea de Rempfer[106], puede deducirse el sistema dinámico que representa al escurrimiento utilizando la ecuación de transporte de la vorticidad.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \omega \cdot u = \nabla u \cdot \omega + \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (4.15)$$

La vorticidad ω puede escribirse en términos de la base POD. Efectivamente, si definimos $\psi_i(x) = \nabla \times \varphi_i(x)$, puede proyectarse (4.15) sobre este conjunto de funciones. Obtendremos así un sistema de orden reducido pero la definición de las ψ_i adoptada no garantiza su ortonormalidad.

Si consideramos solamente flujos bidimensionales, como los que se analizarán en el presente trabajo, $\nabla u \cdot \omega$ es nulo. Aplicando la descomposición de Reynolds en este caso, y proyectando sobre el conjunto de la ψ_i se obtiene un sistema del tipo:

$$\sum_k m_{ik} \frac{da_i}{dt} = i_i + \sum_k l_{ik} a_k + \sum_{k,j} c_{ijk} a_j a_k \quad (4.16)$$

donde los coeficientes se definen según:

$$m_{ik} = \int_{\Omega} \psi_i \psi_k dx \quad (4.17)$$

$$l_{ik} = \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla^2 \psi_k \psi_i dx - \int_{\Omega} (\nabla \omega_m \varphi_k + \nabla \psi_k u_m) \psi_i dx \quad (4.18)$$

$$c_{ijk} = - \int_{\Omega} (\nabla \psi_j \varphi_k) \psi_i dx \quad (4.19)$$

$$i_i = \sum_j \lambda_j c_{jji} \quad (4.20)$$

4.2.2. Inclusión del modo cero

Hace algunos años Dusek et al.[36] propusieron representar toda magnitud hidrodinámica en flujos de estela periódica como una superposición de un flujo base y la superposición de modos normales. Varios autores[146][98][87] han continuado este modelo aplicándolo a distintos casos. El trabajo de Noack et al.[87] detalla la construcción de un modelo reducido mejorado a partir de la inclusión de un modo cero o base en el escurrimiento alrededor de un cilindro para $Re > 49$. En dicho trabajo, Noack se sirve de datos provenientes de DNS para construir sus funciones

empíricas de POD a las cuales se agrega un modo proveniente de la solución estacionaria inestable de la ecuación de Navier Stokes. La solución base u_s corresponde al problema resuelto con DNS cuando ninguna perturbación numérica participa de los cálculos. Otra forma de lograrla es imponiendo condiciones de borde que fuerzan el resultado, por ejemplo la componente vertical de la velocidad $v = 0$ a lo largo del eje de simetría del flujo. Cuando $Re < 49$ la solución base coincide naturalmente con la solución completa de Navier-Stokes.

Una vez conocida la función u_s , se procede a incluirla en el modelo a partir de una construcción del tipo Gram-Schmidt de la base de funciones POD. Físicamente, el sistema contiene así una de las posibles soluciones cuando las perturbaciones, representadas por los modos POD se anulan completamente. El modelo fue testeado en [87] y mejoró notablemente, frente al modelo que sólo incluye la media y las perturbaciones[34], la predicción de estados transitorios. Asimismo, con un análisis de estabilidad los autores logran determinar con un modelo reducido el punto de bifurcación de Hopf a $Re \sim 49$. En el trabajo realizado sobre nuestros datos, hemos incluido la prueba de este modelo pero sin observar mejoras notorias. La complejidad que introduce la naturaleza experimental de nuestros datos es probablemente la razón de la dificultad de adaptar el método.

4.2.3. Síntesis

Como se ha expuesto, la construcción de los sistemas de orden reducido conduce a un sistema de ecuaciones ordinarias no lineales, de forma lo sumo cuadrática. De manera general, resumimos este sistema a:

$$\frac{da_k(t)}{dt} = F(a_k) = i_k + \sum_{i=1}^s l_{ik} a_i + \sum_{i=1}^s \sum_{j=i}^s a_i c_{ijk} a_j \quad k = 1 \cdots s \quad (4.21)$$

La obtención de los coeficientes de las ecuaciones 4.21 varía de acuerdo al planteo que se realiza. El sistema necesita, en general, de condiciones adicionales para garantizar su estabilidad como se discutió con la ecuación (4.11).

4.3. Hipótesis de cierre

4.3.1. Truncamiento

El truncamiento realizado en pos de la reducción del sistema elimina la presencia de modos que, pese a no poseer una elevada energía cinética respecto a los conservados, contribuyen a la estabilidad del modelo.

Desde un punto de vista físico, los modos descartados se hallan asociados a las estructuras más pequeñas del flujo, responsables de mecanismos de disipación de la

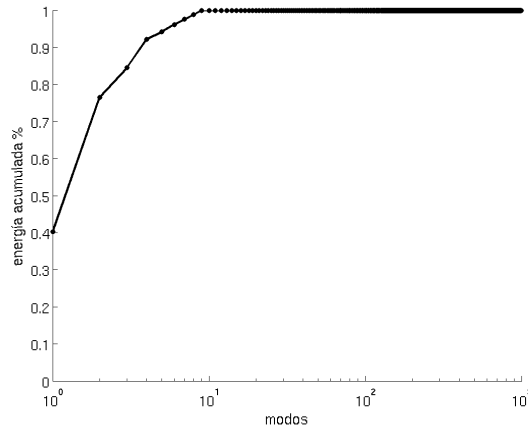


Figura 4.2: Energía cinética fluctuante acumulada en una descomposición POD.

energía del sistema. Al no tener en cuenta la influencia de los modos descartados, se obtienen modelos de soluciones incapaces de disipar la energía contenida en los modos conservados, por ello, inestables. Esta posibilidad de inestabilidad se hace más importante a medida que la fracción de energía descartada se hace más grande respecto a la conservada, situación que corresponde al estudio de problemas con números de Reynolds elevados donde la turbulencia es más acentuada.

Como criterio de truncamiento hemos adoptado primeramente la idea aceptada mayormente de conservar un porcentaje de energía cinética fluctuante por encima de un determinado umbral. Para ello, y en relación con la ecuación (3.15), si contamos con M observaciones de un flujo, seleccionamos una cantidad de s modos capaces de retener ε :

$$\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^s}{\sum_{i=1}^M} \quad (4.22)$$

En nuestras aplicaciones el valor de ε ronda el 90%. La Figura 4.2 presenta los resultados correspondientes al ejemplo del escurrimiento alrededor de un cilindro cuyo campo se ilustra en la Figura 3.1.

Hemos contemplado además, como criterio de inclusión de modos, conservar aquellos cuyas funciones temporales $a_i(t)$ originan trayectorias distinguibles de un mero ruido. Graficamos para ello, diagramas de fase en la Figura 4.3. Sobre el mismo ejemplo anterior, se agrega la información concerniente a la coherencia de la trayectoria.

Una vez decidido el número de modos a incluir, para estabilizar los modelos reducidos existen varias propuestas. La forma más sencilla consiste en el agregado de una viscosidad turbulenta suplementaria que permite modificar los términos lineales (4.2.3) y así estabilizar el sistema dinámico como se describe en [60]. Esto

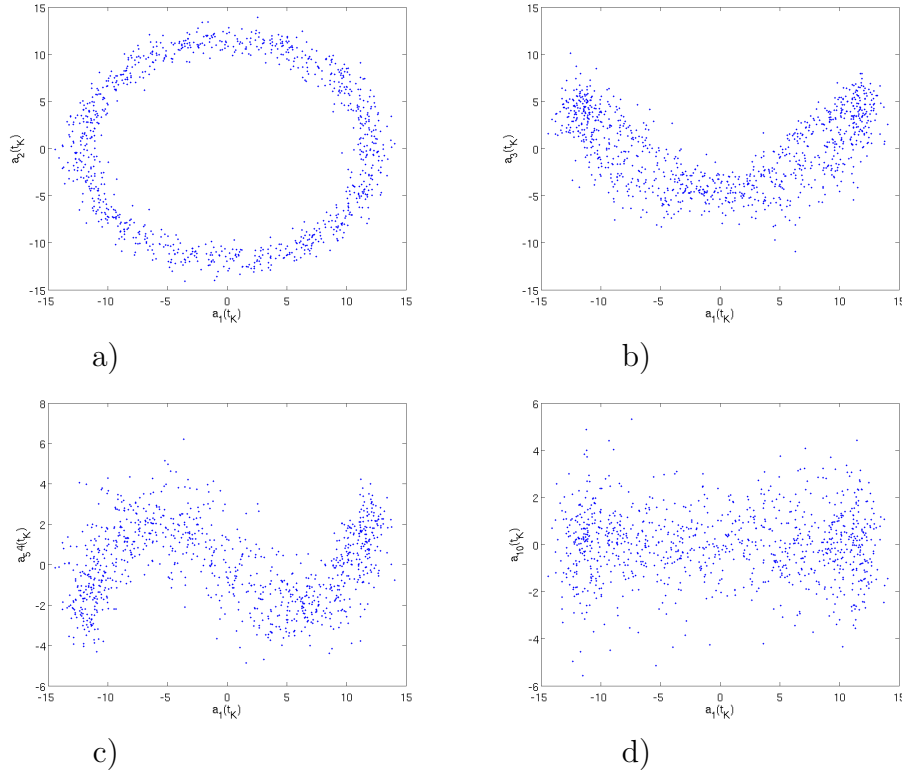


Figura 4.3: Diagramas de fases. En a), b), c) se distinguen trayectorias para el sistema dinámico. En d), el ruido de las observaciones no permite retratar una trayectoria coherente.

significa modelizar la acción de los modos descartados mediante una disipación artificial de los modos conservados en el sistema. Ejemplos de ello vemos en los trabajos de Aubry et al[8], Cazemier et al.[20] y Braud [16]. En el primer caso, Aubry plantea la ecuación de Navier Stokes en una capa límite y divide las componentes del flujo como una media, el flujo fluctuante coherente y las fluctuaciones incoherentes. El autor consigue una expresión analítica para la estimación de una viscosidad turbulenta, o término de amortiguación, ν_T añadida a la cinemática para modelar los modos no incluidos. En el trabajo de Braud, por otra parte, se trata al problema como encontrar la estabilidad de un sistema dinámico a partir de ν_T como parámetro de bifurcación. El parámetro se introduce en el sistema hasta lograr que el mismo no tenga soluciones ni divergentes ni triviales. Cazemier et al. proponen la misma modificación pero solamente actuando sobre los términos diagonales de la matriz de coeficientes lineales L . El ajuste del parámetro de amortiguación asegura que el modelo quede siempre disipativo.

Otra forma de estabilizar el sistema fue propuesta por Vigo[127]. La corrección de los términos de la ecuación dinámica se basa en la estimación de una viscosidad turbulenta que varía en el espacio. Así, aprovecha la información espacial y no afecta en forma global al sistema. En este camino, en [24], Couplet et al. estudian la transferencia de energía entre los diferentes modos de POD y proponen la utilización de un modelo de viscosidad artificial dependiente del orden de los modos interactuantes. Asimismo, los autores se sirven de la técnica de identificación polinomial que a continuación describimos.

4.4. Identificación Polinomial

Los coeficientes i_k , l_{ik} , c_{ijk} se obtienen, como hemos visto, de la proyección de las ecuaciones originales sobre la base POD. Esto supone el conocimiento de un conjunto de observaciones de campos de velocidades y de presiones o bien de vorticidad. Asimismo, en el cálculo intervienen productos internos y las derivadas espaciales de las funciones bases, que amplifican el ruido numérico. Si se trabaja con campos que provienen de medidas experimentales, aparece el error inherente a la técnica⁷ y, además, la resolución espacial puede resultar insuficiente. Cuando se siguen esquemas de cálculo de coeficientes matriciales como los expuestos en la ecuación(4.13), la determinación de derivadas de hasta segundo orden y la multiplicación de estos términos se traduce en un mayor error que se añade al intrínseco de la proyección de Galerkin (definido en la ecuación 4.11). Todo esto conduce a una estimación demasiado ruidosa para generar un modelo confiable.

Diferentes métodos han sido desarrollados para modelizar la dinámica de los modos POD y evitar el cálculo directo de los coeficientes del sistema dinámico obtenido mediante la proyección de Galerkin. Verdet[126] desarrolla el método de indentificación polinomial en el análisis de jets turbulentos. Braud(2000)[15] presenta la técnica analizando el sistema dinámico de Lorenz, logrando la reconstrucción del mismo a partir del muestreo de sus modos temporales. Más adelante, Couplet et al.(2003)[23] estudian la misma herramienta a la cual añaden la minimización de la función cuadrática y el planteo de un problema de control estático para refinar el modelo reducido de un flujo 3D de un escalón. Perret(2004)[94][95] utiliza la técnica de identificación polinomial en el estudio del acople entre experiencias y cálculo numérico de escurrimientos en capas de corte. Afirma Perret que medidas provenientes de PIV pueden ser analizadas en este contexto si es posible disponer de un número suficiente de valores de coeficientes temporales $a(t)$ y de sus derivadas $\frac{da}{dt}$.

⁷Véanse sus detalles en 5.3.

4.4.1. Implementación

La ventaja del método de identificación polinomial no es sólo evitar los errores numéricos al tratar datos experimentales sino también en proporcionar una forma sin hipótesis a priori, de modelizar los términos correspondientes a la acción de los modos no incluidos en el sistema. El principio es construir un sistema lineal donde las incógnitas son los valores de los coeficientes matriciales de la ecuación 4.21. Se obtiene la solución del sistema lineal como aquella cuyo error cuadrático medio es el mínimo.

En el cálculo de los coeficientes D_i, L_{ij}, Q_{ijk} intervienen los productos internos de los modos espaciales y de sus derivadas; por lo tanto, cuando la resolución espacial es insuficiente, su determinación puede efectuarse según el último enfoque, que evita el cálculo directo.

Consideramos la construcción de un sistema lineal con incógnitas D_i, L_{ij}, Q_{ijk} y su resolución en el sentido de cuadrados mínimos [23], [94].

La ecuación (4.21) puede describirse de la forma $\frac{da^i}{dt} = \sum_{k=1}^s x_k P_k(a^1, \dots, a^s)$ donde x_k representa a cada incógnita y P_k representa a un polinomio de grado menor o igual a 2.

Como con los datos con los cuales trabajamos hay buena resolución temporal, tenemos una buena aproximación de $\frac{da_i}{dt}$.

Definiendo,

$$X = (I_{dp} \quad \dots \quad L_{ij} \quad \dots \quad \dots \quad C_{ijk} \quad \dots)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & a_j(t_1) & \dots & a_j(t_1)a_k(t_1) & \dots \\ 1 & \dots & a_j(t_2) & \dots & a_j(t_2)a_k(t_2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & a_j(t_M) & \dots & a_j(t_M)a_k(t_M) & \dots \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

$$B = (\dot{a}_j(t_1), \dot{a}_j(t_2), \dots, \dot{a}_j(t_M))^T$$

consideramos resolver el sistema $AX = B$ en el sentido de cuadrados mínimos.

4.5. Método de Asimilación

4.5.1. Principio de la asimilación de datos

La Asimilación de datos es una técnica que permite realizar la estimación sobre el dominio del tiempo de un conjunto de variables de estado que representan un siste-

ma dinámico. Este escenario comparte el mismo objetivo que los filtros de Kalman utilizados en esquemas de filtrado recursivo⁸. Son necesarias condiciones iniciales del sistema, una ley de ruido para las variables y las ecuaciones diferenciales que lo gobiernan. Luego, se ajustan estos elementos a una serie de observaciones del sistema de acuerdo a:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} - F(a) = \zeta(t) \\ a(t_0) = a_0 + \eta \\ Y(t) = H(a) + \epsilon(t) \end{cases} \quad (4.24)$$

A través del operador F , presentado para nuestro modelo reducido en (4.10) y en (4.21), podemos describir la evolución del sistema en el intervalo de tiempo $[t_0; t_f]$, que corresponde al de las observaciones. La diferencia entre F y el valor de la derivada temporal sobre a se cuantifica mediante una función de ruido ζ , que se supone gaussiana y de media nula.

La segunda ecuación fija una condición inicial a_0 para la variable de estado a . La última ecuación vincula la solución del sistema respecto de una función de observaciones $Y(t)$, constituida por las medidas susceptibles a error -por ejemplo si proceden de un experimento- de la variable de estado. Para ello, se dispone de un operador H que transforma las soluciones $a(t)$ hacia el espacio de funciones en el que se encuentran las observaciones. En el presente desarrollo, consideramos que es el mismo, luego H es la identidad. Como en la primera ecuación, en las dos últimas intervienen funciones de ruido blanco gaussiano⁹ y media nula, η y $\epsilon(t)$ respectivamente. En la aplicación numérica, los ruidos se asocian a matrices de covarianza $Q(t, t')$, B y $R(t, t')$ y se asumen no correlacionadas en el tiempo. Se define la pseudo-inversa de la matriz de covarianza de acuerdo a:

$$\int_{t_0}^{t_f} Q(t, t') Q^{-1}(t', t'') dt' = \delta(t - t'') \quad (4.25)$$

donde δ es la medida de Dirac. Si asumimos que nuestro modelo es perfecto, se cumple que $Q = 0$. Los ruidos cuantifican las diferencias en las distintas componentes del sistema (4.24), referentes a la definición del modelo F , a la condición inicial a_0 y a las observaciones.

4.5.2. Función de penalización

En la búsqueda la minimización de los errores del sistema (4.24), se plantea la minimización de un funcional definido como:

⁸Una introducción a la técnica se presenta en [136]

⁹Ruido blanco es aquel que es totalmente correlacionado. El carácter *gaussiano* corresponde a la distribución aleatoria de la señal.

$$\begin{aligned}
J(a) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{da}{dt} - F(a) \right)^T (t) Q^{-1}(t, t') \left(\frac{da}{dt} - F(a) \right) (t') dt' dt \\
&+ \frac{1}{2} (a(t_0) - a_0)^T B^{-1} (a(t_0) - a_0) \\
&+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \int_{t_0}^{t_f} (Y - a)^T (t) R^{-1}(t, t') (Y - a) (t') dt' dt.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

La expresión corresponde al planteo de la ecuación de Euler-Lagrange¹⁰, que constituye la base del cálculo variacional. En el funcional participan las matrices de covarianza de los ruidos y la solución a se presenta como un vector columna, por ello es necesaria su transposición en la expresión. En el contexto del cálculo variacional¹¹ se define una función

$$g(\beta) = J(a + \beta\theta(t))$$

donde $\theta(t)$ es una función cualquiera de t y β es un número positivo. Si a_{min} es un mínimo relativo de J , sabemos que basta considerar

$$J(a_{min} + \beta\theta(t)) - J(a_{min}) = g(\beta) - g(0) \geq 0$$

con lo cual $\beta = 0$ es mínimo relativo para la función de una variable g . Entonces necesariamente:

$$\frac{dg}{d\beta}(0) = 0$$

Esto es por definición:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{g(\beta) - g(0)}{\beta} = 0 \tag{4.27}$$

Antes de emplear estos resultados sobre el funcional J , consideremos la definición de derivada fuerte, o de Fréchet (ver A.2), sobre el operador F . Si F es derivable en a , existe un operador lineal L_a tal que:

$$L_a\theta = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{F(a + \beta\theta) - F(a)}{\beta} \tag{4.28}$$

¹⁰Las ecuaciones de Euler-Lagrange (desarrolladas en la década de 1750) son las condiciones bajo las cuales cierto tipo de problema variacional alcanza un extremo. Son también utilizadas en el contexto de problemas de optimización.

¹¹Véase una introducción en la obra de Kolmogorov[70].

Por otro lado, el incremento del funcional J puede ser escrito como:

$$\begin{aligned}
 J(a + \beta\theta) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{da}{dt} + \beta \frac{d\theta}{dt} - F(a + \beta\theta) \right)^T (t) Q^{-1}(t, t') \\
 &\quad \cdot \left(\frac{da}{dt} + \beta \frac{d\theta}{dt} - F(a + \beta\theta) \right) (t') dt' dt + \frac{1}{2} (a + \beta\theta - a_0)^T B^{-1} (a + \beta\theta - a_0) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \int_{t_0}^{t_f} (Y - a - \beta\theta)(t) R^{-1}(t, t') (Y - a - \beta\theta)^T(t') dt' dt.
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Una variable auxiliar nos permite simplificar nuestro desarrollo, introducimos entonces la variable $\kappa(t)$, que llamamos adjunta:

$$\kappa(t) = \int_{t_0}^{t_f} Q^{-1}(t, t') \left(\frac{da}{dt} - F(a) \right) dt', \tag{4.30}$$

Ahora sí, reemplazamos en (4.27) el funcional definido en (4.26) y su incremento (4.29). Dividiendo por β y tomando el límite $\beta \rightarrow 0$, se llega a la expresión:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{d\theta}{dt} - L_a \theta \right)^T (t) \kappa(t) dt + \theta(t_0)^T B^{-1} (a(t_0) - a_0) \\
 &\quad - \int_{t_0}^{t_f} \int_{t_0}^{t_f} \theta(t)^T R^{-1}(t, t') (Y - a)(t') dt' dt
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Para poder realizar este paso, se dan las condiciones expuestas en (A.4) que permiten la derivación bajo la integral.

Efectuando las siguientes integraciones por partes, podemos deshacernos de la derivada sobre θ en la expresión (4.31):

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{d\theta^T}{dt} \kappa(t) dt = \theta(t_f)^T \kappa(t_f) - \theta(t_0)^T \kappa(t_0) - \int_{t_0}^{t_f} \theta(t)^T \frac{d\kappa}{dt} dt,$$

Introduciendo el operador adjunto¹² L_a^* ,

$$\int_{t_0}^{t_f} (L_a \theta)^T (t) \kappa(t) dt = \int_{t_0}^{t_f} \theta(t)^T (L_a^* \kappa)(t) dt.$$

Reuniendo estos elementos, la ecuación (4.31) puede reescribirse según:

$$\begin{aligned}
 0 &= \theta(t_f)^T \kappa(t_f) + \theta(t_0)^T [B^{-1} (a(t_0) - a_0) - \kappa(t_0)] \\
 &\quad + \int_{t_0}^{t_f} \theta(t)^T \left[\left(-\frac{d\kappa}{dt} - L_a^* \kappa \right) (t) - \int_{t_0}^{t_f} R^{-1}(t, t') (Y - a)(t') dt' \right] dt
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

¹²véase su definición en (A.1)

4.5.3. Ecuaciones Recursivas

Dado que la derivada del funcional debe anularse para la función arbitraria θ , los términos de (4.32), deben anularse. Obtenemos finalmente un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales, de avance y retroceso temporal con condiciones iniciales y finales:

$$\kappa(t_f) = 0 \quad (4.33)$$

$$-\frac{d\kappa}{dt} - L_a^* \kappa = \int_{t_0}^{t_f} R^{-1}(t, t') (Y - a) dt' \quad (4.34)$$

$$\kappa(t_0) = B^{-1} (a(t_0) - a_0) \quad (4.35)$$

$$\frac{da}{dt} - F(a) = \int_{t_0}^{t_f} Q(t, t') \kappa(t') dt'. \quad (4.36)$$

La ecuación de avance (4.36) corresponde a la definición de la variable adjunta (4.30) y se obtiene introduciendo Q , la pseudo-inversa de Q^{-1} . definida en 4.25. Podemos ver que la ecuación (4.33) constituye una condición final explícita para el modelo de evolución adjunto (4.34). El algoritmo consiste en realizar las siguientes operaciones:

- Se supone conocida una solución pista a y se computa la discrepancia con las observaciones, $Y - a$.
- Se calcula el operador adjunto. Este operador se define a partir del operador tangente (4.28) asociado al operador de la evolución del sistema F . La expresión analítica de este operador no es en general accesible en general. En dimensión finita, es posible obtener una expresión del operador L_a^* directamente como la matriz conjugada transpuesta asociada al operador L_a . En (4.5.5) se detallará el cálculo del operador adjunto del sistema (4.21).
- Se integra hacia atrás (desde t_f hacia t_0) la ecuación (4.34). Se determina la condición inicial para la variable de estado a con la ecuación (4.35).
- A partir de la nueva condición inicial para la variable de estado a , (4.36) puede ser integrada en avance y conformar el sistema recursivo de cálculo.

Al finalizar el cálculo recursivo, se obtiene una solución asimilada del sistema, $a(t)$. Combinando la técnica de identificación polinomial, podemos obtener los coeficientes del sistema 4.21. La novedosa utilización de éstas dos técnicas nos permitió la construcción de modelos reducidos basados en datos experimentales PIV[29].

4.5.4. Función de estado incremental

El anterior sistema puede ser ligeramente modificado para producir una solución pista inicial adecuada en el cálculo.

Considerando una función de incrementos que vincula la función de estado F y la diferencia en la condición inicial $\Delta a = a - a_0$, linealizamos el operador F alrededor de la condición inicial¹³ a_0 :

$$F(a) = F(a_0) + L_{a_0} \cdot (\Delta a),$$

Esto permite dividir a la ecuación (4.36) en dos ecuaciones con una condición inicial explícita:

$$a(t_0) = a_0 \quad (4.37)$$

$$\frac{da_0}{dt} - F(a_0) = 0 \quad (4.38)$$

$$\frac{d\Delta a}{dt} - L_{a_0}\Delta a = \int_{t_0}^{t_f} Q(t, t')\kappa(t')dt'. \quad (4.39)$$

La combinación de las ecuaciones (4.33 4.34 4.35) y (4.37 4.38 4.39) conduce al esquema de cálculo final. El método consiste en una integración hacia adelante en el tiempo desde la condición inicial a_0 con el modelo de ecuación del sistema dinámico (4.38). Ésta primera solución sirve a la estimación (4.33, 4.34) de la variable adjunta. La evolución de κ es guiada por una medida de discrepancia entre la observación y el estimado: $Y - a$. La condición inicial es entonces actualizada a través de la ecuación (4.35) y se realiza una integración en avance del incremento Δa mediante (4.39). La estimación se renueva a cada paso $a = a + \Delta a$. El proceso es iterativo hasta la convergencia.

4.5.5. Operador Tangente

De acuerdo a nuestro sistema dinámico de orden reducido (4.21), mostramos como se construye el operador tangente lineal para llevar a cabo el método de Asimilación. Reescribimos la ecuación del sistema dinámico(4.21):

$$\frac{da_k(t)}{dt} = F(a_k) = i_k + \sum_{i=1}^s l_{ik}a_i + \sum_{i=1}^s \sum_{j=i}^s a_i C_{ijk}a_j \quad k = 1 \cdots s$$

Para obtener el operador tangente lineal L_a , planteamos la aplicación del operador F sobre a mas una función $\theta(t) = [\theta_1(t) \cdots \theta_s(t)]^T$ que representa una pequeña

¹³Esta linealización es equivalente a la derivada definida en (4.28)

perturbación. Despreciando los términos de θ de grado igual mayor a 2, resulta:

$$\frac{d\theta_k}{dt} = L_a(\theta_k) = \left[\sum_{i=1}^s l_{ik}\theta_i + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s a_i C_{ijk}\theta_j + \theta_i C_{ijk}a_j \right] \quad k = 1 \cdots s.$$

Como $C_{ijk} = C_{jik}$,

$$\frac{d\theta_k}{dt} = L_a(\theta_k) = \left[\sum_{i=1}^s l_{ik}\theta_i + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s 2a_i C_{ijk}\theta_j \right] \quad k = 1 \cdots s. \quad (4.40)$$

Podemos resumir en:

$$L_a(\theta) = (L + 2C)\theta. \quad (4.41)$$

donde L y C son matrices ($s \times s$):

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1s} \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2s} \\ & & \cdots & \\ L_{s1} & L_{s2} & \cdots & L_{ss} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

$$C = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^s a_i C_{1i1} & \sum_{j=1}^s a_j C_{2j1} & \cdots & \sum_{j=1}^s a_j C_{sj1} \\ \sum_{i=1}^s a_i C_{1i2} & \sum_{i=1}^s a_i C_{2i2} & \cdots & \sum_{i=1}^s a_i C_{si2} \\ & & \cdots & \\ \sum_{i=1}^s a_i C_{1is} & \sum_{i=1}^s a_i C_{2is} & \cdots & \sum_{i=1}^s a_i C_{sis} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

4.5.6. Convergencia y estabilidad numérica

Cuando llevamos a la práctica el sistema variacional, linealizamos el funcional J alrededor de una pequeña perturbación $\beta\theta$:

$$J(a + \beta\theta) \cong J(a) + L_J \cdot \beta\theta. \quad (4.44)$$

La ecuación (4.32) nos da una representación analítica del vector gradiente L_J :

$$L_J \cdot \theta = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{J(a + \beta\theta) - J(a)}{\beta}.$$

Es posible entonces definir un criterio de convergencia basado en lo anterior:

$$L_J \cdot \theta < \epsilon. \quad (4.45)$$

Sin embargo, si los operadores F y H son no lineales, no podemos servirnos de un mínimo global ϵ . Es posible hallar la solución óptima sólo si partimos de un estado

inicial que se encuentre en un entorno cercano del estado óptimo del sistema. El cálculo del incremento del funcional J nos brinda una forma práctica de determinar si es correcto el planteo de la ecuación sobre la variable adjunta [124]:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{J(a + \beta\theta) - J(a)}{\beta L_J \cdot \theta} \rightarrow 1. \quad (4.46)$$

La aplicación del algoritmo de asimilación nos permite la evaluación de lo anterior y la implementación de criterios de convergencia para garantizar la estabilidad numérica del modelo.

4.5.7. Síntesis

Es novedosa la aplicación que realizamos del método de asimilación de datos y modelo, en el contexto de la mecánica de fluidos[29]. Como se detalla en el Capítulo 5, la técnica de determinación de campos de velocidades de un escurrimiento presenta aún un grado de incertezas suficientemente alto como para dificultar la construcción de sistemas dinámicos reducidos. La asimilación de datos puede funcionar como un eficiente filtro para las medidas pues, aunque en una forma proyectada o reducida, se las fuerza a cumplir la ecuación de Navier Stokes. Asimismo este filtrado combinado con el método de identificación polinomial es capaz de generar un modelo reducido que supera los problemas de cierre (4.3.1) con mayor eficacia.

4.6. Conclusiones

Han sido desarrollado a lo largo del capítulo una serie de procedimientos que posibilitan la construcción de modelos reducidos para flujos incompresibles mediante POD. Sobre las definiciones y conceptos expuestos en el Capítulo 3, hemos pasado revista de los métodos propuestos por diferentes autores en vistas de una adaptación al análisis y proceso de los datos con los que trabajamos en nuestro laboratorio. Los problemas de cierre, más frecuentes cuando las observaciones son experimentales, pueden superarse con la técnica de identificación polinomial. Sobre esta base, hemos presentado el método de asimilación como una mejora aplicada a la formulación de modelos reducidos. Más adelante en el trabajo, aplicaremos este desarrollo sobre datos provenientes de observaciones, experimentales o numéricas.

Capítulo 5

Montaje experimental y primer tratamiento de los resultados

5.1. Introducción

Las experiencias que forman parte de este trabajo fueron realizadas en el laboratorio de Fluidodinámica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires. Se presenta a continuación una descripción de los dispositivos e instrumentos utilizados para las llevar a cabo las experiencias en este trabajo. Pueden distinguirse fundamentalmente:

- I. Equipos para producir y medir el fenómeno fluidodinámico.
- II. Equipos para producir y medir un actuador mecánico.
- III. Equipos para realizar la generación y la medida del actuador electrohidrodinámico.

Luego, se caracteriza el accionar del dispositivo electrohidrodinámico. Para ello, se detallan las medidas eléctricas que corresponden a la acción del actuador EHD. Se han efectuado, asimismo, análisis simples que pueden realizarse sobre los resultados de los campos de velocidades obtenidos. La observación de los campos medios constituye una manera convencional para evaluar las modificaciones fluidodinámicas de la actuación. Se realiza una primera comparación con el flujo resultante de la acción rotación mecánica del cilindro.

Un refinamiento de estos tratamientos se presentará en el siguiente capítulo y permitirá una mayor explotación de los resultados.



Figura 5.1: Vista del túnel de viento.

5.2. Equipos para producir y medir el fenómeno fluidodinámico.

5.2.1. Túnel de viento

El túnel de viento que sirvió para las experiencias se muestra con sus dimensiones en la Figura 5.1.

Tiene como características principales:

- Es del tipo de circuito cerrado. Su diseño fue realizado para lograr en la sección de pruebas, un escurrimiento homogéneo y con la menor tasa de turbulencia posible. A ello contribuyen los cambios de sección proyectados, las curvas y los enderezadores de vena. Detalles de su construcción pueden encontrarse en [10].
- La cámara de pruebas tiene dimensiones 25cm (largo) x 18cm (alto) x 18cm (ancho). La misma fue construida a partir de las dimensiones de un cuerpo prototipo. En particular, considerando el cilindro que utilizamos en nuestras experiencias, de diámetro $D = 2\text{cm}$ y largo $L = 18\text{cm}$, sus dimensiones y ubicación cumplen las recomendaciones hidrodinámicas citadas en [134].
- El ventilador trabaja con tensiones de entrada que van desde 12 a 48 V DC, tiene una potencia de 36 Watts con la que puede entregar un caudal máximo de $4.7\text{ m}^3/\text{min}$ lo que permite poder medir en la sección de pruebas velocidades entre 0.01 y 2.5 m/s . Una fuente de tensión y corrientes regulables 0 30V, de 0 a 5A respectivamente. Tiene un bajo nivel de *ripple*(ondulaciones), es

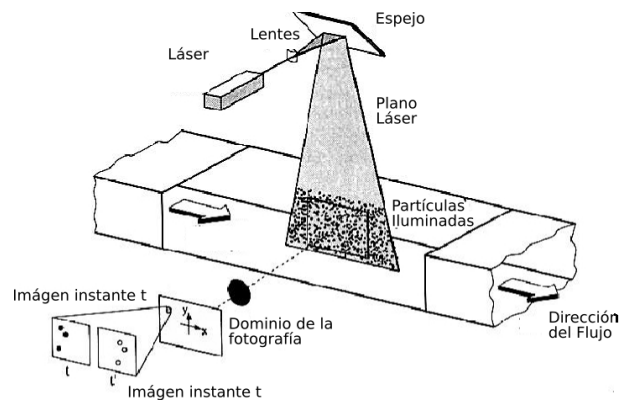


Figura 5.2: Ilustración del principio de funcionamiento de la técnica PIV.

decir son mínimas las fluctuaciones alrededor del nivel que se fija, alrededor del 0.01 %.

5.3. Técnica de medida por seguimiento de imágenes de partículas

La "velocimetría" (medición de campos de velocidades) por imágenes de partículas (PIV en inglés) es una técnica de medida capaz de producir a partir de un par de fotos sobre un mismo dominio, el campo de velocidades instantáneo del mismo. Se describen entonces a continuación los fundamentos del método.

5.3.1. Fundamentos

La técnica PIV se basa en la determinación de los desplazamientos de partículas trazadoras distribuidas en un flujo, que, en relación a un corto intervalo de tiempo Δt , permiten establecer las velocidades del escurrimiento. Es entonces necesaria una cantidad y calidad de partículas inmersas homogéneamente en el flujo a estudiar que permitan su reconocimiento. Su naturaleza no debe producir alteraciones sobre el escurrimiento si el trazador es elegido correctamente. Para identificar las posiciones de las partículas se utiliza iluminación y una cámara para adquirir la información. Un esquema simple de lo anterior se ilustra en la Figura 5.2. A partir de dos imágenes grabadas mediante una cámara digital¹, se conocen para dos instantes distribuciones de intensidad luminosa sobre el dominio. Mediante correlaciones cruzadas entre los campos de intensidad, suponiendo que la intensidad luminosa sobre cada partícula se conserva, se estiman los desplazamientos de las

¹en inglés se designan CCD(charge-coupled device) cameras, en referencia al sensor digital.

partículas. El cálculo precisa de algoritmos eficientes, fundamentalmente cuando se busca trabajar con campos de mallas densas y se procesa un gran número de observaciones. En vista de lo anterior se clasifica a la técnica como no intrusiva, considerando que no se introducen más perturbaciones fluidodinámicas sobre el escurrimiento que las partículas trazadoras.

En el trabajo de Adrian[1] se encuentran detallados éstos fundamentos y una actualización es presentada por Raffel en [102].

5.3.2. Equipo

Generación del plano Láser

Se dispone de un láser de iluminación continua verde, Intelite GM32-150IH, de características:

- tensión de trabajo: 5,0V DC regulable.
- Corriente de trabajo: $< 1500mA$
- Potencia de salida: $< 150mW$
- Clasificación: Clase IIIb Longitud de onda: $532 + / - 5nM$

La generación del plano láser se realiza mediante un poliedro rotativo el cual está compuesto por 10 espejos planos y un circuito y motor eléctrico que lo hacen girar a 125 Hz. El láser incide en el poliedro rotativo y genera un plano de luz en la sección de prueba paralelo al flujo de aire. Debido a la alta frecuencia de 1250 Hz dado que son 10 espejos, se hace posible la iluminación homogénea. Al girar el espejo en el cual está incidiendo el láser, éste barre una determinada zona, igual a la superficie del plano aparente generado. El tiempo de escaneo o barrido en cada pasada (por espejo) es de 800 micro segundos. También, a fin de aumentar la zona de iluminación, agregamos un espejo en el piso del túnel de vientos. La foto en la Figura 5.3 ilustra la implementación de estos elementos que sirven a la medida sobre el túnel de viento.

Partículas trazadoras y generador de humo.

El generador de humo produce las partículas trazadoras que dispersan la luz al ser interceptadas por el plano láser. El mismo consta básicamente de un pequeño tanque para el querosene, una resistencia eléctrica para evaporarlo y un ventilador de recirculación. Se muestra el equipo en la Figura 5.4.

Las partículas trazadoras deben ser elegidas lo más grande posible a fin de obtener la mayor dispersión de luz posible, pero a su vez el tamaño máximo está limitado

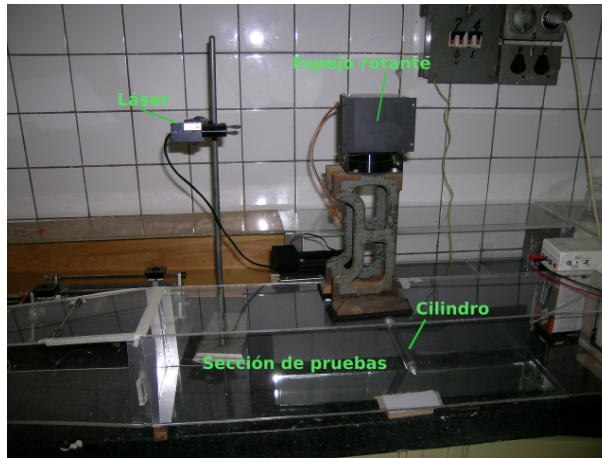


Figura 5.3: Sección de prueba del túnel de viento.

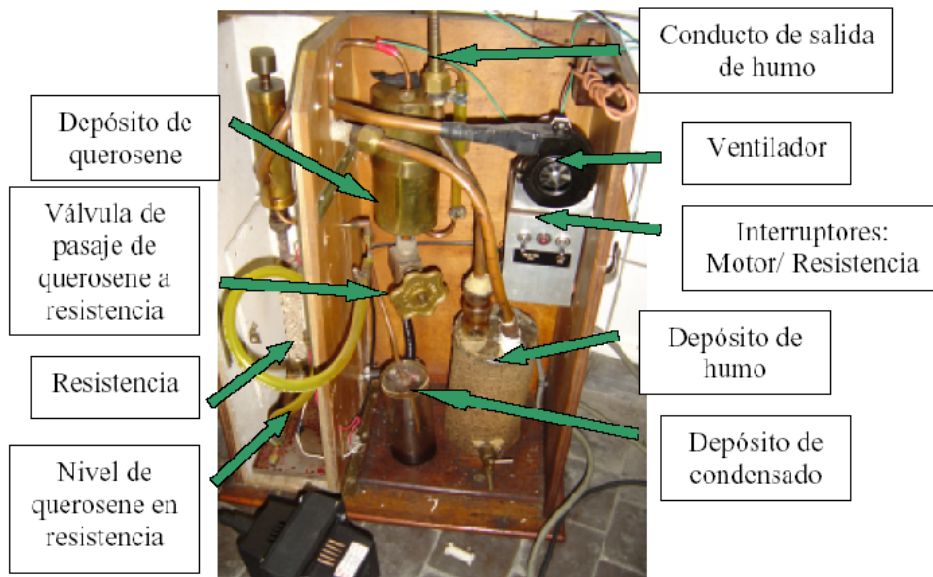


Figura 5.4: Generador de humo de kerosén.

por la influencia del peso y del volumen sobre la trayectoria de las mismas. El tamaño de partícula que se genera en el inyector de humo instalado en nuestro laboratorio es de aproximadamente de 10 a $20\mu m$ de diámetro.

Cámara.

Las imágenes han sido adquiridas utilizando una cámara CCD Pixelfly PCO VGA. La cámara fue seleccionada de forma que su sensibilidad es mayor para regiones cercanas a la longitud de onda del láser. Son parámetros modificables:

- El modo de adquisición. La cámara puede operarse mediante un disparo de señal externo (trigger). Pueden adquirirse así imágenes en forma asincrónica o bien imágenes doble pulso (double pulsed), específicas para la utilización con PIV. Asimismo puede utilizarse la función de video continuo.
- El tamaño de las imágenes. La cámara puede barrer las imágenes saltando 1 o 3 filas de la imagen objetivo a fin de reducir el tiempo de adquisición de las mismas. También es posible el salto de 1 o 3 columnas. De esta forma se tienen imágenes desde tamaños 640x480 pixels hasta 160x120. Hemos trabajado con la configuración de video continuo ya que las imágenes doble pulso requieren la acción de un láser pulsado. Este ha sido un factor limitante respecto de las velocidades posibles a relevar en las experiencias.

5.3.3. Algoritmo PIV.

La determinación del campo de velocidades se realiza a partir del análisis de la correlación entre dos imágenes sucesivas. Para ello se divide a cada imagen en una grilla de ventanas o celdas de interrogación que contienen conjuntos de partículas. La comparación entre las celdas de una y otra imagen se realiza por medio de una función de correlación cruzada Φ :

$$\Phi_{fg}(m, n) = \sum_i \sum_j f(i, j)g(i + m, j + n) \quad (5.1)$$

donde las funciones $f(i, j)$ y $g(i, j)$ representan la distribución de intensidad luminosa entre la primera y la segunda imagen, y los desplazamientos posibles en pixels son m y n . La función de correlación presentará un máximo allí donde el desplazamiento es el más probable. Dada una celda de interrogación de tamaño cuadrado N pixels, el número de operaciones involucradas es del orden de N^4 . Teniendo en cuenta la cantidad de celdas, y la cantidad de imágenes que se utilizan para servir en una experiencia, el costo computacional es enorme. Para ello, se realiza una

transformación de las funciones f y g hacia otro espacio donde las operaciones son más sencillas. Ello se logra utilizando la transformada de Fourier. Observamos que la ecuación (5.1) corresponde a la definición de producto de convolución de dos funciones discretas, su transformada es el producto de las transformadas de las funciones. En la práctica, la transformada se realiza por medio de la transformada rápida de Fourier (FFT²).

La cantidad de partículas por celda es entre 10 a 15 para obtener las mejores instantáneas, para ello, las áreas de interrogación tienen tamaños típicos desde 16x16 hasta 128x128 pixels. Se utilizan además, sucesivos tamaños de ventanas desde un tamaño mayor hacia uno menor para refinar el cálculo en pasos múltiples sucesivos. También, para no perder áreas de correlación, se comparan los datos que pueden encontrarse en las fronteras de las celdas mediante el solapamiento entre vecinas. Los algoritmos utilizados en este trabajo pertenecen al paquete GPIV , el cual ha sido desarrollado por Gerber Van der Graaf[49] como software libre bajo el acuerdo GNU (General Public License).

Obtuvimos los mejores resultados sobre nuestros datos para una configuración de dos pasos desde el tamaño 32x32 pixels hasta 16x16 pixels, y con un solapamiento de 8 pixels. Como resultado, las imágenes de 640x480 pixels proporcionaron grillas de 77x57 puntos.

La primer salida del algoritmo se presenta en la Figura 5.5. A primera vista, pueden observarse errores de la estimación que pueden tener origen en:

- La cantidad de partículas por celda es insuficiente en la celda considerada.
- La velocidad de las partículas produce desplazamientos que escapan de la celda de interrogación.
- La iluminación no es homogénea en el dominio.
- El flujo no es perfectamente bidimensional.
- Errores numéricos.

El programa permite identificar y reparar los vectores defectuosos en cada par de imágenes. La reparación se realiza ya sea partir de la información de un segundo pico de correlación o bien a partir de información de las celdas adyacentes a la errónea. Hemos desarrollado en forma paralela una técnica que realiza esta tarea a partir de la información contenida en cada serie de imágenes. En la literatura, se denomina *gappy data* a los datos (fotos, campos) con información incompleta o con huecos, *gaps*. Por ello el nombre del método de reparación y filtrado de datos Gappy-POD que detallamos en 6.2.1.

²Fast Fourier Transform.

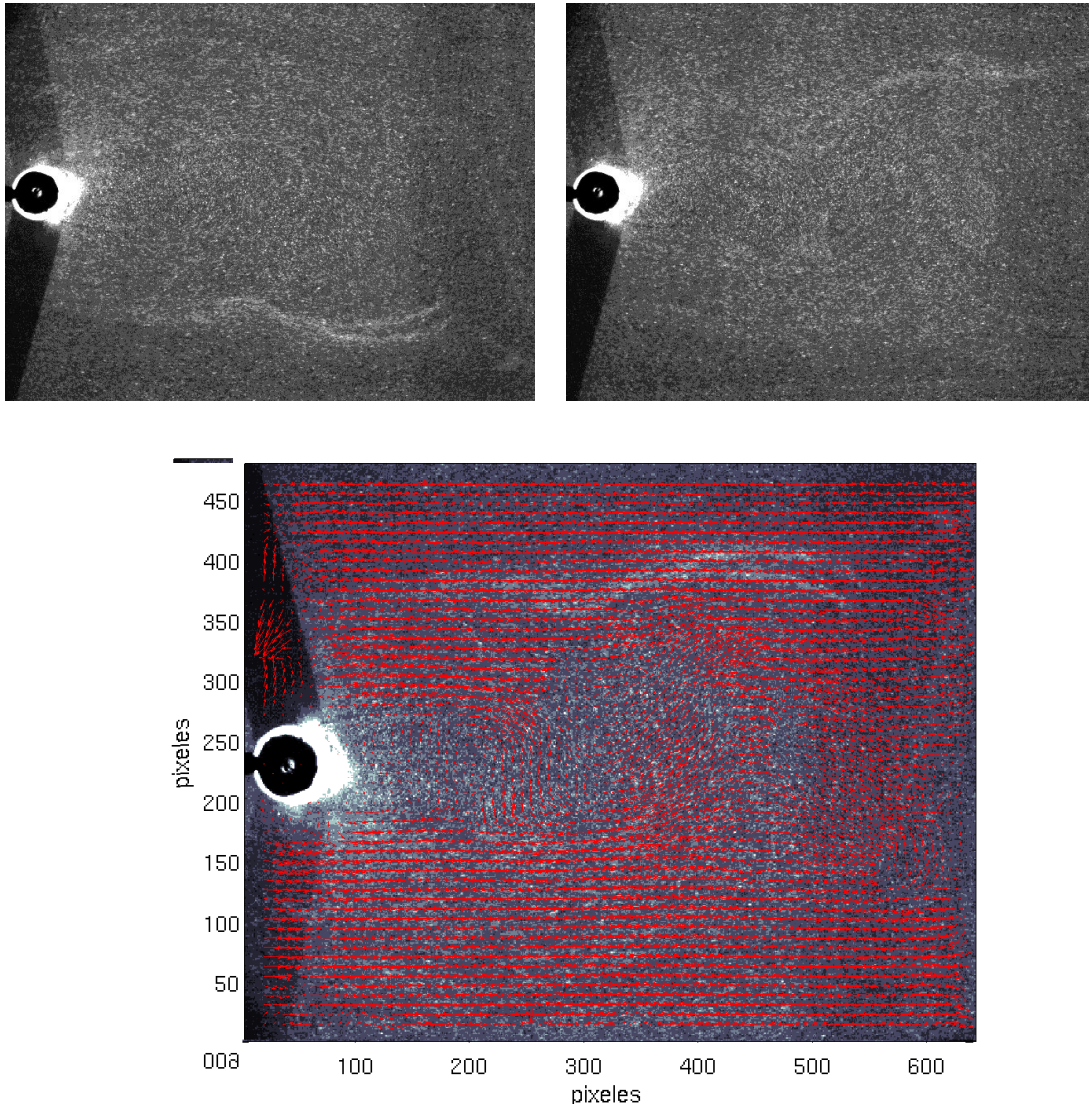


Figura 5.5: Arriba: Imágenes típicas de una adquisición PIV. Abajo: Primeros resultados del algoritmo

5.3.4. Dimensiones principales y parámetros del estudio.

Hemos dispuesto nuestro equipo PIV a fin de caracterizar el flujo alrededor de un cilindro, donde la región de interés es la estela del mismo. Para ello, establecimos el dominio del flujo en términos de diámetros del cilindro. La Figura 5.6 ilustra las dimensiones. En la práctica, es difícil poder evitar la interferencia de los cuerpos presentes en la sección de prueba con la iluminación. Es por ello que puede adver-

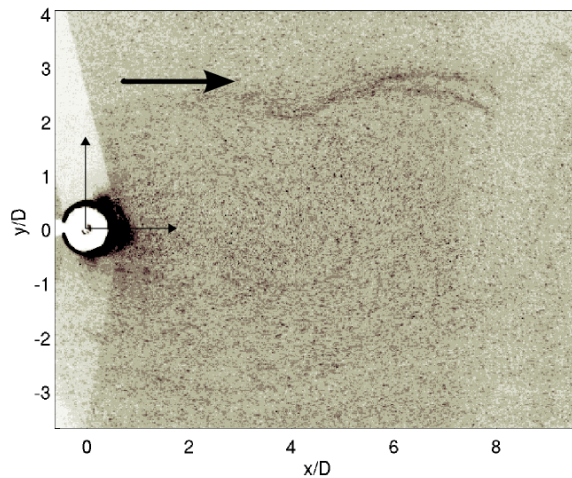


Figura 5.6: Dimensiones principales del flujo.

tirse en la Figura 5.6, una zona de sombras³. Además debemos considerar que el algoritmo de estimación tiene más errores en los extremos de las fotos, donde hay mayor probabilidad de partículas escapadas de la celda de interrogación.

Por otro lado, a la hora de elaborar modelos reducidos, el ajuste de un modelo es función también de la elección del dominio. En efecto, sabemos que cuan más complejo es un escurrimiento, serán necesarias más funciones base para describirlo. Y la complejidad aumenta cuando se agregan regiones a observar.

En consecuencia, el dominio final de los campos de velocidades medidos es algo menor al ilustrado.

La estela del flujo detrás del cilindro, tiene como frecuencia fundamental la frecuencia de desprendimiento de vórtices. Como se señaló en la Figura 1.5, el número de Strouhal es la forma adimensional de esta frecuencia. Para determinarlo, lo hacemos en forma indirecta y validamos así nuestras medidas PIV. El procedimiento es el siguiente:

- I. Se toma una muestra grande (1000 en nuestro caso) de imágenes del flujo. Se tiene un primer valor de la velocidad de la corriente libre, mediante promedios en base a estos datos.
- II. Se realiza la POD del conjunto de datos.
- III. El primer modo temporal fluctuante tiene como máximo en su espectro de frecuencias a la frecuencia fundamental, en este caso la más energética, del escurrimiento.

³La imagen, para tener mayor claridad, tiene invertidos sus tonos.

- IV. Suponemos un rango de velocidades alrededor del valor estimado en el primer paso. Realizamos la adimensionalización de la frecuencia fundamental hallada en el paso anterior para este rango. Se obtiene así una curva de valores posibles de Strouhal: $St_1(Re)$.
- V. Contrastamos la curva $St_1(Re)$ con los datos experimentales de la Figura 1.5. De la intersección de las curvas se obtiene el valor de Strouhal de nuestra experiencia. Asimismo, se deduce el número de Reynolds correspondiente.
- VI. Comparamos este valor con la salida de las medidas PIV.

Este procedimiento, sugerido por Roshko en la determinación de velocidades en el rango $49 < Re < 180$, nos sirvió para determinar con precisión las bajas velocidades de nuestro túnel de vientos.

En relación a la frecuencia fundamental, determinamos la cantidad de muestras a tomar en las experiencias. Para contar con la información de hasta 16 desprendimientos hemos adquirido conjuntos de 1000 imágenes en cada ensayo PIV.

Los 16 desprendimientos aseguraron la convergencia de los valores medios de las medidas así como también la de los modos espaciales. La convergencia puede expresarse en función de la distancia entre 2 funciones, en el caso discreto, de la distancia entre 2 vectores. Podemos expresar esto último en forma simbólica:

$$d(\varphi_1, \varphi'_1) = \|\varphi_1 - \varphi'_1\|$$

La distancia del modo φ'_i calculado con n' imágenes respecto del modo de referencia φ_i , calculado a partir de $n = 1000$ imágenes, se estima a partir de una norma. La norma euclidiana puede referirse al producto interno

$$\|\varphi_1 - \varphi'_1\|_2 = (\varphi_1 - \varphi'_1, \varphi_1 - \varphi'_1)^{1/2}$$

También puede considerarse la norma infinito, $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max |x_i|$. Como los modos espaciales son ortonormales, para valorar las diferentes distancias de acuerdo a la importancia que tienen en el flujo, multiplicamos el valor de la distancia en el modo φ_i considerado por el autovalor correspondiente λ_i . El cuadro 5.1 presenta resultados del ensayo para el flujo alrededor del cilindro sin actuación, a $Re=125$. Se verifica la convergencia en distancia con crecientes números de muestras. Gráficamente, en la Figura 5.7 puede mostrarse que la media del escurrimiento, descrita por el primer modo POD no sufre grandes variaciones:

N=	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
250	0.640	32.25	32.54	79.41	74.43
500	0.250	20.04	20.16	38.03	38.96
750	0.049	20.02	20.42	9.84	18.001
1000	0	0	0	0	0

Cuadro 5.1: Distancia euclídea ($\times 10^{-4}$) en función de las observaciones incluidas.

N=	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
250	210.50	243.48	221.70	120.11	105.72
500	82.32	154.65	139.15	57.53	55.45
750	16.10	153.02	137.37	14.89	25.61
1000	0	0	0	0	0

Cuadro 5.2: Distancia euclídea ponderada ($\times \lambda_i$) en función de las observaciones incluidas.

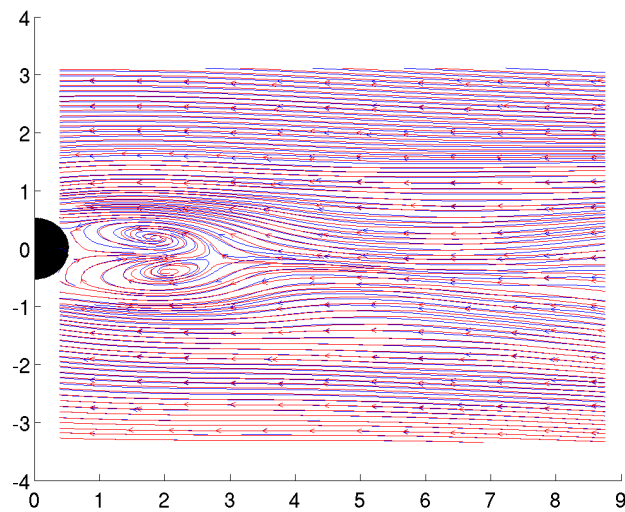


Figura 5.7: Líneas de corriente del primer modo construido a partir de: a) 250 observaciones (línea roja); b) 1000 observaciones (línea azul). $Re = 125$

5.4. Actuador mecánico

Hemos utilizado un dispositivo que permite la rotación del cilindro en un rango de velocidades angulares. Este consiste en un servo motor de corriente continua con una característica de tensión de 0-15 V que le permite alcanzar velocidades de hasta 8800 rpm. El motor se acciona con una fuente regulada de tensión variable y la frecuencia de rotación se determina con una señal de tacómetro. Un sistema de reducción de 15:1 sirve para poder trabajar con velocidades de rotación cercanas a las velocidades del escurrimiento.

Las experiencias de control del flujo bajo rotación nos sirven como marco de referencia para las experiencias con actuación electrohidrodinámica. Como detallaremos en la sección siguiente, la acción de control fue diseñada como para producir un efecto semejante al de la rotación mecánica.

5.5. Actuador electrohidrodinámico

La Figura 5.8 presenta el esquema de los actuadores electrohidrodinámicos montados sobre la superficie de un cilindro. El cilindro está hecho de polimetil metacrilato, que abreviado es llamado PMMA, es un plástico transparente, usado como material irrompible en reemplazo del cristal. Como mencionamos, el diámetro externo es de 20 mm. La barrera dieléctrica es el espesor propio del cilindro que es de 4 mm. Los electrodos son de papel de aluminio y su espesor, exagerado en el esquema, es del orden de decenas de micrones.

En nuestro estudio, el actuador EHD funciona fundamentalmente como un dispositivo que añade cantidad de movimiento en forma localizada sobre el flujo alrededor del cilindro. Una sinopsis de la física de la descarga eléctrica se presentó en la sección 2.3.1.

En el estudio de Forte et al.[45], se revisan distintos factores que determinan la eficacia del actuador DBD para inducir un flujo en una placa plana. Éstos son: la distancia entre los bordes de los electrodos, el ancho de los electrodos, la frecuencia de la tensión aplicada, la amplitud del voltaje, el material, el espesor de dieléctrico y la cantidad de electrodos. Asimismo se señala en dicho trabajo, que la introducción de electrodos adicionales conlleva la aparición de descargas no deseadas. Podemos apreciar en nuestro esquema (Figura 5.8b) que cada electrodo expuesto (azul) se halla situado entre dos electrodos bajo el dieléctrico (rojos). La descarga se diseña para que ocurra entre los electrodos más cercanos pero puede ocurrir interacción indeseada en el otro sentido. Esto puede ocurrir a partir de una descarga espuria sobre el borde más alejado del electrodo superior, y determina una disminución del flujo inducido. Una solución práctica para evitar este problema es la adición de material aislante sobre la superficie del electrodo expuesto, allí donde

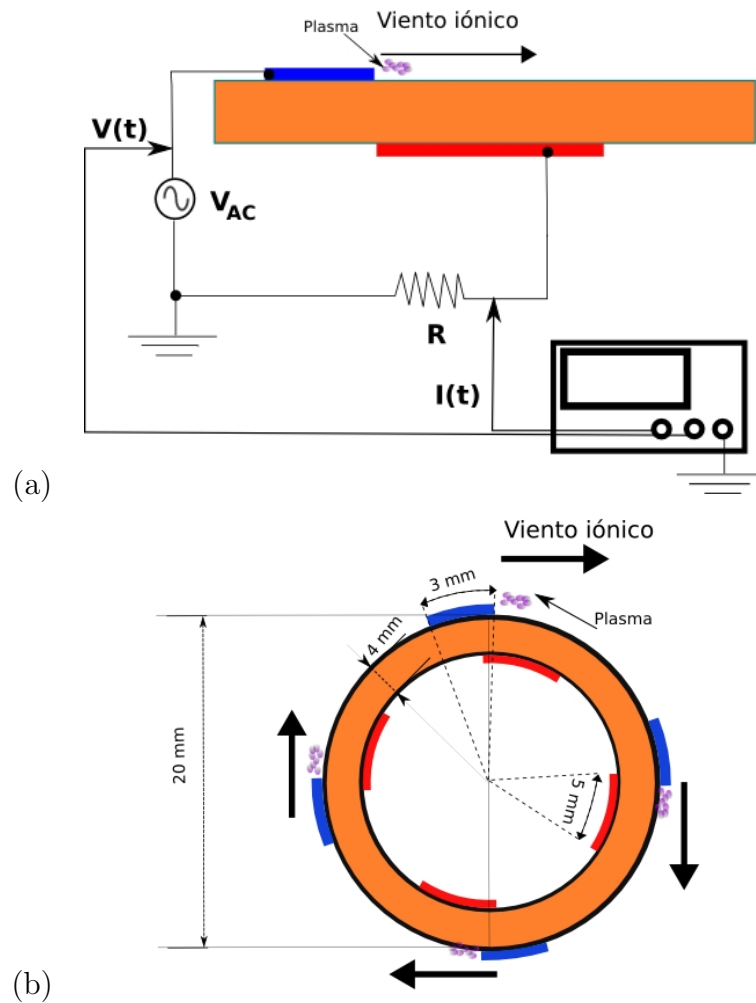


Figura 5.8: Esquema del actuador electrohidrodinámico. (a) Conexiones eléctricas para generar y medir la descarga DBD. (b) Geometría del actuador.

se desea impedir la descarga improductiva.

En base a estos resultados hemos determinado la configuración óptima en nuestra experiencia. Añadimos cinta de teflón sobre los electrodos expuestos, sobre el flanco que no interesa que tenga descarga.

Para generar la señal de alta tensión sobre el circuito, se dispusieron: en primer lugar una fuente de corriente continua regulable (0-20 Voltios), un generador de pulsos, un amplificador de señales y una bobina de ignición de auto como transformador de alta tensión. Un osciloscopio sirvió a la la medición de corriente y tensión del circuito como se ilustra en la Figura 5.8a. Las condiciones de operación fueron desde 2 kV hasta 6 kV de entrada y una frecuencia de repetición de pulso de 7.5KHz.

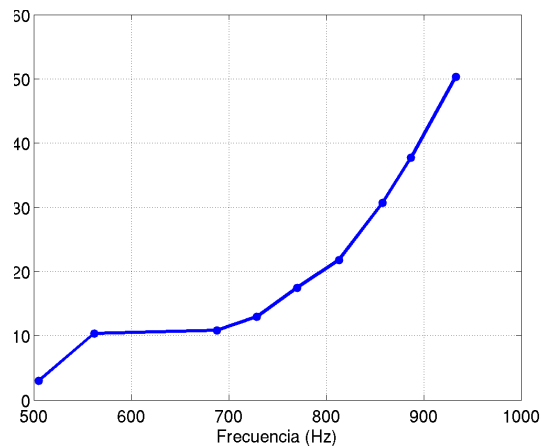


Figura 5.9: Relación entre la frecuencia de pulsos y la potencia del actuador.

Hemos aplicado el actuador EHD sobre el flujo base para distintas señales de entrada en tensión. Realizamos primeramente una clasificación basada en la potencia consumida por el actuador en el cuadro 5.3.

entrada DC	frecuencia (Hz)	Potencia(watts/m ²)
8.5	505	3
9.5	562	10.38
10	688	10.84
10.5	729	12.98
11	770	17.48
11.5	813	21.79
12	858	30.72
12.5	887	37.75
13	933	50.34

Cuadro 5.3: Frecuencia y potencia en el actuador EHD.

Para resumir el cuadro anterior, y refiriendo la potencia a la superficie del actuador según las dimensiones establecidas en 5.3.4, representamos la potencia en función de la frecuencia del pulso de la señal (Figura 5.9).

La característica tensión-corriente de la descarga corresponde a una señal de pulsos. Comprobamos en la práctica y en base a recientes resultados (ver 2.3.4), que una señal de pulsos como la aquí presentada excita preferentemente el viento iónico

en un solo sentido. Para menores valores de potencia eléctrica, pueden conseguirse los mismos efectos que con una señal sinusoidal.

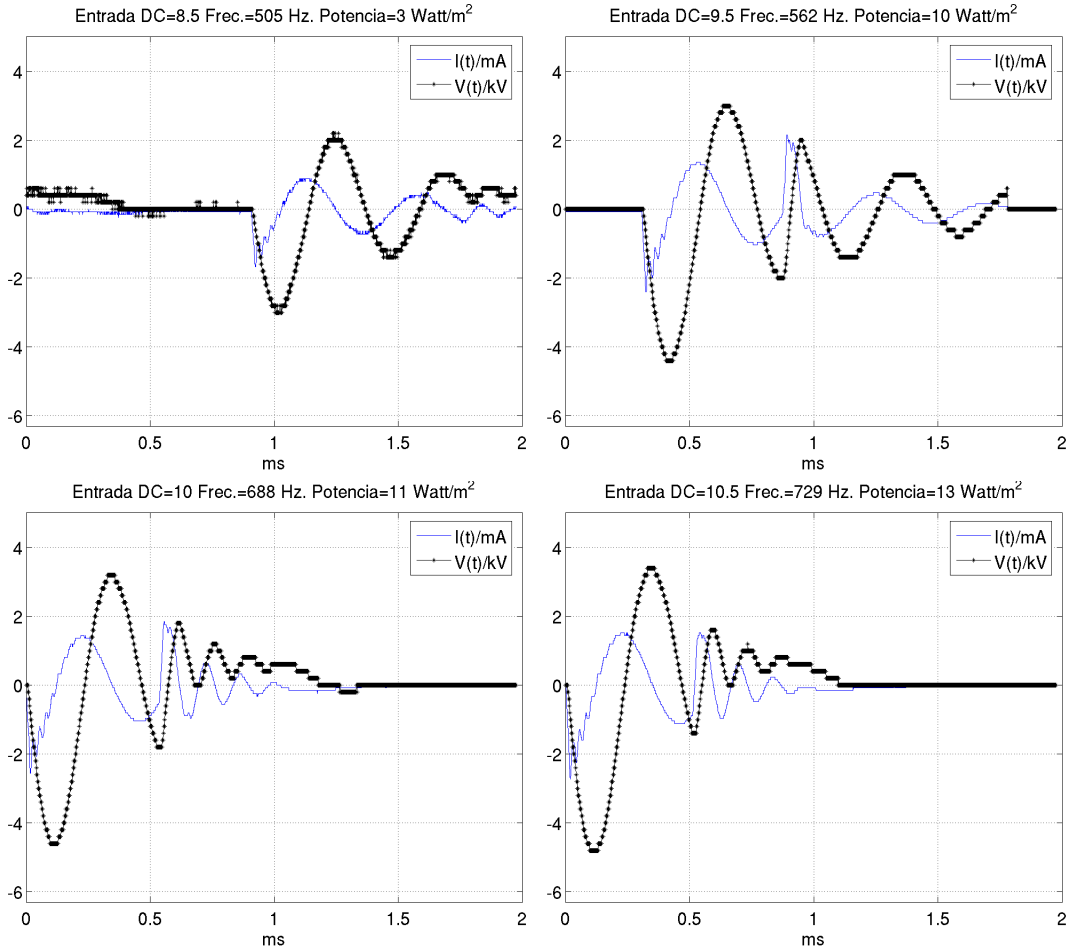


Figura 5.10: Característica de tensión y corriente del actuador EHD.

En la Figuras 5.10 y 5.11 se resume la característica de tensión y corriente en los distintos casos que hemos observado en las experiencias. Para tensiones de entrada crecientes en el circuito de baja tensión, desde 8.5V hasta 13V, la señal de pulsos toma valores crecientes de picos de tensión, y de frecuencia. Desde un punto de vista energético, cada caso es identificable en base a la frecuencia de los pulsos y a la potencia consumida por el dispositivo. La frecuencia de los pulsos la hemos establecido en base al período T , que es el soporte⁴ del pulso. La potencia N se

⁴La región del dominio en la cual la función no se anula.

calcula según $N = \frac{1}{T} \int_T I(t)V(t)dt$.

La tensión y la corriente se relacionan como en un circuito capacitivo, $I(t) \propto C \frac{dV(t)}{dt}$. Puede observarse que cuando la descarga tiene lugar, aparece dentro de la señal de corriente, una deformación de la misma con pulsos que poseen una elevada frecuencia. La descarga aparece, como puede comprobarse en los gráficos, cuando son superados umbrales de tensión aplicada entre los electrodos. El cambio mínimo que hemos podido detectar es la aparición de descarga cuando se superan 3 kV.

Desde un punto de vista fluidodinámico, el actuador excita en forma prácticamente estacionaria al flujo pues las frecuencias del fenómeno eléctrico, son mucho mayores a las asociadas a las fluctuaciones del escurrimiento. Recordando que $St \sim 0,2$, la frecuencia de desprendimiento de vórtices en base a las dimensiones es del orden del Hz.

La disposición de los electrodos sobre la superficie del cilindro ha sido efectuada para que el viento iónico producido por la DBD perturbe al flujo en forma semejante al que lo haría una rotación de la superficie del cilindro. Podemos entonces comparar la acción del dispositivo respecto de la acción mecánica y evaluar su eficacia.

Dado el carácter no intrusivo de la medición PIV, la técnica resulta ideal en la determinación de los campos en un flujo con actuadores EHD. En el dominio establecido, la estela del flujo, son despreciables las fuerzas eléctricas que pudieran ejercer preferentemente sobre las partículas de humo.

5.6. Análisis convencional de las medidas PIV

5.6.1. Flujo base

Estudiamos primeramente el flujo alrededor de un cilindro a $Re=125$. Podemos apreciar una instantánea del escurrimiento en la Figura 5.12.

La misma fue obtenida mediante exposiciones prolongadas del receptor de la cámara, produciendo trazas en lugar de las partículas que se observan en la Figura 5.5. Se distingue el desprendimiento alternado de los vórtices de von Karman en forma similar a la descrita en la Introducción en la Figura 1.4. Una sucesión de imágenes, en la Figura 5.13, ilustra el desprendimiento que observamos.

Con la configuración adoptada tal como se mostró en la Figura 5.6, adquirimos 1000 imágenes sucesivas para procesarlas con PIV. La cantidad de imágenes permite estimar con precisión el valor medio del campo vectorial del flujo, tal como se mostró en 5.3.4. Para determinar la velocidad del escurrimiento, hemos utilizado

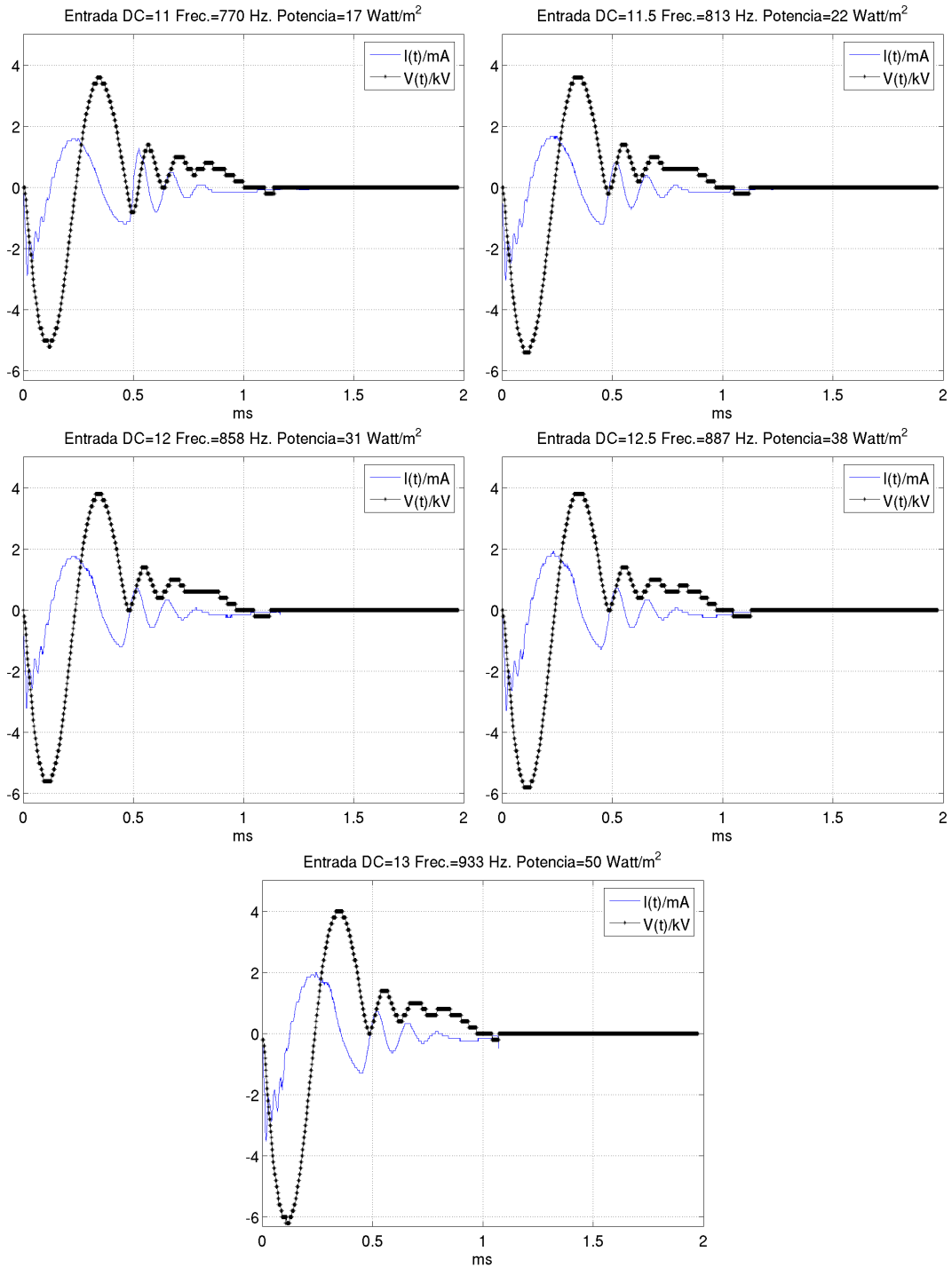


Figura 5.11: Característica de tensión y corriente del actuador EHD.(continuación)

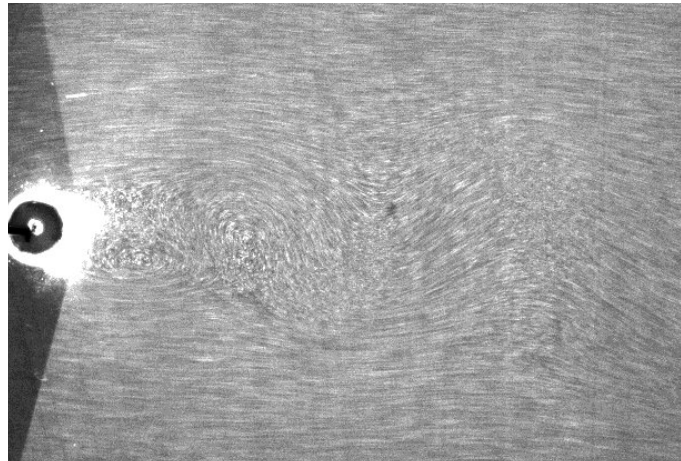


Figura 5.12: Visualización del flujo sin actuación. $Re = 125$

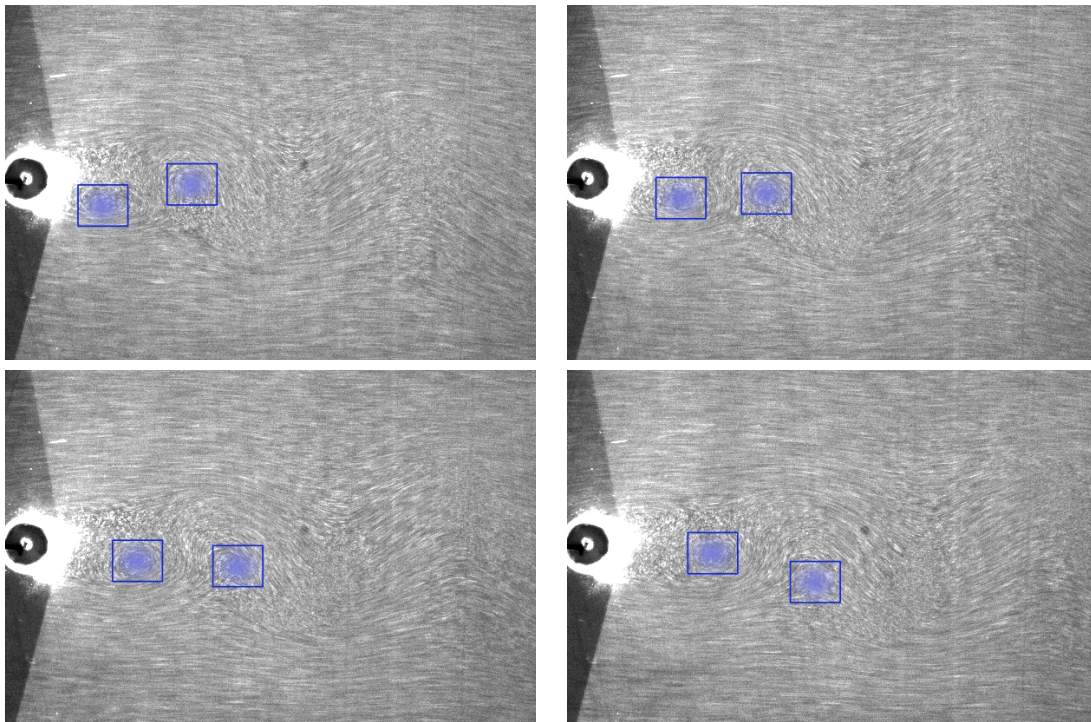


Figura 5.13: Secuencia de visualización para el flujo sin actuación a $Re = 125$. Se identifican los vórtices (azul) a partir de las líneas de emisión generadas por las trazas de las partículas de humo.

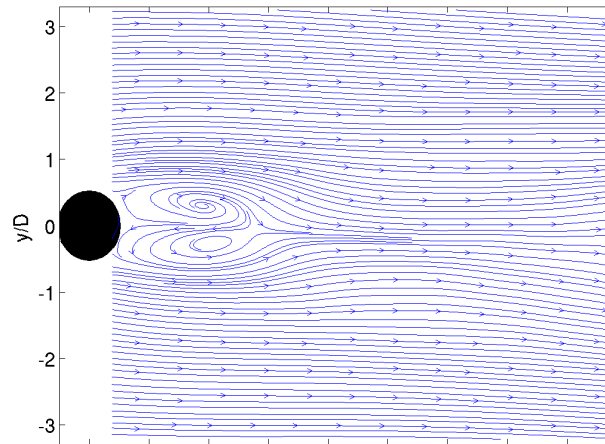


Figura 5.14: Líneas de corriente. Campo de velocidades medio. $Re = 125$

el método indirecto descrito en la sección 5.3.4. De acuerdo al dominio definido, presentamos el campo de velocidades medio, representado por medio de sus líneas de corriente, correspondiente en la Figura 5.14.

5.6.2. Características del flujo bajo la rotación mecánica

Se estudió el escurrimiento alrededor del cilindro bajo distintas velocidades de rotación. Para ello, definimos el parámetro de rotación adimensional

$$\gamma = \frac{2\pi f D}{R_T} \frac{1}{2 U_\infty}$$

donde f es la frecuencia de rotación del motor, $R_T = 15$ es la relación de transmisión, D el diámetro del cilindro, U_∞ la velocidad de corriente libre del experimento.. De acuerdo a esta relación, resumimos los casos estudiados en las experiencias en el cuadro 5.4.

γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8	γ_9
1.21	1.42	1.68	1.93	2.18	2.43	2.68	2.93	3.18

Cuadro 5.4: Velocidades de rotación ensayadas.

En las Figuras 5.15 y 5.16 se representan las líneas de corriente que corresponden a los campos de velocidades medios en los distintos regímenes de rotación.

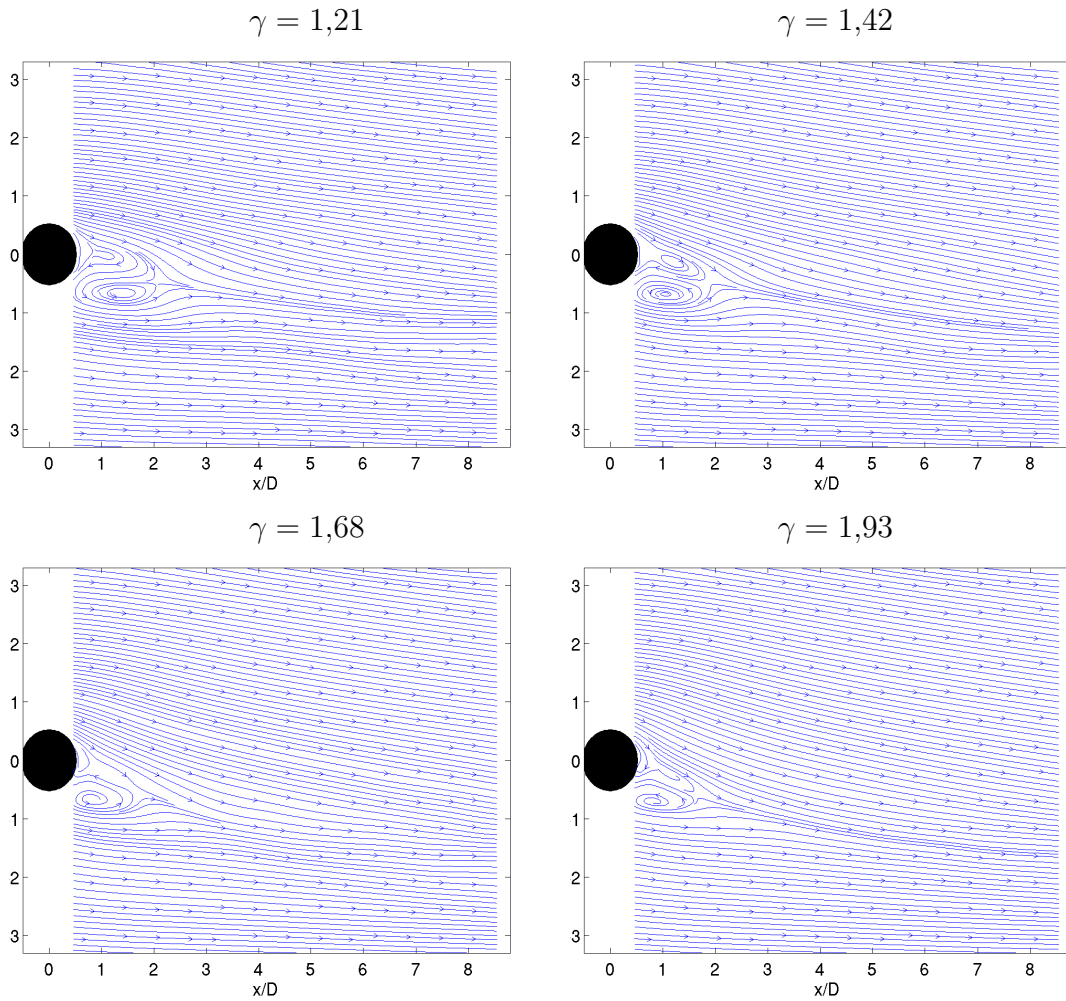


Figura 5.15: Líneas de corriente de los campos de velocidades medios bajo actuación mecánica. $Re = 125$.

Para el $Re = 125$, se observa, como es esperable, la circulación progresiva de la velocidad alrededor del cilindro en el escurrimiento con el aumento de la velocidad de rotación. El camino de vórtices de von Karman sufre la rotación de su eje de simetría. A partir de un valor umbral de γ , cesa el desprendimiento de vórtices en la estela. En nuestras experiencias, situamos dicho valor entre $1,93 < \gamma < 2,18$. En la bibliografía, en las experiencias de Jaminet y Van Atta(1969)[66], así como en el estudio realizado por Stojkovic et al.(2003)[122] los datos para la supresión del desprendimiento varían entre 1.90 y 2 para el mismo valor de Reynolds.

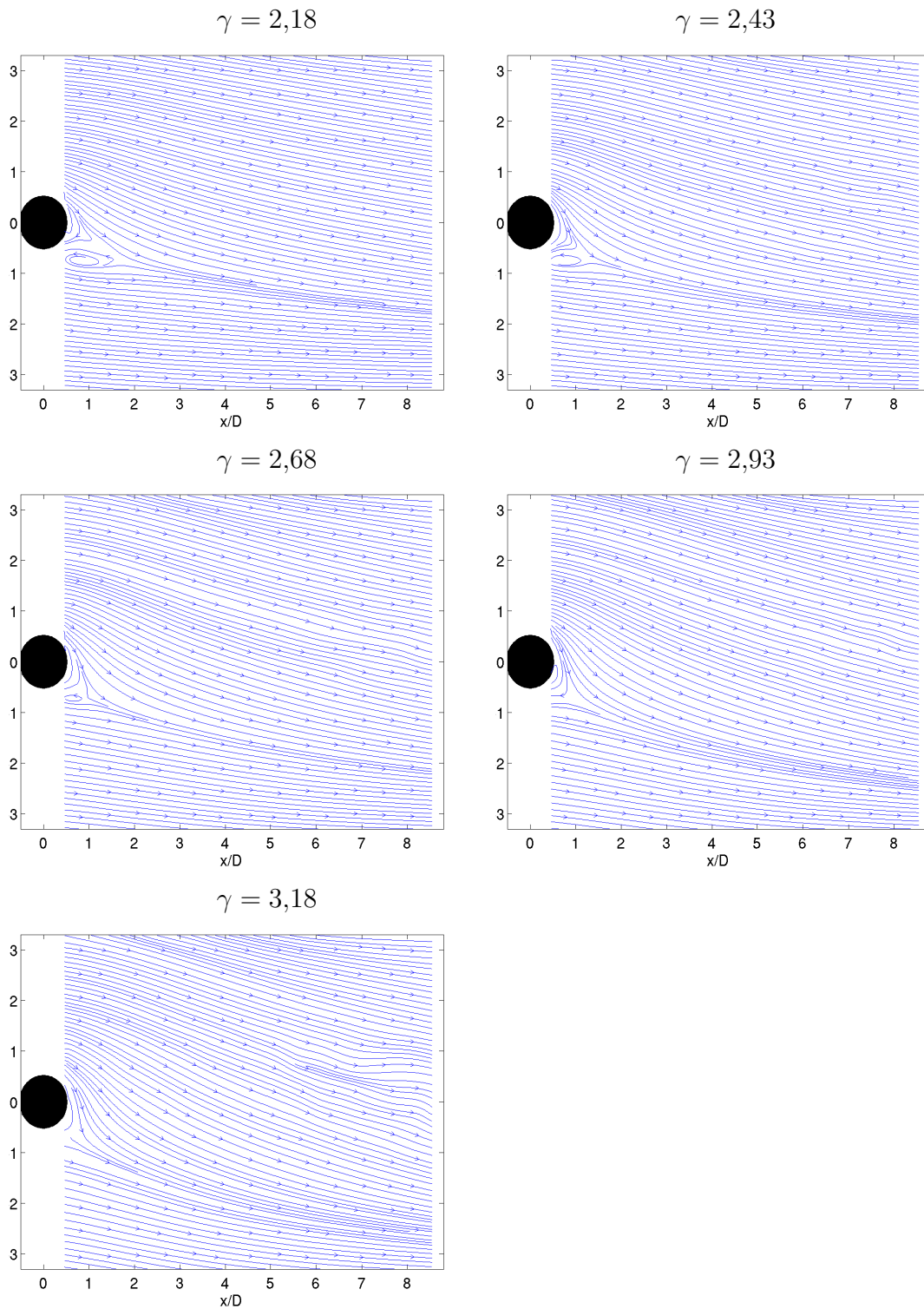


Figura 5.16: Líneas de corriente de los campos de velocidades medios bajo actuación mecánica. $Re = 125$ (continuación)

5.6.3. Características del flujo bajo el efecto de la actuación EHD

De manera similar que para el escurrimiento base, hemos obtenido instantáneas de la visualización de los flujos perturbados (Figuras 5.17, 5.18 y 5.19). En base a ello, detectamos los cambios mínimos a partir de la observación del escurrimiento. Para los primeros casos, Figura 5.17, distinguimos la aceleración producida en la capa de corte superior del flujo como una traza luminosa (*streakline*) que se acentúa al aumentar la tensión. Para valores superiores de tensión, Figura 5.18 observamos la progresiva reducción y la anulación de la zona de recirculación detrás del cilindro así como la deflexión del eje de desprendimiento. Las imágenes de la Figura 5.19 corresponden a flujos libres de desprendimientos en la estela cercana y se comprueba que el aumento de la potencia entregada produce un viento iónico mayor que deflecta las líneas de corriente de manera más pronunciada. Hemos asimismo conducidos medidas con valores de potencia eléctrica por encima de $50,34 \text{ watts/m}^2$ pero el resultado es que la velocidad inducida es tan fuerte que los efectos de proximidad de las paredes del túnel de viento comienzan a ser importantes.

El primer tratamiento de medidas PIV que permite apreciar los cambios fluidodinámicos ante la aplicación de EHD, es la obtención de los campos medios cuyas líneas de corriente se muestran en las Figuras 5.20 y 5.21. Puede observarse que el actuador al ser activado produce estrechamiento de las líneas de corriente en la región por encima del eje del cilindro mientras en la región inferior se nota un ensanchamiento. Esto prueba que la circulación de la velocidad del flujo alrededor del cuerpo, producida por el viento iónico inducido por la descarga es creciente en el escurrimiento para potencias mayores.

Se verifica asimismo a lo largo del análisis de los campos medios de las medidas PIV, que la región de recirculación tiende a disminuir con la potencia. Ocurre también una modificación del camino de vórtices de von Karman, que ve su eje formando un ángulo no nulo con la dirección principal del escurrimientos. A medida que se aumenta la potencia del actuador, confirmamos nuestras observaciones de la visualización del flujo que, a partir de un valor umbral de descarga, se produce la anulación del desprendimiento alternado de vórtices. Esto ocurre en un intervalo comprendido entre los valores de 12.98 y 17.48 watts/m^2 para el valor de $Re = 125$. A partir de 17.48 watts/m^2 el escurrimiento es prácticamente libre de desprendimientos.



Figura 5.17: Visualización del flujo bajo actuación EHD. $Re = 125$

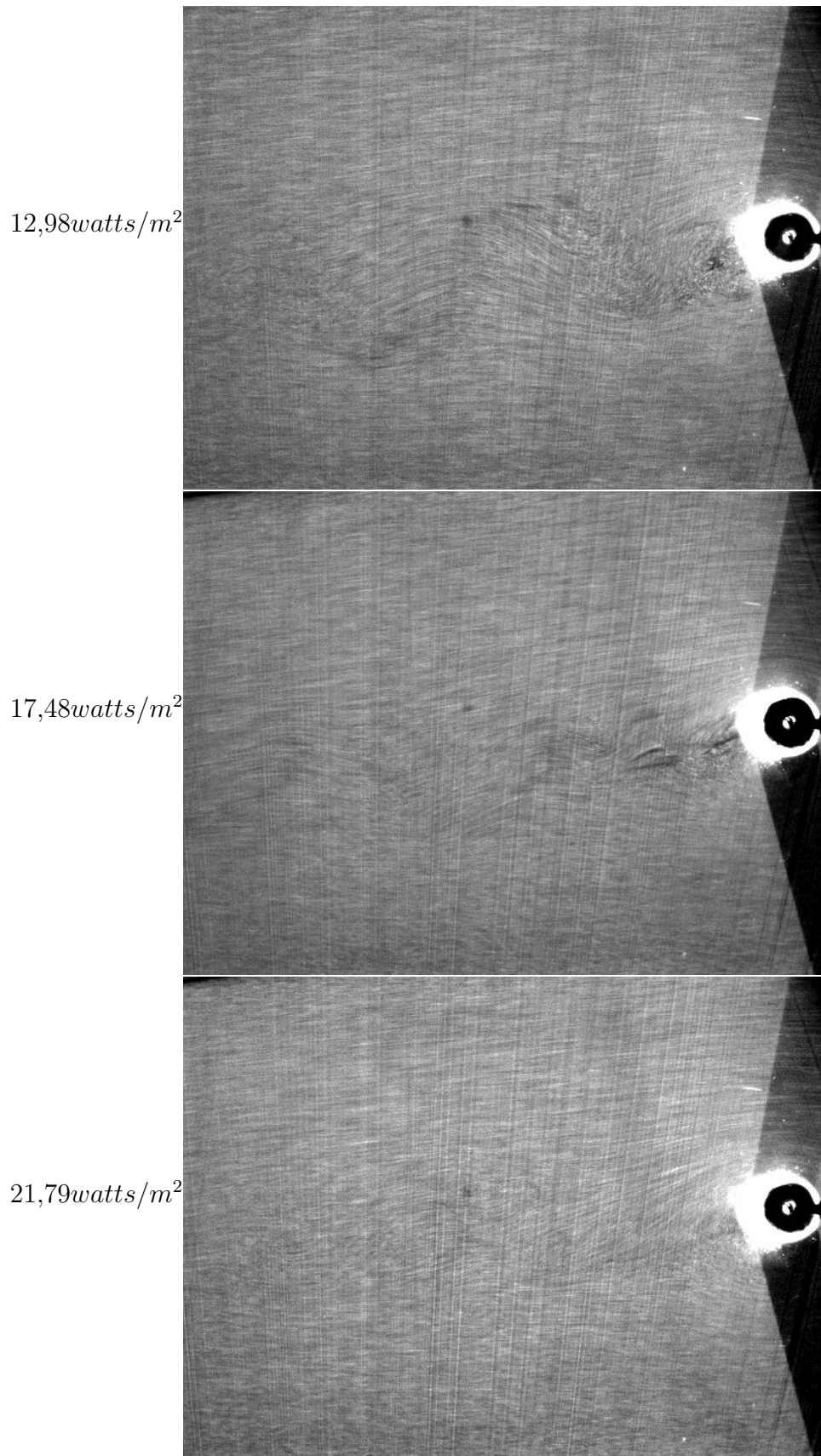


Figura 5.18: Visualización del flujo bajo actuación EHD. $Re = 125$

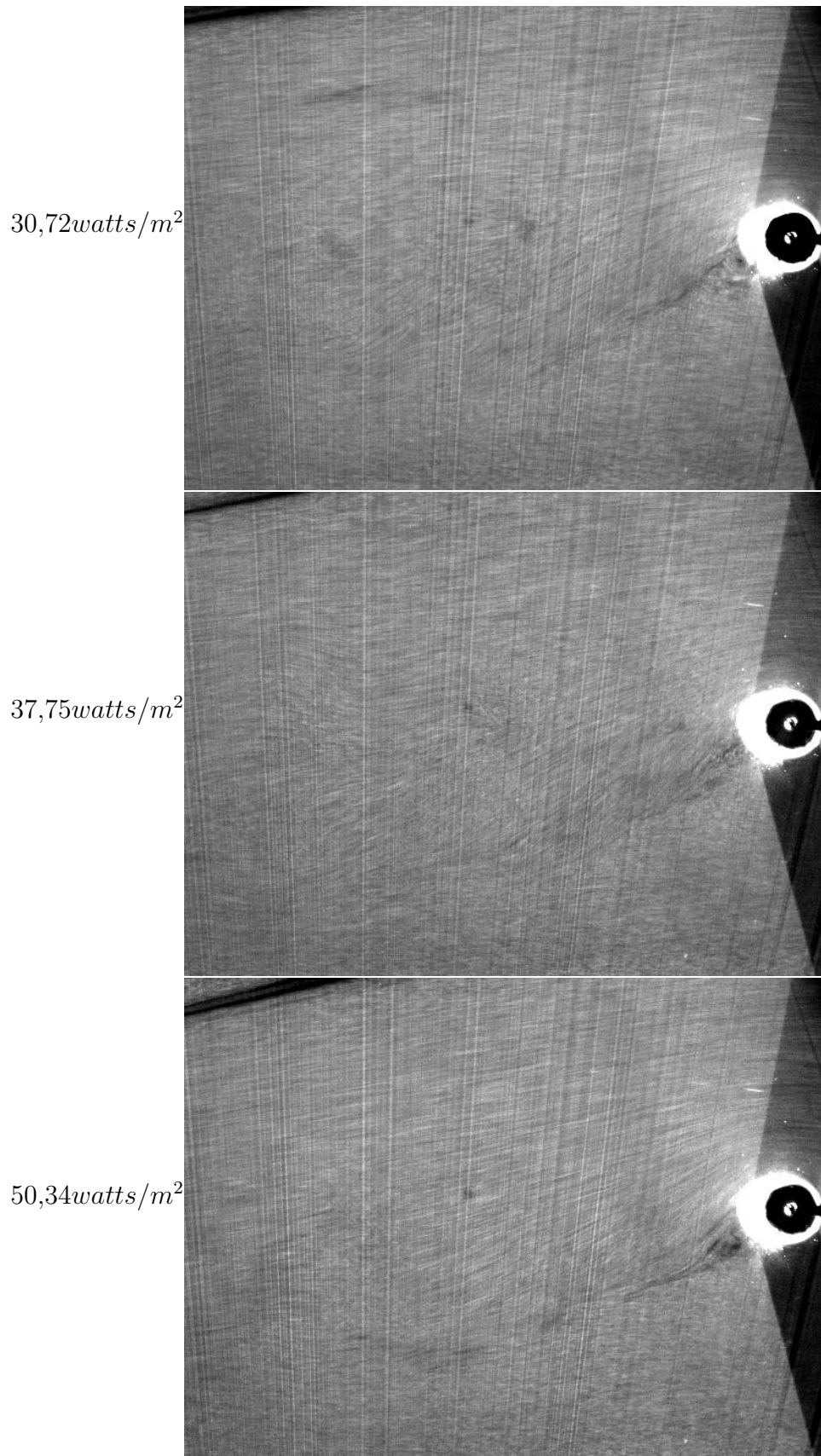


Figura 5.19: Visualización del flujo bajo actuación EHD. $Re = 125$

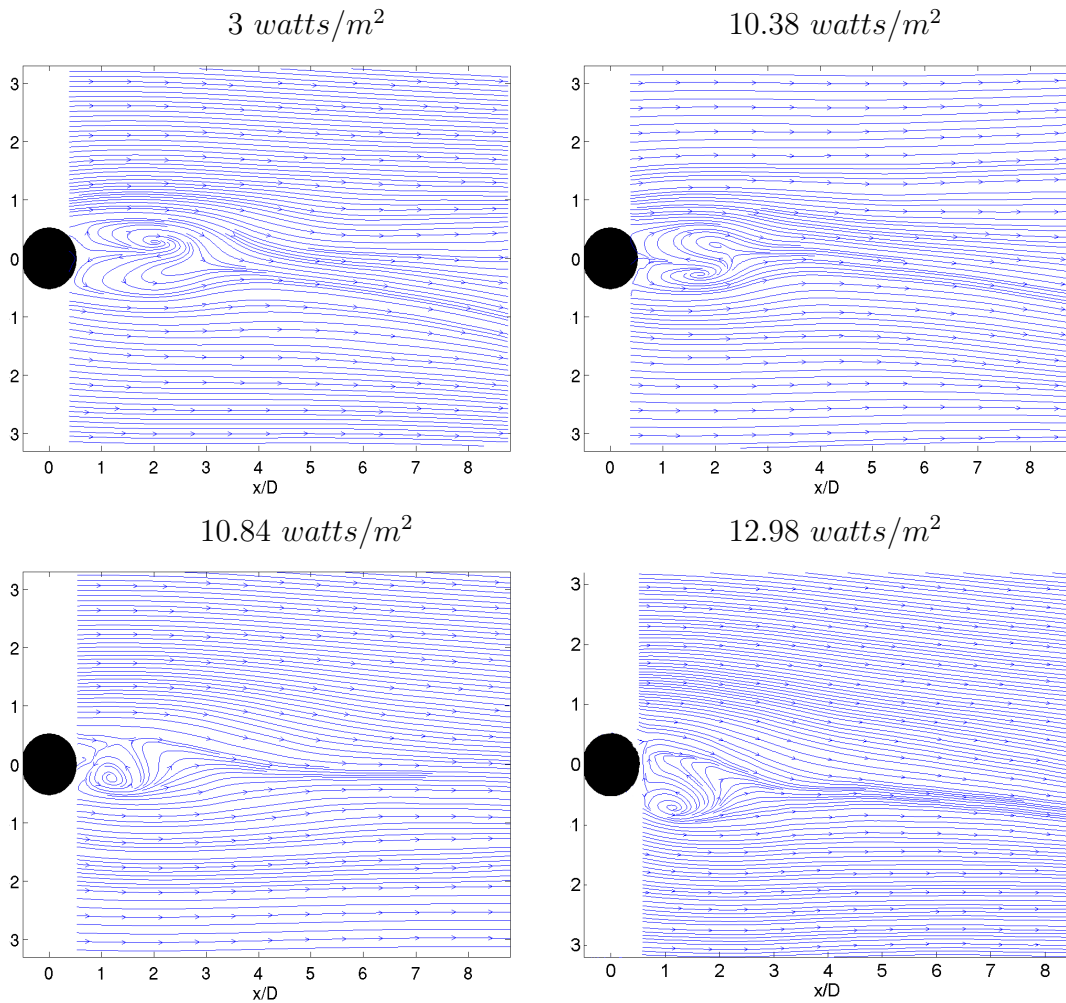


Figura 5.20: Líneas de corriente de los campos de velocidades medios bajo actuación EHD. $Re = 125$

5.6.4. Comparación del flujo bajo ambos tipos de actuación.

La semejanza con respecto al flujo bajo acción eléctrica es apreciable. Podemos en primer lugar, establecer el umbral de desprendimiento en uno y otro caso de actuación. Otra forma simplificada de encontrar analogías entre los escurrimientos consiste en proyectar ortogonalmente los campos medios de los casos EHD sobre los casos de rotación mecánica como lo hemos realizado en el trabajo Gronskis et al. (2006)[54]. Ésta, junto a otra técnica de extensión de bases POD serán estudiadas en el próximo Capítulo en 6.5.2.

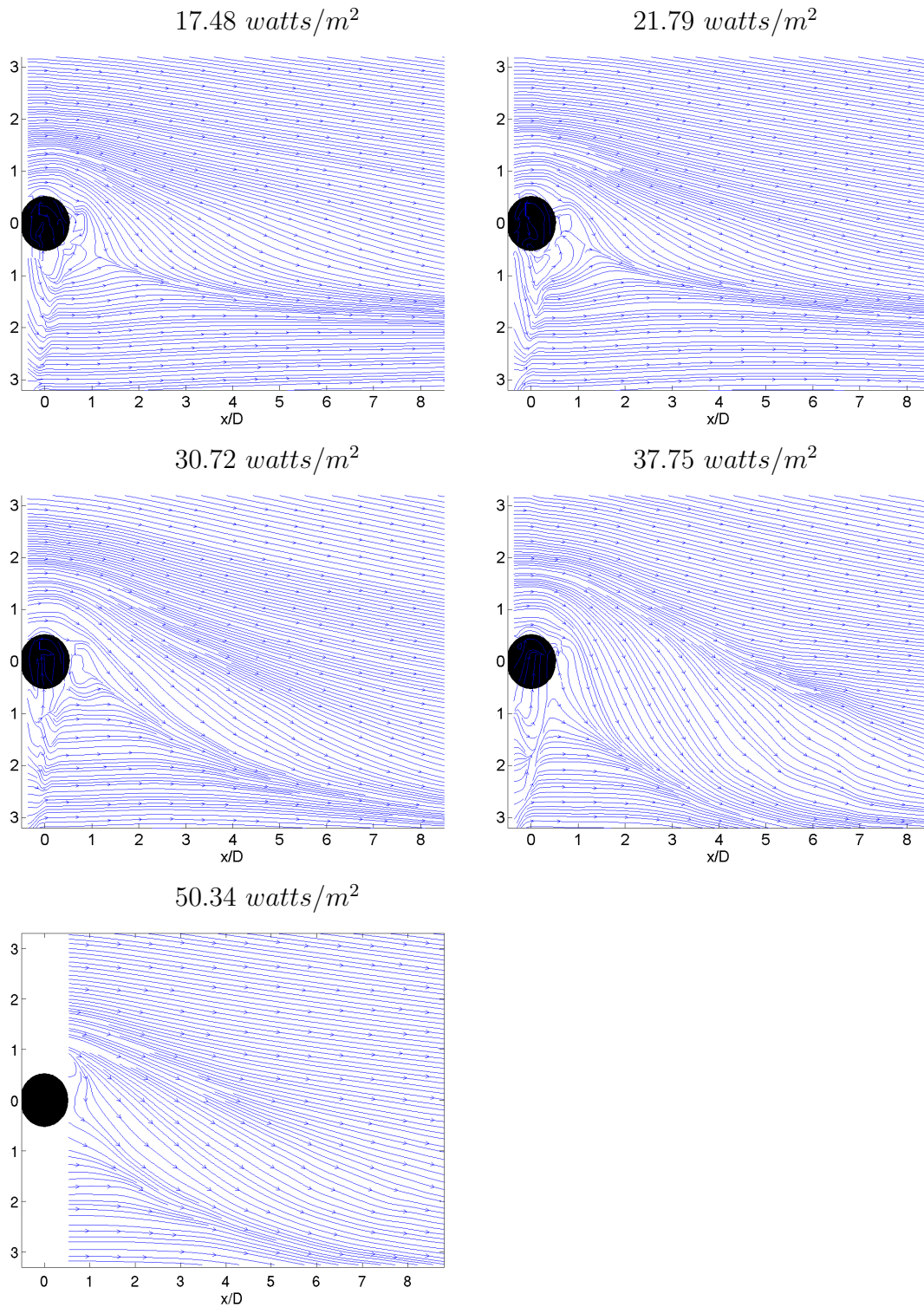


Figura 5.21: Líneas de corriente de los campos de velocidades medios bajo actuación EHD, $Re = 125$ (continuación).

5.7. Conclusiones

Hemos descrito en este capítulo, el equipo y las técnicas utilizadas en la adquisición de datos experimentales del flujo alrededor de un cilindro a bajos números de Reynolds, y del flujo perturbado por la acción electrohidrodinámica y mecánica. Fueron presentados los fundamentos de la técnica PIV para la determinación de campos de velocidades instantáneos. Estos campos constituyen las funciones pertenecientes al espacio de Hilbert analizadas en el Capítulo 3 que sirven para la construcción de los modelos reducidos basados en POD.

Por otro lado, hemos realizado las medidas eléctricas que permiten caracterizar los regímenes de trabajo del actuador. Asimismo, hemos estudiado los cambios fluidodinámicos generados por el actuador electrohidrodinámico descrito en la sección 5.8 a partir de la visualización y de la estimación de los campos de velocidades medio de cada flujo.

Paralelamente, hemos presentado resultados para el estudio de la acción de una rotación mecánica sobre el flujo. La observación de los campos de velocidades medios permite trazar analogías entre los escurrimientos, tal como fue nuestra intención al realizar el diseño del actuador EHD.

Por último, la aplicación de la teoría de modelos reducidos, nos permitirá el empleo de una técnica de optimización. Analizaremos en este contexto, la actuación desarrollada para el flujo con rotación mecánica, y su relación con el flujo bajo actuación EHD.

Capítulo 6

Modelos reducidos a partir de datos experimentales

6.1. Introducción

A continuación, exponemos distintas aplicaciones que surgen con un adecuado post tratamiento de los primeros resultados de las experiencias. Por empezar, se presenta una técnica de filtrado de imágenes PIV basada en POD. Las imágenes del flujo base y el flujo actuado han sido procesadas según esta técnica.

Se estudia, luego, la capacidad de los modelos reducidos de reconstruir los escurrimientos que corresponden al flujo base y al actuador. A partir del método POD Asimilación, puede eliminarse parte del ruido experimental de los campos de velocidades medidos y, además, se consigue la determinación de campos entre los instantes dato. Por otra parte, el planteo de los modelos reducidos POD-Asimilación permiten conocer predicciones a largo plazo de las estructuras más energéticas de los flujos.

A fin de identificar la acción de control en el flujo, se desarrolla un método basado en la descomposición POD que logra extraer una función espacial de control a partir de los datos del flujo base y los del flujo bajo actuación. Es posible, por lo tanto, emplear una técnica que permite optimizar características del escurrimiento, particularmente la disipación vinculada a las fluctuaciones de la velocidad, respecto del gasto energético que significa el control.

Se realiza por último una comparación entre la acción mecánica y la acción electrohidrodinámica. En este sentido, se analizan los cambios fluidodinámicos introducidos por la acción del actuador mecánico.

6.2. Aplicaciones de los modelos reducidos al filtrado.

6.2.1. Filtrado de datos Gappy-POD

La técnica fue adaptada a partir de un trabajo de Everson y Sirovich [38] sobre la aplicación de POD sobre imágenes fotográficas incompletas. Asimismo, Willcox[139] se sirvió del planteo para simular sensores y para estimar flujos no estacionarios. Gunes et al.[55] realizaron una comparación con una técnica de interpolación de datos, denominada Krig interpolation.

Aplicamos los fundamentos teóricos desarrollados por estos autores en el procesamiento de datos PIV. Pensamos que este es un aporte útil a la mecánica de fluidos experimental pues reemplaza filtrados convencionales basados en información de una sola imagen, donde sólo las celdas adyacentes a la errónea sirven a la reparación del dato. Por el contrario, con el filtrado Gappy-POD, se aprovecha la información estadística de todo un gran conjunto de instantáneas.

Dado un conjunto de instantáneas que, en un conjunto discreto de puntos, poseen valores que son incorrectos bajo un criterio físico de selección, es posible reconstruir dichos puntos utilizando una base POD de las instantáneas. En principio, podemos aplicar lo anterior a fotografías o bien a campos de velocidades, de vorticidad, etc. Es necesario tener una base espacial POD y, de la proyección de la instantánea sobre dicha base, se obtienen los coeficientes temporales correspondientes. La proyección se efectúa solamente en el conjunto de puntos confiables de la instantánea. Una vez obtenidos los coeficientes temporales, se procede a reemplazar en los puntos faltantes la reconstrucción con POD.

El procedimiento es sencillo cuando disponemos a priori la base POD para el fenómeno que observamos. Si para construir la base sólo disponemos de datos incompletos, la técnica es iterativa y se describe a continuación.

Como fuera observado en la Figura 5.5, puede suceder que la primera salida del algoritmo PIV presente errores experimentales que deben ser corregidos. Los errores son detectables en base a distintos criterios:

- El máximo/mínimo valor absoluto que puede alcanzar el vector velocidad en un punto.
- El máximo/mínimo valor absoluto que puede alcanzar la vorticidad en un punto.
- La relación de señal a ruido, es decir la razón entre la energía del pico de correlación del algoritmo PIV y la energía del ruido de fondo.

El primer paso a realizar es la creación de un conjunto de matrices *máscara*, $m(x_i, t_k)$, correspondientes al dominio espacial (x_i) en cada uno de los tiempos observados t_k . El criterio determina que¹

$$m(x, t_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } u(x, t_k) \text{ es un valor erróneo o faltante.} \\ 1 & \text{si } u(x, t_k) \text{ es un valor correcto.} \end{cases} \quad (6.1)$$

Establecemos que las coordenadas (x, t_i) cuyos datos son correctos, pertenecen a un conjunto S . Por otro lado, llamamos a los campos de velocidades con huecos $\tilde{u}(x, t_k)$. En términos de los campos completos y las matrices máscaras, se tiene:

$$\tilde{u}(x, t_i) = m(x, t_i)u(x, t_i).$$

Para computar el promedio temporal de $\tilde{u}(x, t_i)$, sólo consideramos que intervienen los valores correctos $(x, t_i) \in S$,

$$\tilde{u}_m(x) = \langle \tilde{u}(x, t_i) \rangle = \frac{1}{\sum m(x, t_i)} \sum_i m(x, t_i)u(x, t_i).$$

Entonces, una primera corrección de los datos erróneos se consigue reemplazando los valores erróneos o faltantes por el promedio temporal en la respectiva posición x . Los valores confiables, de coordenadas $(x, t_i) \in S$ permanecen sin cambios, para ellos $\tilde{u}^{(0)}(x, t_i) = u(x, t_i)$. por otro lado, para cada $(x, t_i) \notin S$

$$\tilde{u}^{(0)}(x, t_i) = \tilde{u}_m(x).$$

Donde el supraíndice en la variable u indica el número de iteración de la corrección. Puede realizarse, tras esta primera corrección, una descomposición POD en todo el dominio espacial del campo $\tilde{u}^{(0)}$ que provee los modos espaciales y temporales $\phi^{(0)}(x) = \{\phi_k^{(0)}(x), k = 1, \dots, M\}$ y $a^{(0)}(t_i) = \{a_k^{(0)}(t_i), k = 1 \dots, M\}$. La siguiente corrección sobre los datos $(x, t_i \notin S, \tilde{u}^{(1)}(x, t_i))$, se obtiene mediante la aproximación de cada elemento correcto del conjunto original, $\{\tilde{u}(x, t_i), \forall (x, t_i) \in S\}$, mediante una superposición de M funciones base $\phi_k^{(0)}(x)$:

$$\tilde{u}(x, t_i) = \sum_{k=1}^M a_k^{(1)}(t_i)\phi_k^{(0)}(x) \quad \forall (x, t_i) \in S,$$

$$\left(\phi_j^{(0)}, \tilde{u}(x, t_i) \right) = \left(\phi_j^{(0)}, \sum_{k=1}^M a_k^{(1)}(t_i)\phi_k^{(0)}(x) \right)$$

¹Para simplificar la notación consideramos al campo de velocidades $u(x, t) \equiv \vec{u}(x, y, t)$.

Sabiendo que las ϕ_k forman un conjunto ortonormal, podemos escribir:

$$a_j^{(1)}(t_i) = \left(\phi_j^{(0)}, \tilde{u}(x, t_i) \right) \quad \forall j = 1 \dots M; \forall (x, t_i) \in S \quad (6.2)$$

Quedan entonces determinados los valores de $a_j^{(1)}(t_i)$ que mejor aproximan a la instantánea i en los puntos del dominio $(x, t_i) \in S$. A partir del conjunto de modos temporales $a^{(1)}(t_i)$ y las funciones base $\phi^{(0)}(x)$ se calcula para todo el dominio el conjunto de valores de velocidad actualizado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(1)}(x, t_i) &= \sum_{k=1}^M a_k^{(1)}(t_i) \phi_k^{(0)}(x) \quad \forall (x, t_i) \in S \\ \tilde{u}^{(1)}(x, t_i) &= u(x, t_i) \quad \forall (x, t_i) \in S \end{aligned}$$

Estamos en condiciones de realizar una nueva descomposición POD. El proceso es repetido en forma iterativa hasta alcanzar un criterio de convergencia. Adoptamos en la práctica² en la iteración n , $\|u_n - u_{n-1}\|_\infty < \epsilon$. Hemos publicado en [29], el método así como las aplicaciones que presentamos a continuación.

6.2.2. Filtrado por asimilación

Además de utilizar información estadística, como resulta al aplicar el método Gappy-POD, la técnica de asimilación de datos permite mejorar el filtrado corrigiendo la información, especialmente problemas de continuidad, mediante el modelo físico que representan las ecuaciones de asimilación (4.24).

Recordando el desarrollo de la sección 4.5, disponemos de un sistema que permite reducir los ruidos de observaciones experimentales a partir del planteo de un sistema de ecuaciones diferenciales recursivas. Para ello, construimos un modelo reducido con los modos extraídos mediante POD. Dicho modelo responde a la ecuación (4.21) y ésta es, en principio, inestable por los problemas de cierre mencionados en la sección 4.3.1. En 4.5 hemos señalado como podemos **asimilar** los datos haciendo uso de una solución pista amortiguada.

6.3. Resultados de las experiencias de filtrado

6.3.1. Caso del flujo base

Las instantáneas PIV pueden evaluarse en función de los campos de vorticidad, ya que podemos evaluar más claramente la calidad de las medidas. En efecto, el error

²La norma infinito, para el vector $x = (x_1 \dots x_n)$, se define según $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$.

numérico debido al cálculo de las derivadas espaciales de los campos de velocidades PIV hace que el resultado de vorticidad sea más sensible ante la falta de precisión de la salida PIV sin filtrado.

Puede verificarse la eficacia del algoritmo de filtrado propuesto en 6.2.1, comparando la misma instantánea del escurrimiento para el caso PIV sin filtrar, filtrado Gappy-POD y Asimilación, como se muestra en la Figura 6.1. En la Figura 6.1(a), se advierten las imprecisiones de la primera salida PIV, cuyas causas hemos enumerado en 5.3.3. El resultado del filtrado Gappy-POD se aprecia en 6.1(b). La corrección de los campos se traduce en una distribución más "limpia" de la vorticidad. Se observan menos discontinuidades espaciales del campo de vorticidad a diferencia del caso anterior. En la Figura 6.1(c) se observa la reconstrucción del campo luego de aplicar la asimilación sobre un modelo a partir de la media temporal y 6 modos POD, que representan el 99 % de la energía total del flujo.

Sobre la imagen del flujo tratado con asimilación pueden observarse aún menos discontinuidades espaciales de la vorticidad. Asimismo, las discontinuidades temporales son reducidas con el método. Por lo tanto, al analizar una serie de imágenes en el tiempo, no se observan discontinuidades o "saltos" de vórtices en su desplazamiento y la difusión es más suave que en el caso en que los datos son tratados únicamente con filtrado Gappy-POD. Puede comprobarse este efecto en la secuencia de imágenes presentadas en la Figura 6.2. Se muestran allí 6 campos, correspondientes al filtrado Gappy-POD(a) y al resultado asimilado(b) respectivamente, cuya separación en el tiempo corresponde al tiempo de adquisición de imágenes $\frac{dtU}{D} = 0,0962$. Entre los mismos se distingue el caso (b) que tiene una mejor solución de continuidad.

Puede observarse también esta mejora sobre los modos temporales, que pierden parte de su ruido con la asimilación. Es la superposición de los modos temporales libres de ruido la que permite corregir eficazmente las zonas con datos erróneos.

6.3.2. Filtrados para el flujo con rotación mecánica y con actuación EHD

La técnica la aplicamos también sobre los flujos actuados. Podemos observar en la Figura 6.3 las mejoras sucesivas sobre las medidas correspondientes al flujo bajo rotación mecánica a $\gamma = 1,42$.

De igual forma, se presentan las medidas obtenidas bajo actuación EHD a una frecuencia de actuación de 729 Hz en la Figura 6.4. En este caso, la instantánea muestra también desprendimiento de vórtices aunque se observan estructuras más finas y posiblemente tridimensionales. La diferencia respecto de los casos anterior-

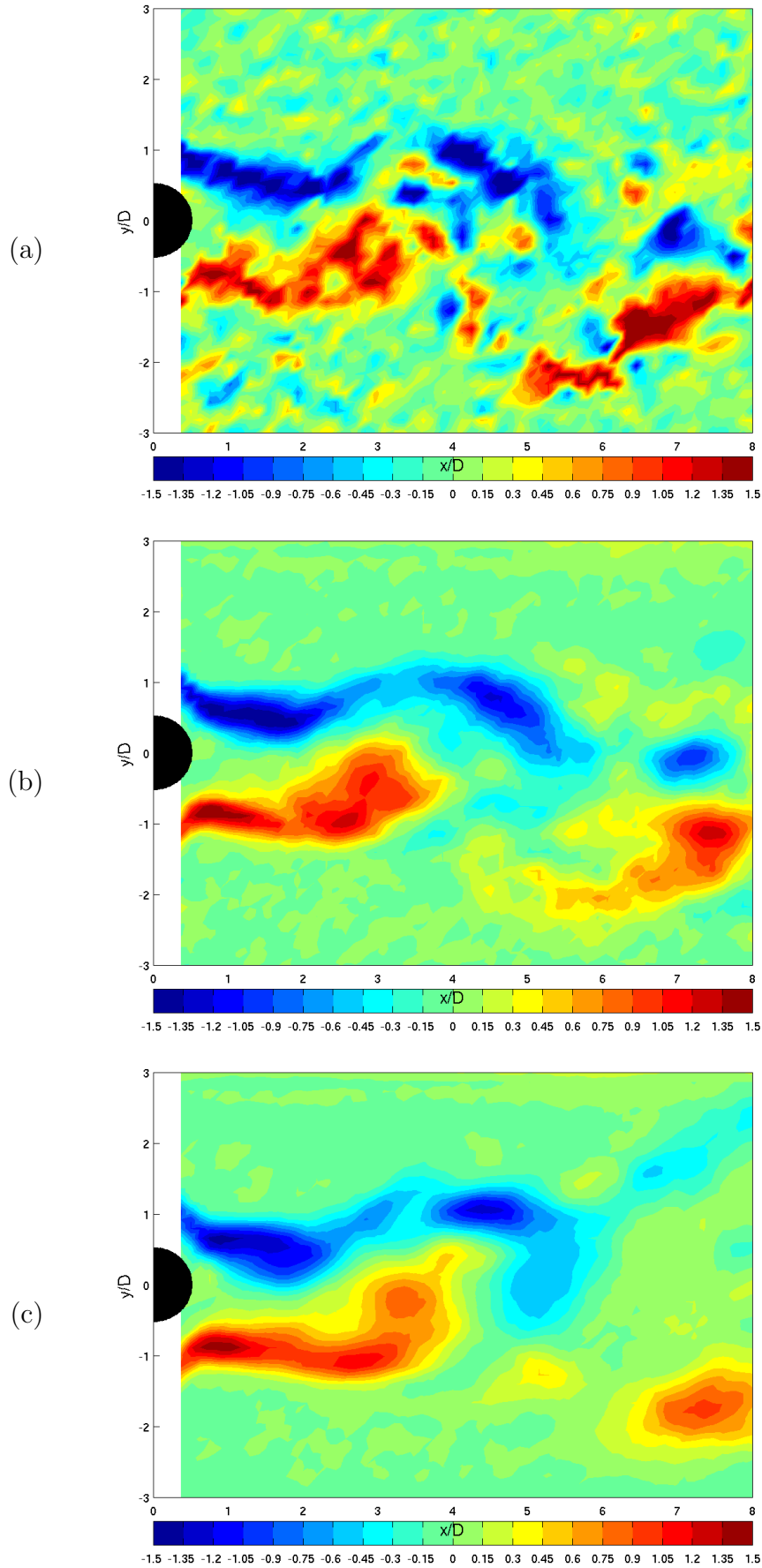


Figura 6.1: Campo de vorticidad instantáneo del flujo base. (a) Datos de salida PIV sin filtrado, (b) filtrados con POD . (c) Datos de la asimilación sobre la salida PIV.

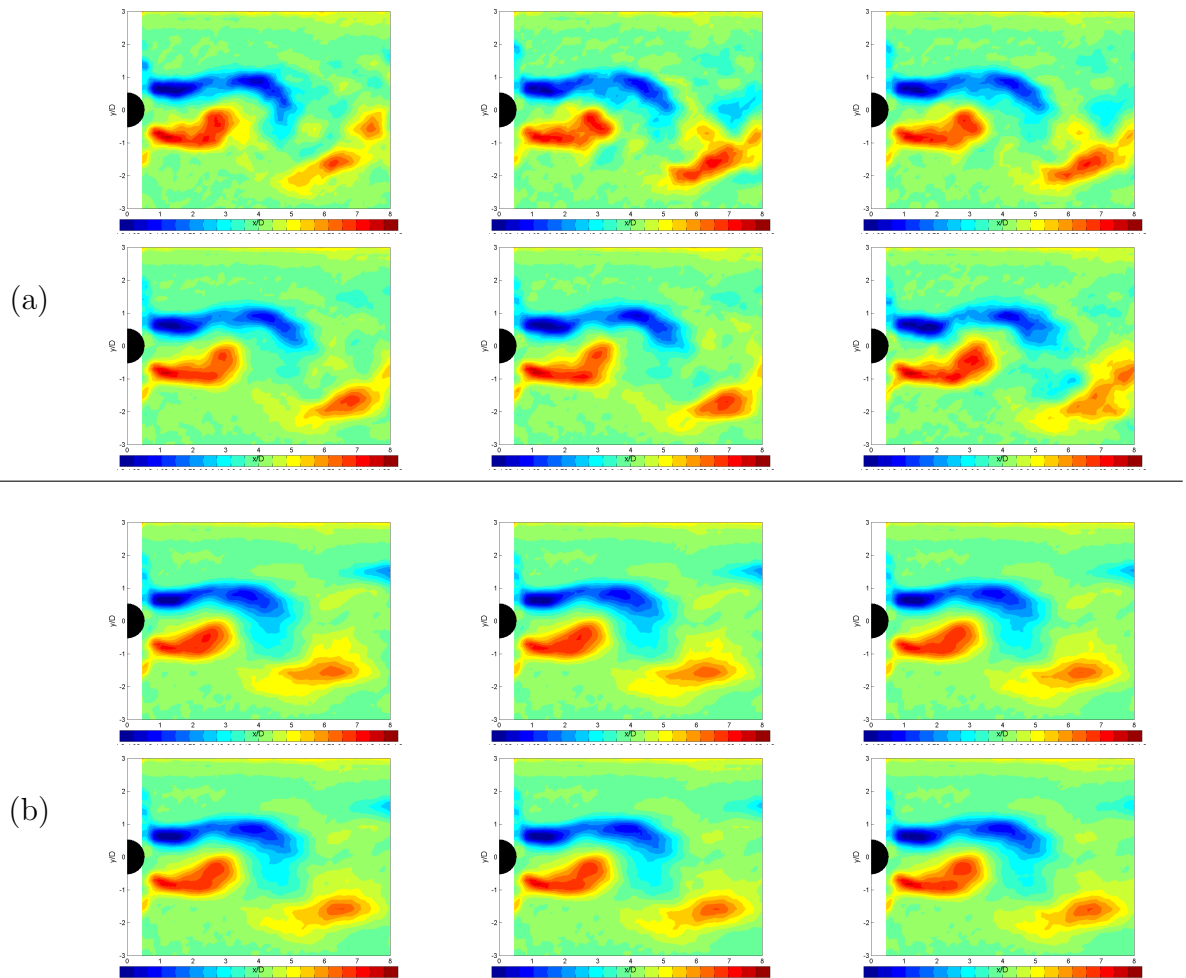


Figura 6.2: Secuencias de campos de vorticidad instantánea para el flujo alrededor de un cilindro a $Re = 125$. (a) Filtrado Gappy POD. (b) Filtrado y asimilación de datos.

res puede atribuirse al hecho de que la acción de la descarga no es perfectamente uniforme como para asegurar la completa similitud con el flujo bajo rotación mecánica.

6.4. Aplicación de modelos reducidos en la estimación de flujos fuera de los instantes datos.

La construcción de modelos reducidos con datos provenientes de PIV es de gran interés pues permite la combinación del trabajo experimental y teórico en problemas de aplicación en ingeniería. Las limitaciones de los métodos basados en POD, principalmente problemas de cierre de los sistemas de ecuaciones, ya fueron expuestas en el Capítulo 4 y resultas con el planteo de la Asimilación (4.5 y la identificación polinomial de sistemas (4.4).

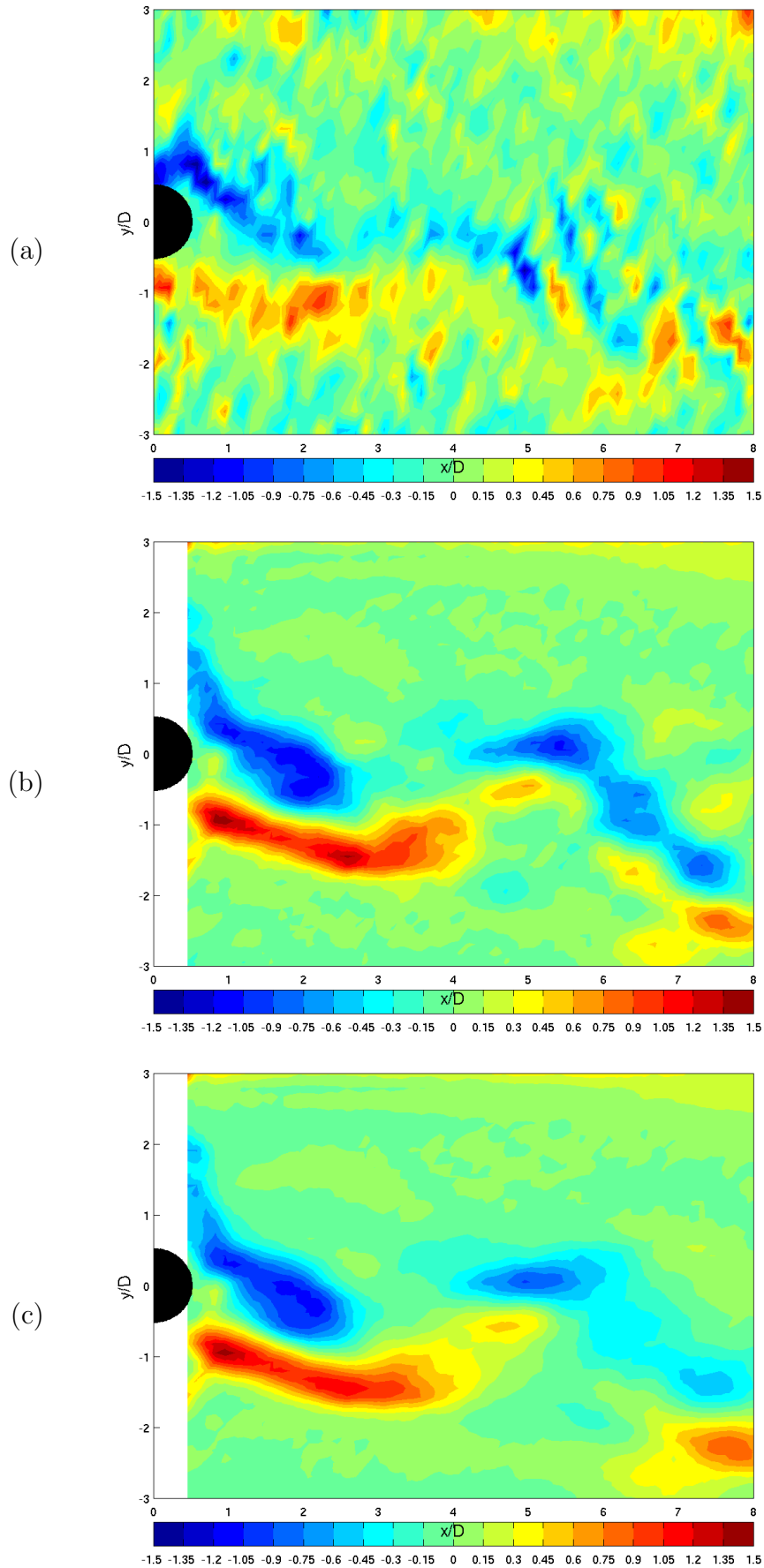
Basándonos en el modelo de asimilación de datos e identificación polinomial, hemos aplicado nuestras herramientas al conjunto de datos experimentales. Distinguimos entre éstos los casos caracterizados por el desprendimiento de vórtices y aquellos en los cuales el desprendimiento se anula debido a la acción de control y resulta, por ende, prácticamente estacionario en sentido estricto³.

6.4.1. Estimaciones para el flujo base

El conjunto de datos PIV filtrado para el flujo alrededor del cilindro se estudia de acuerdo al modelo establecido en 4.5.3. En la Figura 6.1(c) habíamos presentado una instantánea de la vorticidad del flujo que resulta de la asimilación. Hemos empleado en este primer caso la descomposición del flujo en su media temporal, que se confunde con el primer modo POD, y los siguientes 4 modos, asociados a las fluctuaciones. En estos 4 modos fluctuantes del flujo se concentra el 92,2 % de la energía cinética fluctuante total del mismo representada en la Figura 6.5. La retención de sólo 4 modos nos asegura la convergencia en la solución del modelo reducido.

Los modos espaciales pueden ser considerados como pares (φ_1, φ_2) , (φ_3, φ_4) , etc. con propiedades de simetría alternadas. Los dos modos de cada par contienen aproximadamente la misma energía cinética. Representamos gráficamente los modos espaciales en la Figura 6.6. Se observa que en forma creciente con el número de modos, se logran detallar estructuras más finas del escurrimiento. El tamaño de las celdas de cálculo de PIV limita la información que podemos disponer del flujo. No obstante, en este caso, con sólo 4 modos logramos una reconstrucción que

³No varía con el tiempo. El escurrimiento puede ser descripto con una sola instantánea.



un

Figura 6.3: Campo de vorticidad instantáneo del flujo actuado por rotación, $\gamma = 1,42$. (a) Datos de salida PIV sin filtrado, (b) filtrados con POD . (c) Datos de la asimilación sobre la salida PIV.

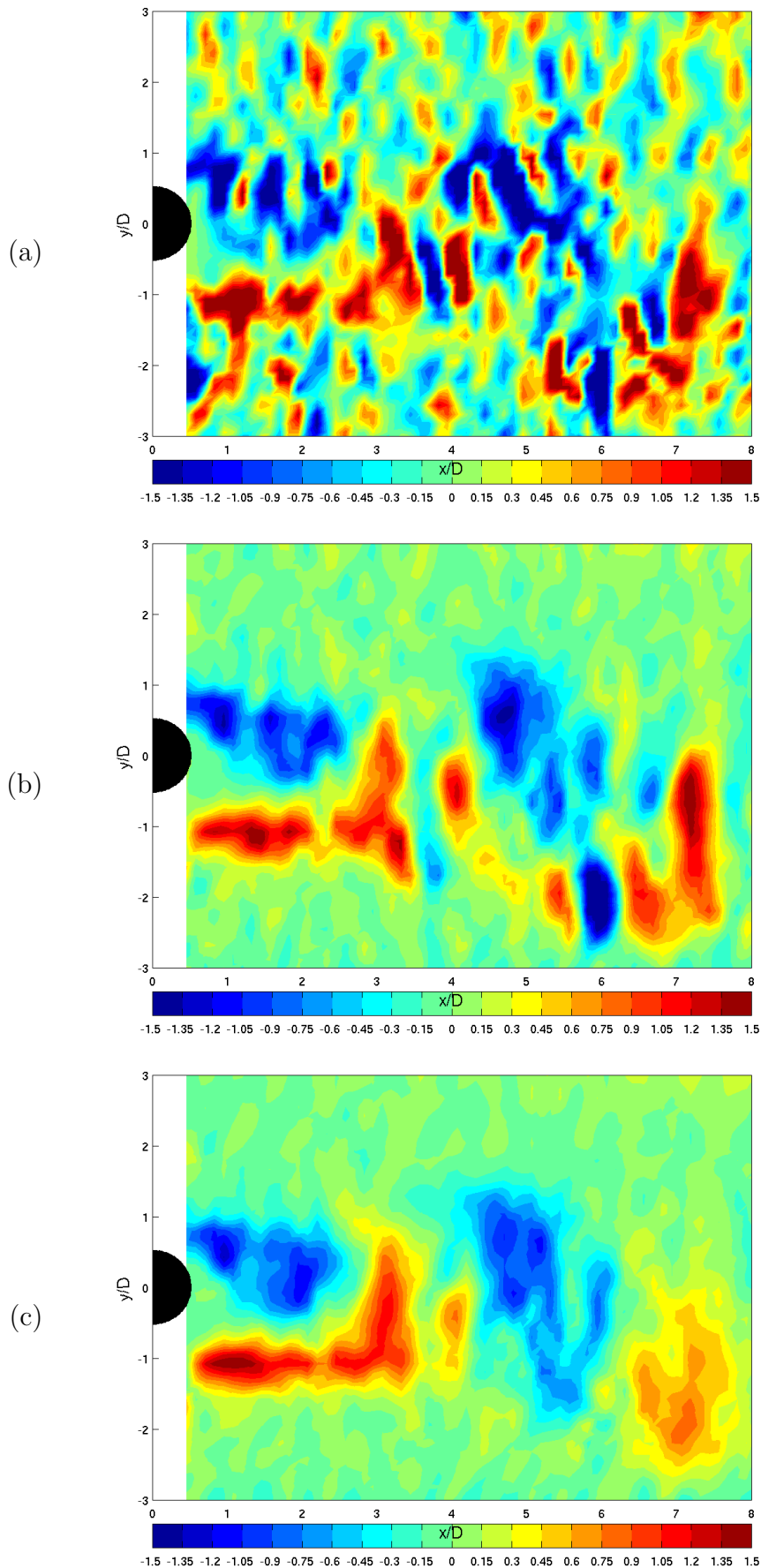


Figura 6.4: Campo de vorticidad instantáneo del flujo alrededor de un cilindro a $Re = 125$, actuado mediante EHD, $f = 729Hz$. (a) Datos de salida PIV sin filtrado, (b) filtrados con POD . (c) Datos de la asimilación sobre la salida PIV.

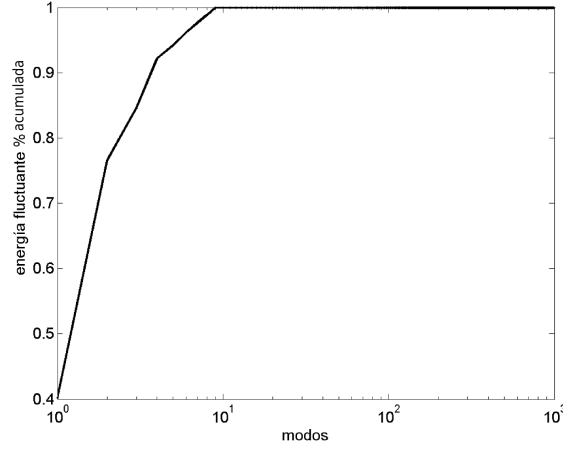


Figura 6.5: Energía cinética fluctuante acumulada.

reproduce la convección y la difusión de vórtices característicos del escurrimiento en la estela, además de concentrar casi la totalidad de la energía cinética del flujo original. Escalas menores de vórtices comienzan a ser relevantes en regímenes donde comienza el fenómeno de transición a la turbulencia en la estela.

Como hemos establecido en el Capítulo 4, las funciones temporales $a_i(t)$ asociadas a cada modo espacial $\varphi_i(x)$ conforman las variables de estado del sistema dinámico de la ecuación (4.21).

$$\frac{da_k(t)}{dt} = i_k + \sum_{i=1}^s l_{ik} a_i + \sum_{i=1}^s \sum_{j=i}^s a_i c_{ijk} a_j \quad k = 1 \cdots 4$$

La información sobre los modos temporales y sus derivadas constituyen el paso inicial para la formulación del modelo según el planteo de identificación polinomial 4.4. La cercanía en el tiempo de imágenes sucesivas posibilita la determinación de las derivadas temporales $\dot{a}_i(t)$. Del sistema 4.23 obtenemos las matrices de coeficientes para la ecuación (4.21) con la información de 17 desprendimientos de vórtices.

El paso temporal necesario para el cálculo puede estimarse mediante análisis dimensional. Es posible demostrar que la ecuación (4.21) es estable cuando sólo se consideran los efectos de difusión del flujo. La inestabilidad numérica de la ecuación se debe fundamentalmente a los términos convectivos. Por ello, para garantizar un adecuado paso temporal para la convección, estudiamos una forma simplificada de

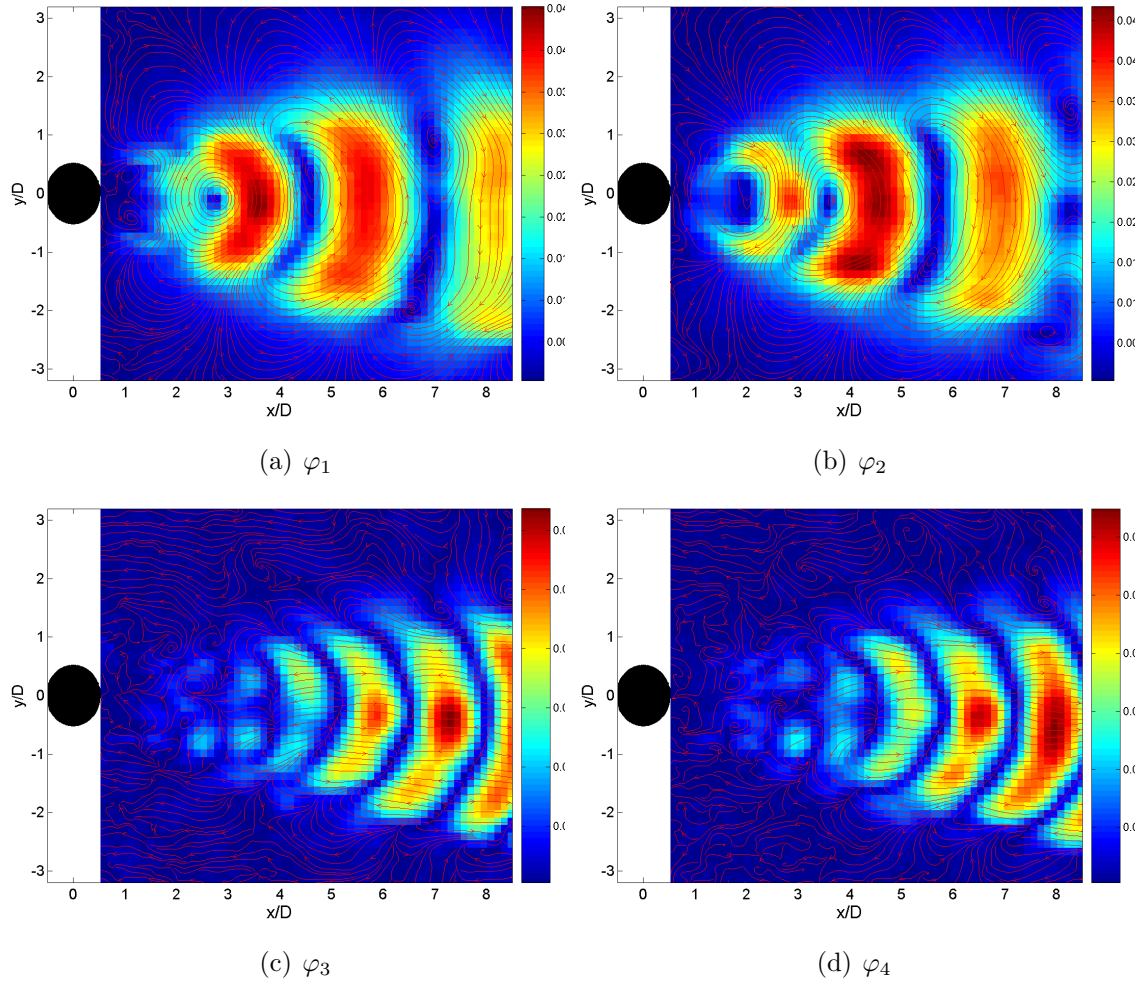
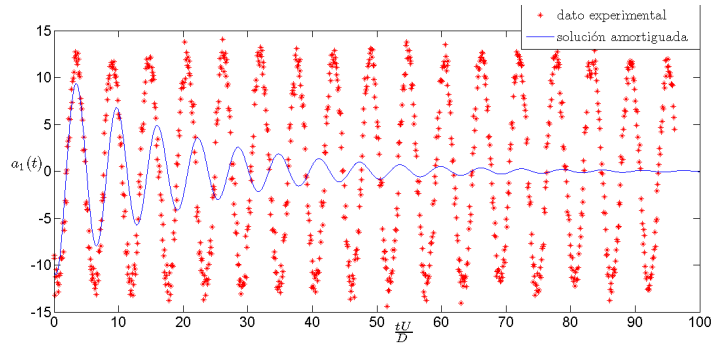
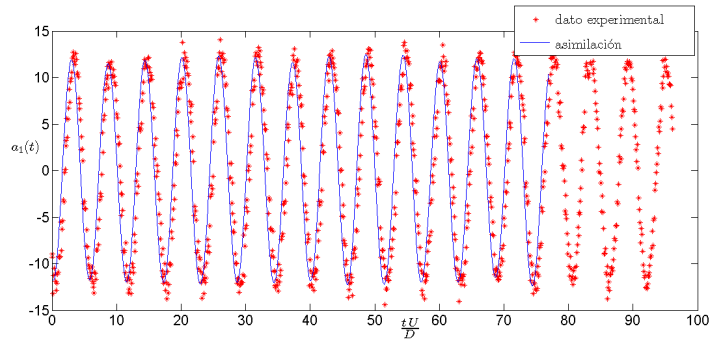


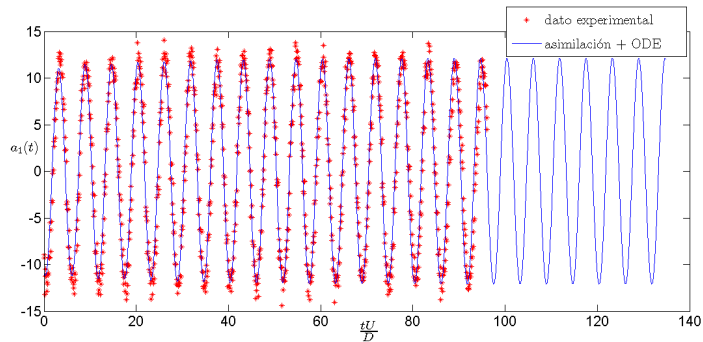
Figura 6.6: Primeros 4 modos fluctuantes de la descomposición POD del campo de velocidades del flujo alrededor del cilindro. Las líneas de corriente definen la dirección y sentido y los niveles la norma en cada caso.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.7: Primer modo temporal fluctuante del flujo alrededor de un cilindro a $Re=125$. (a) Comparación entre los datos (símbolos) y la primera curva de solución amortiguada (sólida). (b) Comparación entre los datos (símbolos) y la curva asimilada. (c) Comparación entre los datos (símbolos) y la solución de la ecuación diferencial (ODE) a partir de la asimilación.

la ecuación de Navier Stokes (4.7):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u \sim 0 \quad (6.3)$$

De donde, asimilando la velocidad u a la velocidad de la corriente libre U y la coordenada x al paso de la grilla en el escurrimiento dx , resulta el tiempo característico: $t_c \sim dt \sim \frac{dx}{U}$. En forma adimensional, $U = 1$, $\tilde{d}x = dx/D$, luego $\tilde{t}_c \sim dx/D$. Entonces, en la resolución de la ecuación diferencial, trabajamos con pasos de tiempo del orden de la décima de este valor. Utilizamos para ello un algoritmo de resolución Runge-Kutta 4.

Realizando una primera prueba para 4 modos, observamos que el sistema (4.21) diverge para tiempos del orden de la mitad, o menores, del tiempo de un desprendimiento. Para poder resolver utilizamos entonces, un valor adicional de viscosidad artificial sobre los términos lineales viscosos representados en el primer término de la expresión (4.18).

$$l_{ik} = (\nu + \nu_{ik}) \int_{\Omega} \nabla^2 \phi_k \phi_i dx$$

Se emplea particularmente un valor de viscosidad ν_{ik} que es función creciente con respecto al número del modo considerado. Típicamente en nuestros cálculos $\nu_{11} \sim ,25\nu$, $\nu_{12} = \nu_{21} \sim ,5\nu$, $\nu_{22} \sim 1\nu$. Como consecuencia del agregado de esta viscosidad artificial, el sistema tiene un comportamiento amortiguado, cuya curva característica se muestra en la Figura 6.7(a). La evolución tiende hacia un punto fijo del espacio de las fases como se ilustra en la Figura 6.8(a).

Dado entonces que se logra una solución acotada para $a(t)$, nos servimos de ella como solución pista para el método de asimilación de datos, desarrollado en 4.5. El resultado es la curva de asimilación de la Figura 6.7(b) en el espacio temporal y en la Figura 6.7(b) en el espacio de las fases.

A fin de obtener el modelo reducido, se realiza identificación polinomial sobre la solución asimilada. Se recuperan así nuevos coeficientes matriciales para el sistema dinámico. La ecuación tiene una solución acotada estable que se dibuja en la Figura 6.7(c) y, en el espacio de las fases, en la Figura 6.8(c). Se verifica que la solución "pasa" por los puntos datos, es decir, se encuentra en un subespacio del espacio de fases incluido en el subespacio de los datos. Se cumple que la trayectoria descrita en la Figura 6.8(c) corresponde a un sistema de tipo ciclo límite, característico del régimen de desprendimiento de vórtices de von Karman. Es importante destacar que la curva de la Figura 6.7(c) permite reconstruir el escurrimiento en los puntos dato y en cualquier instante comprendido en el intervalo entre ellos, donde no existe información a priori alguna.

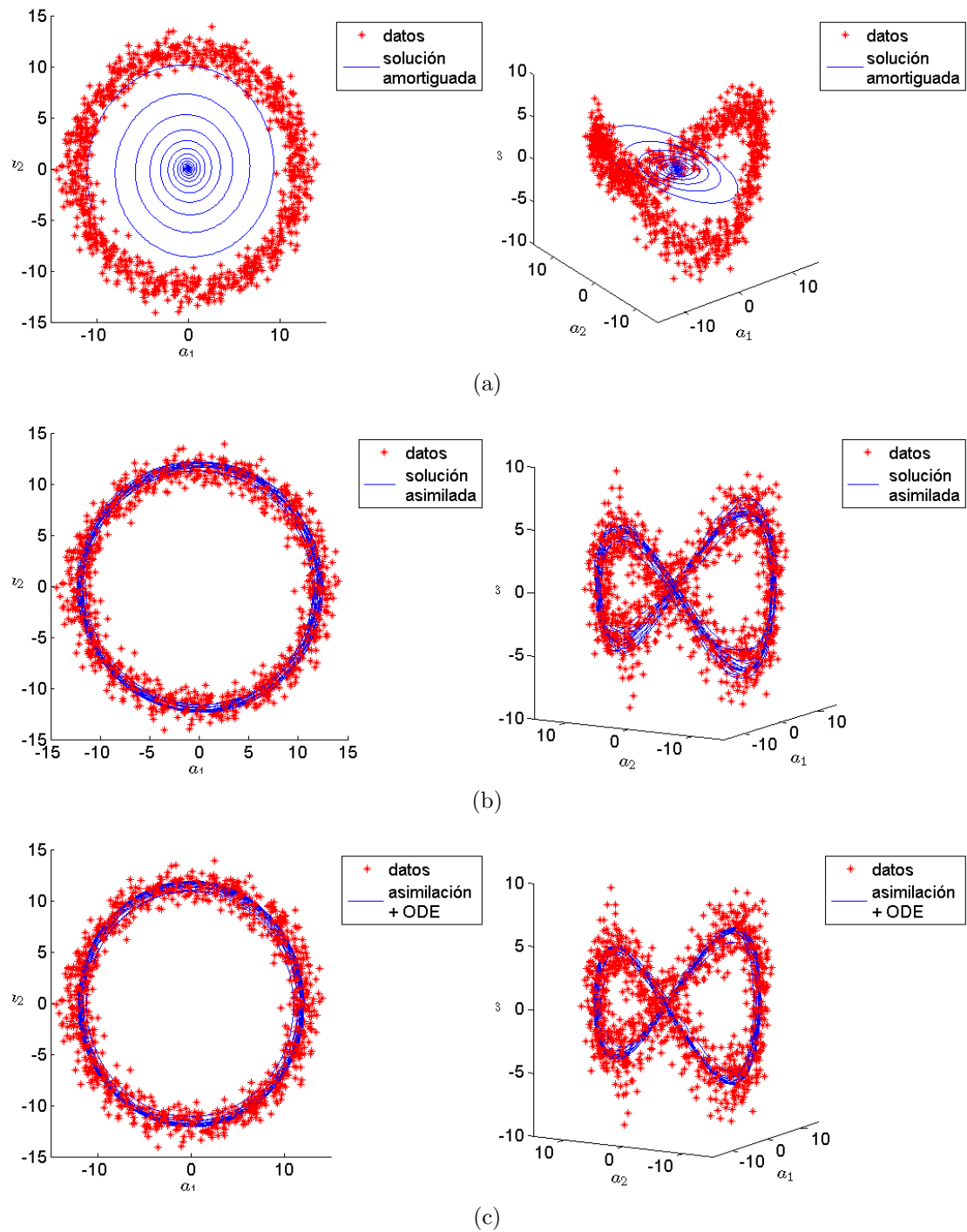


Figura 6.8: Para el flujo alrededor de un cilindro a $Re=125$. Trayectorias de los primeros dos modos temporales (*izquierda*). Trayectorias de los primeros tres modos temporales (*derecha*). (a) La solución pista (sólida) corresponde al amortiguamiento del sistema. Inicialmente, hay correspondencia con las 1000 observaciones (símbolo). (b) La asimilación corrige la solución pista. (c) La solución de la ecuación diferencial (ODE) a partir del resultado POD-Asimilación.

Siempre que se pueda disponer de los modos temporales $a(t)$ y de su derivada $\dot{a}(t)$, es posible el planteo de identificación polinomial. Perret et al. [95] proponen el empleo de 3 observaciones muy cercanas en el tiempo para poder contar con esta información, y un muestreo a menor frecuencia para garantizar la ergodicidad del conjunto $(a(t), \dot{a}(t))$. En nuestro caso este planteo no es necesario por la proximidad que existe en nuestras medidas garantiza la estimación de la derivada y el tiempo de adquisición. En [29] introducimos la técnica de asimilación como mejora del método.

6.4.2. Modelo Reducido del flujo actuado

Actuación mecánica

En forma similar al caso del flujo base, a partir de 1000 observaciones construimos el modelo reducido para cada uno de los flujos actuados bajo rotación mecánica donde se observan desprendimientos de vórtices. En la construcción empleamos 4 modos que concentran el 86 % de la energía cinética fluctuante. Los modos temporales son los coeficientes temporales que resultan de la proyección del flujo sobre cada modo espacial. El modelo reducido resultante es idéntico al establecido en la ecuación (4.21). La Figura 6.9(a) muestra al primer modo temporal, los datos que provienen de las medidas correspondientes al flujo bajo $\gamma = 1,42$ así como la solución de la ecuación diferencial luego de aplicar la asimilación. En la Figura 6.9(b) se observa el diagrama de fases correspondiente. Estos resultados muestran también un ciclo límite que se establece para describir la dinámica de desprendimiento de vórtices. Podemos distinguir que la amplitud del primer modo temporal, es menor que la del correspondiente modo del flujo sin actuación. El modelo reproduce la atenuación de la intensidad de las fluctuaciones de la velocidad asociada a los vórtices cuando el cilindro rota.

Actuador EHD

Distintos conjuntos de 1000 observaciones del flujo bajo el actuador EHD se analizaron bajo el mismo método para construir modelos reducidos. En el dominio del flujo, la magnitud de las fuerzas eléctricas sobre las partículas es muy pequeña frente a otros efectos. Observamos entonces directamente los efectos fluidodinámicos producidos en la estela por fuerzas eléctricas mayormente concentradas en torno a la pared del cilindro. Es por ello que la ecuación a proyectar en la base POD es la misma que (4.21).

Del cuadro 5.5, trabajamos con los primeros 4 casos, en los que se produce desprendimiento de vórtices. En los restantes casos, comprobamos que el flujo es estacionario en sentido estricto.

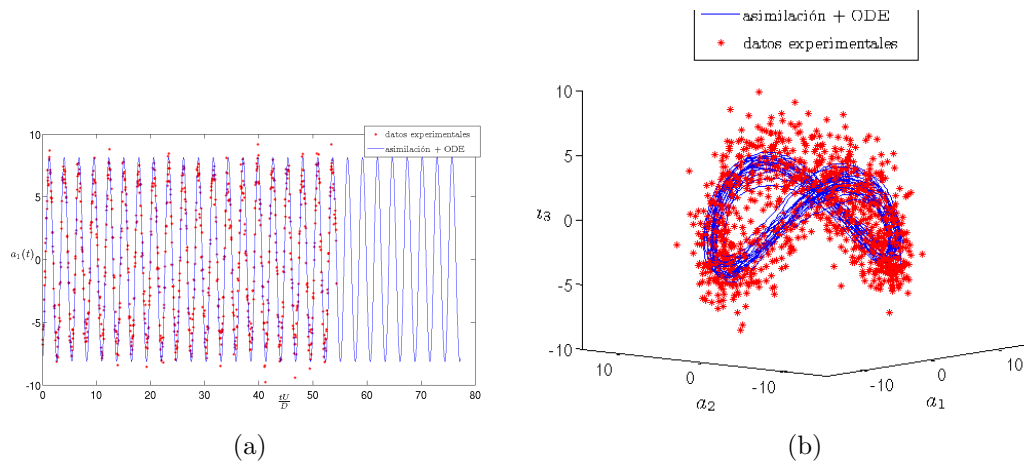


Figura 6.9: Para el flujo actuado bajo rotación a $\gamma = 1,42$, alrededor de un cilindro a $Re=125$. Se comparan los datos y la solución de la ecuación diferencial tras la asimilación. (a) Trayectoria del primer modo temporal y (b) diagrama de fases de los tres primeros modos temporales.

El tratamiento mediante POD-Asimilación proporciona, como en el flujo base, una solución de la ecuación diferencial (4.21) para los modos temporales del escurrimiento. Analizando el caso donde la descarga eléctrica tiene asociada una frecuencia de 729 Hz, disponemos de los modos espaciales que se presentan en la Figura 6.10. A diferencia del caso base, los modos fluctuantes presentan una asimetría que pone en evidencia que el desprendimiento de vórtices posee un eje de simetría rotado a causa de la actuación (Figuras 6.10(a), 6.10(b)). La asimetría del modo de la Figura 6.10(c) aparece como manifestación de efectos de cizallamiento inducidos por la aceleración del flujo en la capa de corte superior. Asimismo, la concentración de energía en los primeros 4 modos es 81.6%. Esto se explica en parte debido a la aparición de estructuras más finas y posiblemente tridimensionales en relación con un mayor grado de turbulencia que introduce el actuador como vimos en la Figura 6.4.

El comportamiento de los modos temporales se resume en las Figuras 6.11(a) y 6.11(b). En la primera de ellas, el algoritmo de asimilación permite reducir el ruido de las medidas actuando como filtro de los datos. En la segunda, como consecuencia de plantear la ecuación diferencial y resultar ésta de solución estable, se logra seguir la trayectoria de las medidas, y dar información en los instantes intermedios de los datos y para estimar el flujo para tiempos prolongados más allá de la adquisición. Los diagramas de fase que se presentan en la Figura 6.12 también son ciclos límite que conservan una trayectoria similar a la del caso del flujo base. Comprobamos asimismo que la solución es más sensible a la condición inicial con la que se resuelve

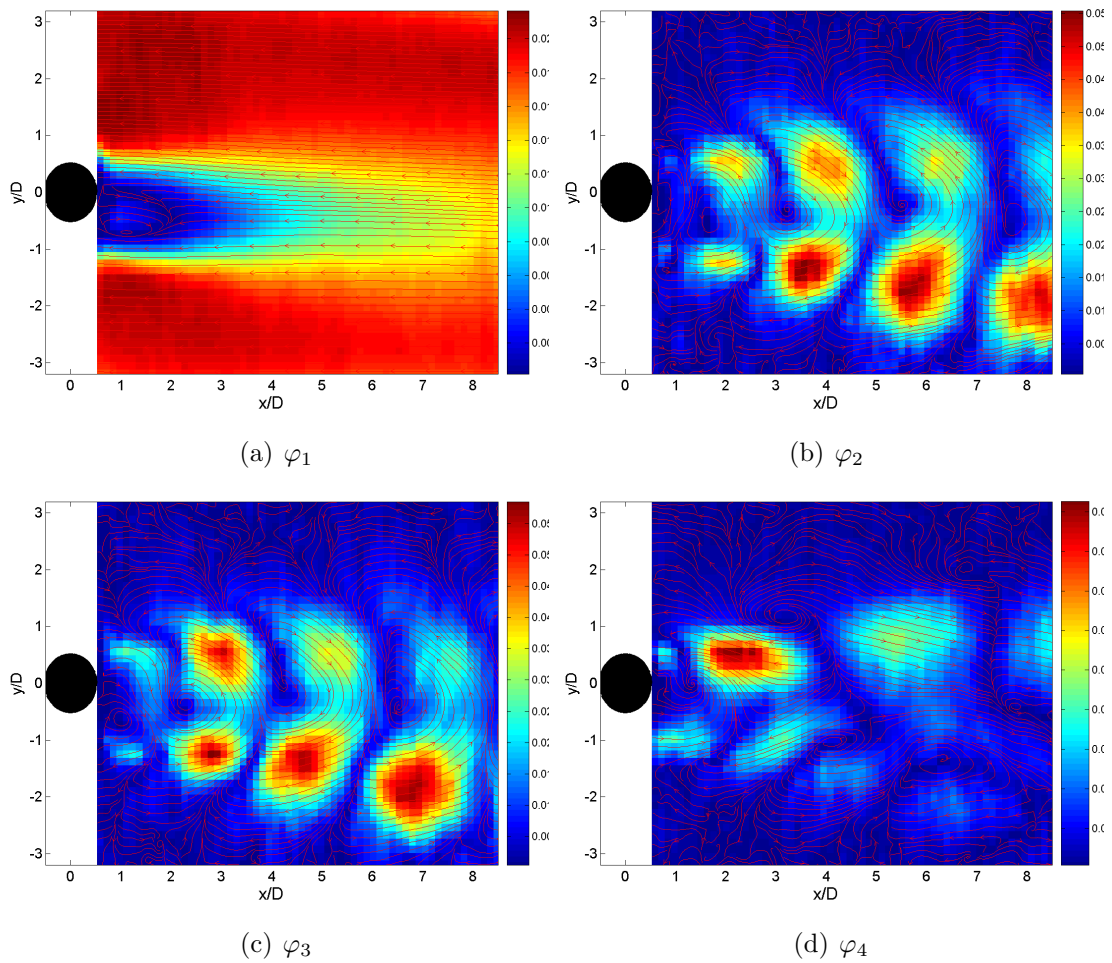
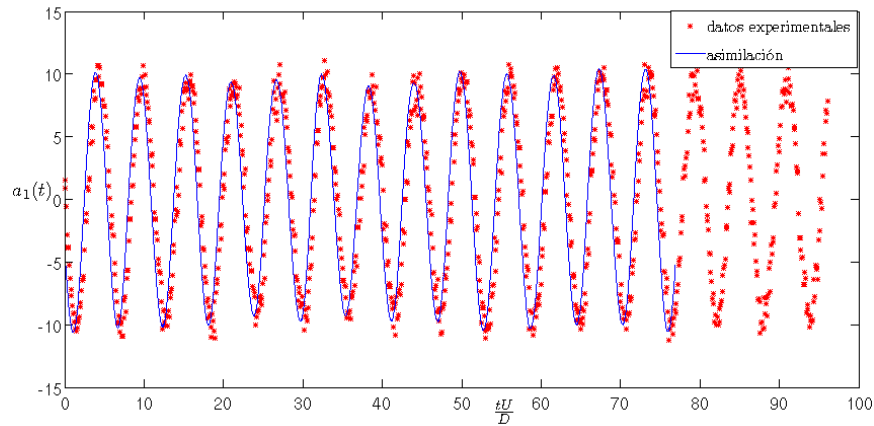
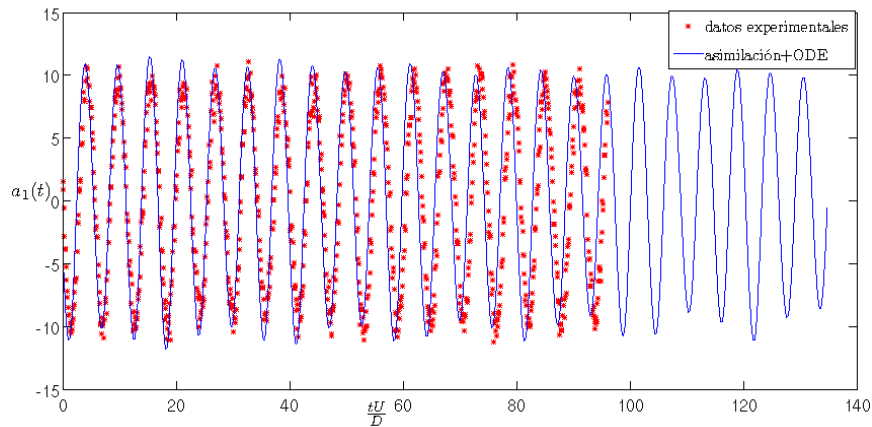


Figura 6.10: Primeros 4 modos fluctuantes de la descomposición POD del campo de velocidades del flujo para actuación a 729 Hz. Las líneas de corriente definen la dirección y sentido y los niveles la norma en cada caso.

el sistema, y que en el largo plazo la trayectoria se desvía más rápidamente del espacio de las fases de los puntos dato que para el caso del flujo base.



(a)



(b)

Figura 6.11: Primer modo temporal fluctuante del flujo alrededor de un cilindro a $Re=125$, actuado EHD $f=729$ Hz. (a) Comparación entre los datos (símbolos) y la curva asimilada. (b) Comparación entre los datos (símbolos) y la solución de la ecuación diferencial (ODE) a partir de la asimilación.

6.5. Estimación de los efectos de la actuación sobre el flujo base.

6.5.1. Función de control

En anteriores trabajos, Graham et al.[52](1997) y más recientemente Bergmann et al.(2005)[11], realizan un planteo para la obtención de una función de control sobre el problema del flujo alrededor de un cilindro que oscila. Para ello, hacen uso de

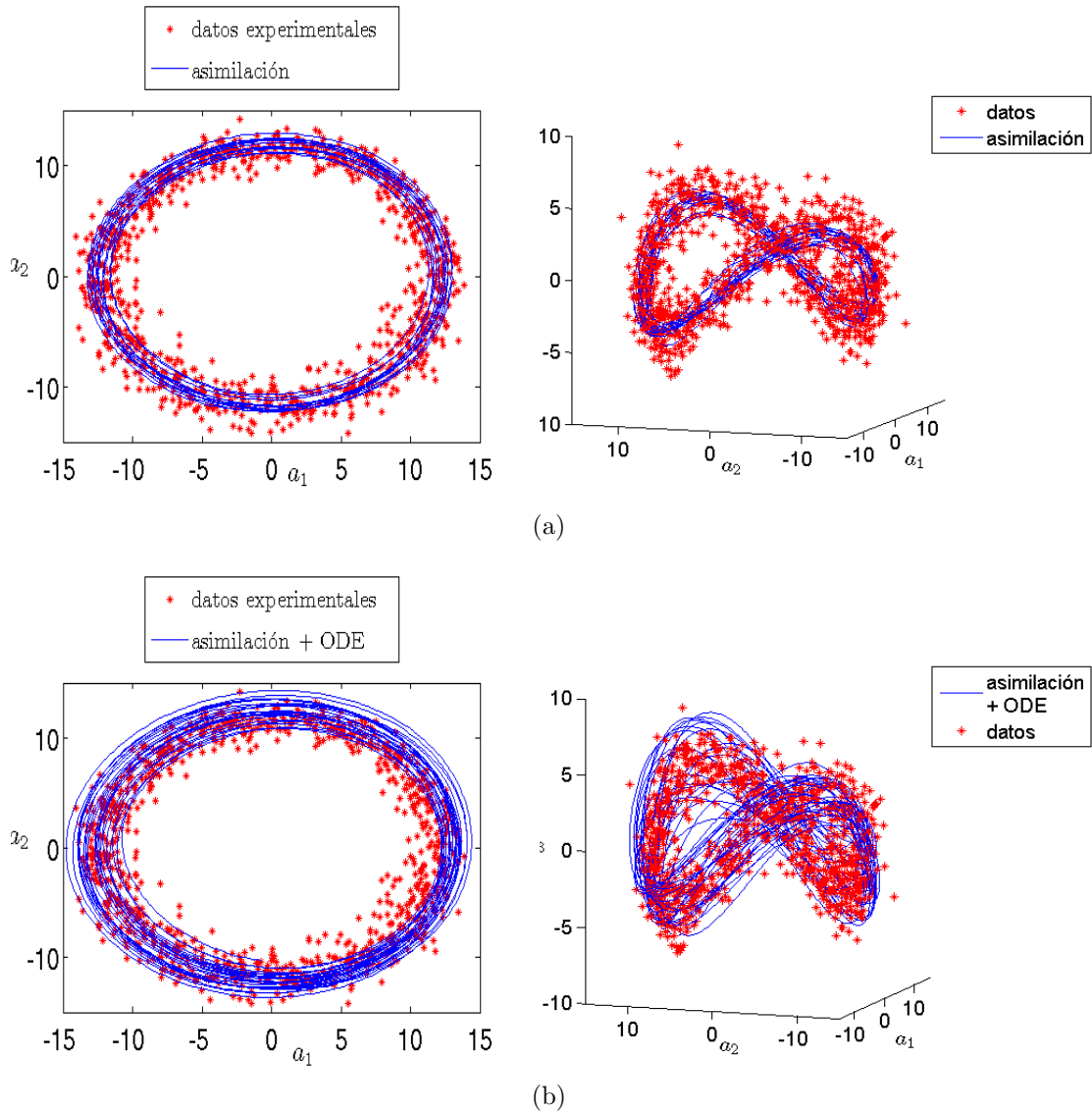


Figura 6.12: Para el flujo alrededor de un cilindro a $Re = 125$, actuado EHD a 729 Hz . (a) La asimilación de la solución pista. (b) La solución de la ecuación diferencial(ODE) a partir del resultado POD-Asimilación.

condiciones de borde sobre la superficie del cilindro de acuerdo a la velocidad de rotación de la actuación. Ambos trabajos se aplican a datos de elementos finitos, cuyas grillas de resolución incluyen al cilindro en el dominio y se refinan en el entorno de su superficie. Dado que los modos espaciales heredan las condiciones de contorno del flujo original, como fue demostrado en 3.2.1, puede asegurarse que restada la función de control de rotación del escurrimiento, ésta función resulta ortogonal al resto de los modos espaciales. Este comportamiento tiene utilidad al realizar la proyección de Galerkin pues hace posible la inclusión de un modo de control en forma separada de los modos del flujo.

A partir de datos de PIV con la precisión de grilla que disponemos, no es posible realizar el esquema de la función de control bajo las mismas hipótesis. La falta de datos cerca del cilindro, debido a reflexiones y sombras no hace posible la inclusión del cuerpo en el dominio. No obstante, hemos desarrollado un método para extraer la función de control empleando solamente observaciones en la estela. Como una extensión de la generación de bases con POD, proponemos la creación de una base POD del escurrimiento prototipo que incluye las sucesivas perturbaciones sobre el mismo. Nos hemos basado, para su construcción, en la formulación de la inclusión del modo cero (o de base) en el flujo alrededor de un cilindro mencionada en la sección 4.2.2. El esquema es el siguiente:

- I. Considerando el flujo sin acciones de control, construimos el modelo reducido con sus 5 primeros modos, que contienen el 92% de energía. Realizamos la descomposición incluyendo el campo medio que constituye el primer modo POD, cuya función temporal $a_1(t)$ es prácticamente una constante. Los restantes modos fluctuantes permiten reproducir el flujo de acuerdo a lo estudiado en secciones anteriores. Llamamos a este conjunto $\Phi_0 = \{\varphi_1 \dots \varphi_5\}$.
- II. Analizamos un segundo escurrimiento, que corresponde a una primera perturbación del flujo inicial, en nuestros datos, una rotación mecánica, $\gamma_1 = 1,13$. Proyectamos este flujo sobre Φ_0 de acuerdo a (3.1). Surgen coeficientes temporales del flujo sobre estas funciones que distinguimos de los $a_k(t)$ del flujo inicial. Llamamos $a_{ij}(t)$ a la proyección del campo u del flujo asociado a la perturbación γ_i sobre la función φ_j . La magnitud

$$\mu_{ij} = \sum_{j=1}^N \langle a_{ij} a_{ij} \rangle$$

es una medida de la energía cinética contenida en la proyección del flujo perturbado γ_i sobre el modo j . El subespacio ortogonal a Φ_0 , Φ_0^\perp , contiene las estructuras fluidodinámicas introducidas por las perturbación γ_1 .

Realizamos POD sobre este subespacio. Por razones prácticas, en vista del contenido energético restante en el flujo sobre el subespacio Φ_1 , retenemos 3 funciones y definimos: $\Phi_1 = \{\varphi_6 \dots \varphi_8\} \sim \Phi_0^\perp$.

- III. El procedimiento es continuado sobre los restantes casos, proyectando sobre la unión de los subespacios generados, y surgen sucesivamente⁴:

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \{\varphi_9 \dots \varphi_{11}\} \sim (\Phi_1 \oplus \Phi_0)^\perp \\ \Phi_3 &= \{\varphi_{12} \dots \varphi_{14}\} \sim (\Phi_2 \oplus \Phi_1 \oplus \Phi_0)^\perp \\ \Phi_4 &= \dots\end{aligned}$$

La descomposición POD del subespacio ortogonal restante tiene sentido en los casos en los que se observan fluctuaciones de los campos de velocidades, asociadas a los desprendimientos de vórtices. A partir de casos estacionarios en sentido estricto, un sólo modo ortogonal basta para la descripción. En nuestro caso práctico, esto ocurre para valores de $\gamma \geq 2,18$.

- IV. Se consigue una nueva base que sirve para describir todos los casos de actuación en el escurrimiento. Es posible realizar un ordenamiento para cada caso γ_j de los modos φ_i de acuerdo al nivel de energía cinética μ_{ij} contenido. El resultado se resume en el cuadro 6.1. Como complemento, en el cuadro 6.2 se aprecia el contenido energético sobre los escurrimientos de cada uno de los modos señalados en el cuadro 6.1.

Se observa que en todos los casos, la proyección sobre el primer modo es máxima frente a otras funciones. Aparece para los casos actuados como segundo modo energético el modo 6 cuya descripción espacial se presenta en la Figura 6.13. Este modo es el primer modo del subespacio Φ_1 y es el que designaremos en lo sucesivo como modo de control, φ_c . Los únicos casos en que no se produce lo anterior son aquellos donde $\gamma_0 = 0$ y $\gamma_9 = 3,18$.

Naturalmente, para $\gamma_0 = 0$ la descomposición POD original determina su segundo modo energético. Para $\gamma_9 = 3,18$ inferimos que el estado de perturbación se aleja de la primera perturbación $\gamma_1 = 1,21$, de donde se extrae φ_c . No obstante, su segundo modo energético, el 9, contiene aproximadamente un porcentaje de energía cinética similar al del modo 6 (que ocupa la tercera posición) tal como puede verificarse en el cuadro 6.2.

⁴La suma de dos subespacios vectoriales U y V , por ejemplo), pertenecientes al mismo espacio vectorial (W por ejemplo), se llama suma directa \oplus , si es única la expresión de cada vector de la suma como un vector de U y otro de V . La suma de dos subespacios cuya intersección es $\{0\}$, es siempre directa (a no ser que los subespacios sean suplementarios), es decir: $U \oplus V \iff S \cap T = \{0\}$.

	γ_j									
	γ_0	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8	γ_9
1° modo energético	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2° modo energético	2	6	6	6	6	6	6	6	6	9
3° modo energético	3	2	9	12	9	9	9	9	9	6
4° modo energético	4	3	7	7	15	15	15	15	15	15
5° modo energético	5	7	8	9	14	18	18	19	19	19
6° modo energético	12	8	2	8	12	4	19	18	18	18

Cuadro 6.1: Base POD extendida a casos de actuación. Se presentan los 6 primeros modos más energéticos para cada uno de los escurrimientos.

	γ_0	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5
1° modo energético	94,42 %	89,57 %	89,81 %	87,63 %	86,75 %	86,29 %
2° modo energético	2,11 %	6,33 %	6,51 %	8,99 %	9,99 %	8,12 %
3° modo energético	2,00 %	0,86 %	0,87 %	0,49 %	1,13 %	3,84 %
4° modo energético	0,65 %	0,78 %	0,57 %	0,47 %	0,54 %	1,00 %
5° modo energético	0,60 %	0,74 %	0,48 %	0,44 %	0,21 %	0,54 %
6° modo energético	0,02 %	0,67 %	0,42 %	0,41 %	0,21 %	0,10 %
Total	99,80 %	98,95 %	98,66 %	98,43 %	98,82 %	99,88 %

	γ_6	γ_7	γ_8	γ_9
1° modo energético	84,12 %	81,19 %	79,64 %	77,65 %
2° modo energético	8,04 %	7,95 %	7,18 %	6,80 %
3° modo energético	4,71 %	5,85 %	6,33 %	6,19 %
4° modo energético	1,69 %	2,28 %	2,68 %	3,25 %
5° modo energético	0,76 %	0,93 %	1,55 %	2,47 %
6° modo energético	0,32 %	0,90 %	1,10 %	0,98 %
Total	99,63 %	99,10 %	98,47 %	97,35 %

Cuadro 6.2: Contenido energético de cada escurrimiento sobre la base POD extendida.

En todos los casos con rotación, el modo temporal asociado a ϕ_c es prácticamente una constante. Es decir:

$$\int_{\Omega} u(x, t) \varphi_c(x) dx \sim cte$$

Observamos que el valor μ_{i6} vinculado a de dicho modo varía linealmente con respecto a γ durante los regímenes de desprendimiento, como muestra la Figura 6.14.

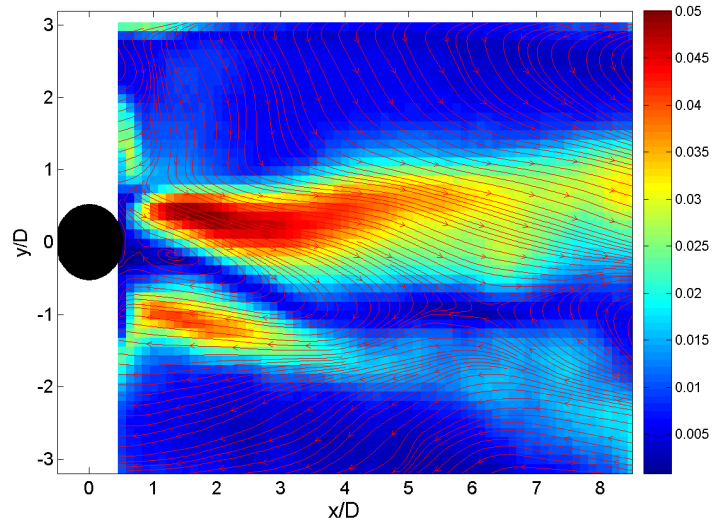


Figura 6.13: Modo de control espacial extraído mediante la base POD extendida.

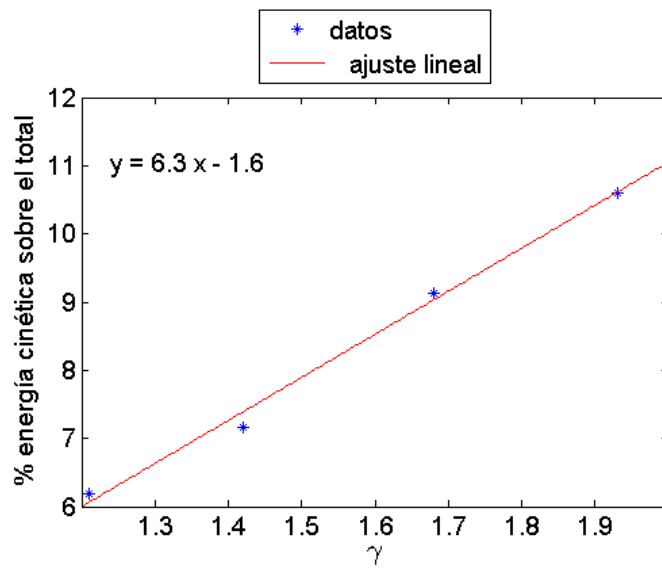


Figura 6.14: Nivel de energía cinética contenido en el modo de control en los 4 casos de flujo actuado con desprendimiento.

En suma, obtenemos una función de control, que llamamos $\varphi_c(x)$, a partir del desarrollo de una base extendida POD en el flujo alrededor de un cilindro y sucesivas velocidades de rotación γ . La ortogonalidad de esta función respecto a la base POD conduce, en los casos señalados, al siguiente desarrollo de la velocidad del flujo:

$$u(x, t) = u_0 + C_\gamma \gamma \varphi_c + \sum_{i=1}^s a_i(t) \varphi_i(x) \quad (6.4)$$

donde u_0 representa el flujo medio de cada escurrimiento proyectado sobre el subespacio ortogonal a φ_c y C_γ es una constante de proporcionalidad. Sustituyendo esta ecuación en la proyección de Galerkin (4.13), se obtiene el siguiente sistema:

$$\frac{da_i}{dt} = i_i + \sum_{j=1}^s l_{ij} a_j + \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s c_{ijk} a_j a_k + d_i \frac{d\gamma}{dt} + (e_i + \sum_{j=1}^s f_{ij} a_j) \gamma + g_i \gamma^2 \quad (6.5)$$

Los coeficientes d_i , e_i , f_{ij} y g_i pueden ser determinados nuevamente utilizando identificación polinomial y Asimilación. Particularmente, cuando el cilindro rota a una velocidad constante, como es el caso de nuestras experiencias, $\frac{d\gamma}{dt} = 0$.

6.5.2. Analogías entre la rotación mecánica y la actuación EHD

A partir del diseño del actuador y de observaciones del comportamiento del flujo actuado con EHD, podemos suponer que este flujo es semejante al flujo bajo rotación mecánica. Es de gran interés práctico lograr establecer la analogía pues existe una bibliografía extensa para el caso de control del cilindro rotativo que permite una mejor interpretación de los fenómenos físicos en cuestión. Es asimismo deseable tener un marco de referencia para cuestiones que no han sido estudiadas en esta tesis pero que son temas de investigación en la actualidad. Uno de ellos es el estudio de una excitación variable en el tiempo.

Dado que hemos obtenido un modelo reducido capaz de ser optimizado para el flujo con el cilindro rotativo, es deseable poder referir los resultados obtenidos al flujo bajo actuación.

Una forma de compararlos es realizar la proyección de los campos medios basada en el producto interno definido en (3.1). Asumiendo que los flujos se hayan confinados en un dominio Ω , la proyección del campo medio de rotación mecánica u_i sobre el campo medio de EHD v_j es:

$$p_{ij} = (u_i, v_j) = \int_{\Omega} u_i(x)v_j(x)dx \quad (6.6)$$

Se obtiene entonces una matriz de coeficientes p_{ij} que cuantifica la proyección y permite asociar los flujos bajo actuación. El resultado para los datos con los que trabajamos se observa en el cuadro 6.3.

Frecuencia (Hz)	505	562	688	729	770	813	858	887	933
Potencia (<i>watts/m²</i>)	3	10.4	10.8	13	17.5	21.8	30.7	37.8	50.3
Modo asociado de rotación	γ_0 0	γ_0 0	γ_0 0	γ_4 1.93	γ_6 2.43	γ_7 2.68	γ_9 3.18	γ_{11} 3.55	γ_{11} 3.55

Cuadro 6.3: Frecuencia de actuación EHD y velocidad de rotación asociada. Criterio de proyección de campos medios.

Podemos representar los valores del cuadro 6.3 en términos de la potencia del actuador, adimensionalizada con las variables principales del escurrimiento. Para ello, expresamos en primer lugar la potencia vinculada con la disipación de las fluctuaciones de la velocidad:

$$\frac{L}{T} \int_0^T \int_{\Omega} \rho u' u' dx dt = LA_{\Omega} \rho U^2 \frac{1}{T} \int_0^T a_i^2 dt$$

recordamos que L es la longitud del cilindro, D su diámetro, U la velocidad de la corriente libre, ρ la densidad del fluido, A_{Ω} la superficie del dominio espacial, T un período de tiempo e integración. Luego, si P es la potencia por unidad de superficie, la potencia adimensionalizada se estima según:

$$\chi = \frac{P\pi D}{A_{\Omega} U^2 \rho} \quad (6.7)$$

En nuestro problema, esto significa multiplicar a P por una constante $C_P = 25,6m^2/watts$, resumimos los valores en la Figura 6.15.

Otra manera de conseguir una relación entre los flujos es a partir de la proyección de cada uno de los flujos EHD sobre la base de funciones extendida generada a partir de la definición de la función de control φ_c para el flujo bajo rotación. De esta proyección surge una matriz, en el cuadro 6.4 similar a la obtenida en la sección anterior cuando analizamos solamente el flujo con rotación.

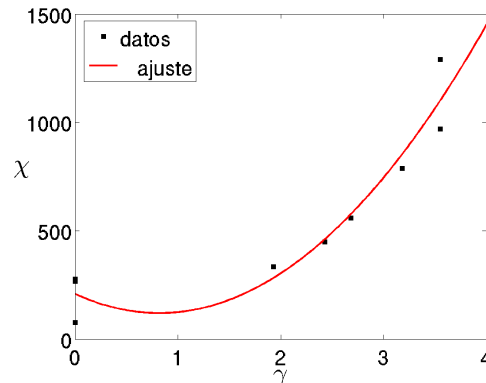


Figura 6.15: Potencia eléctrica adimensionalizada χ en función de la rotación mecánica γ .

	Frecuencia Hz								
	505	562	688	729	770	813	858	887	933
1° modo energético	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2° modo energético	2	2	2	6	6	6	6	6	6
3° modo energético	3	3	7	9	9	9	9	9	9
4° modo energético	4	9	9	12	15	15	15	15	15
5° modo energético	5	18	18	18	18	18	18	19	12
6° modo energético	9	5	9	3	23	4	23	18	19

Cuadro 6.4: Proyección de los flujos bajo EHD sobre la base extendida. Se presentan los 6 primeros modos más energéticos para cada uno de los escurrimientos.

6.6. Aplicaciones de modelos reducidos a problemas de control óptimo

El sistema (6.5) posibilita el planteo de un problema de optimización de la acción de control. Para ello, nos interesamos en el problema de minimización de un funcional de costo, que incluya al esfuerzo realizado en el control y a las medidas durante un período de tiempo. El modelo reducido nos proporciona los datos para este esquema, si consideramos como medidas del escurrimiento los modos temporales $a_i(t)$ y la acción de control caracterizada con el parámetro de rotación γ . Se busca minimizar entonces:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\begin{array}{c} \text{Potencia relativa a} \\ \text{las fluctuaciones} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Potencia consumida} \\ \text{por el control} \end{array} \right] dt \quad (6.8)$$

El funcional anterior puede escribirse en función de las variables del modelo reducido. Para la geometría de nuestro problema, según Bergmann et al.[11], la siguiente ecuación constituye la formulación del problema:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^s a_i^2(t) + \frac{\beta}{2} (C_\gamma \gamma)^2 dt \quad (6.9)$$

El primer termino del funcional J representa la intensidad de fluctuaciones en el proceso de desprendimiento de vórtices. El segundo, toma en cuenta la potencia asociada al torque requerido para llevar a cabo la rotación del cilindro de acuerdo al planteo realizado por Protas et al.[100] y Bergmann et al.[11]. Cómo sólo hay dos términos para definir el funcional de costo, alcanza con un sólo coeficiente, β , para representar la medida de los costos asociados a cada fenómeno. En este caso, el valor de β depende de la viscosidad del fluido considerado pero podría incluir, si se deseara, otros factores asociados al dispositivo que produce la rotación del cilindro (inercia, transmisiones, valores económicos, etc).

Se minimiza entonces (6.8) sujeta a la restricción por la que a_i y γ deben verificar (6.5). Las restricciones pueden ser incluidas en el problema de minimización al introducir funciones adjuntas⁵ $\xi_i(t)$ en una forma similar al planteo realizado para la asimilación de datos en 4.5. Puede consultarse para más detalles, el Apéndice A.5 donde desarrollamos el método.

El problema de optimización puede ser reducido al considerar el funcional Lagrangiano

$$\mathcal{L}(a_i, \gamma, \xi_i) = J - \sum \int \xi_i \frac{da_i}{dt} dt \quad (6.10)$$

Interesa la obtención de $\mathcal{L} = 0$. Para asegurar esta condición, las variaciones del funcional lagrangiano respecto de ξ_i , $a_i(t)$ y γ deben ser nulas. Resulta entonces el siguiente sistema:

$$\frac{d\xi_i(t)}{dt} = -2a_i(t) - \sum_{j=1}^s (b_{ji} + \gamma f_{ji} + \sum_{k=1}^s (c_{jik} + c_{jki}) a_k(t)) \xi_j(t) \quad (6.11)$$

$$\xi_i(t_f) = 0 \quad (6.12)$$

$$\delta\gamma(t) = - \sum_{i=1}^s d_i \frac{d\xi_i}{dt} + \beta\gamma + \sum_{i=1}^s (e_i + \sum_{j=1}^s f_{ij} a_j + 2g_i \gamma) \xi_i(t) \quad (6.13)$$

La formulación es análoga a la propuesta por Graham et al. [52] y Bergmann et al.[11]. En sus trabajos, los autores trabajan sobre el objetivo de la reducción del arrastre mediante oscilaciones del cilindro con variadas frecuencias y amplitudes.

⁵También conocidas en la bibliografía como multiplicadores de Lagrange

En una reciente publicación [30], hemos aplicado las bases de este método al estudio de datos provenientes de simulación numérica DNS. Aplicamos a continuación esta metodología para datos que surgen de experiencias PIV. El número de Reynolds es, como en los anteriores casos, 125.

El sistema definido por las ecuaciones (6.5), (6.11), (6.12) y (6.13) se resuelve iterativamente. Entonces, para un γ dado, se resuelve primeramente la ecuación (6.5) y se obtienen los modos temporales $a_i(t)$. A continuación, usando la solución anterior, se resuelven el sistema de ecuaciones adjuntas (6.11), (6.12) y (6.13) integrando hacia atrás en el tiempo la variable adjunta $\xi_i(t)$.

Conocidas $a_i(t)$ y $\xi_i(t)$, puede computarse $\delta\gamma(t)$. Para los casos analizados, este cálculo da como resultado que la variación $\delta\gamma$ una función independiente del tiempo. En cada iteración, el valor de γ es actualizado de acuerdo a $\gamma^{(n+1)} = \gamma^{(n)} + \mu\delta\gamma$ donde μ es un número < 1 .

A partir de nuestro modelo reducido, observamos el valor del funcional J , en primer lugar para el caso $\beta = 0$. El cuadro 6.5 muestra los resultados. En la evaluación del funcional, se considera el período T correspondiente a 30 desprendimientos de vórtices en el modelo reducido. Verificamos que la potencia asociada a los desprendimientos decrece conforme aumenta γ .

γ	$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (a_1^2(t) + a_2^2(t)) dt$
0	145.45
1.21	95.72
1.42	62.28
1.68	37.51
1.93	10.12

Cuadro 6.5: Valores del funcional J cuando $\beta = 0$

Si consideramos un valor de β mayor a cero, el costo del termino de rotación crece. El valor de la rotación γ que minimiza el funcional va disminuyendo desde el mínimo de $\gamma = 1,93$ que corresponde a $\beta = 0$. El cuadro 6.6 resume los valores cuando, por ejemplo, $\beta = ,33$.

El valor de β cuantifica cuan costoso resulta el control y así influencia el resultado óptimo de relación entre la acción de control y el objetivo de reducir el desprendimiento. Como era esperable, para un valor de β mayor el funcional encuentra su óptimo para un valor de $\gamma < 1,93$. Podemos distinguir del cuadro 6.6 un primer mínimo del funcional para $\gamma = 1,42$, entonces, podemos plantear la optimización alrededor de la solución para este caso.

γ	$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (a_1^2(t) + a_2^2(t)) + \beta\gamma^2 dt$
0	145.45
1.21	152.60
1.42	140.61
1.68	147.15
1.93	154.8171

Cuadro 6.6: Valores del funcional J cuando $\beta = 0,33$

Estimamos los coeficientes matriciales de la ecuación (6.5) y resolvemos, también con asimilación dicho sistema considerando: el modo de control φ_c al que afecta la velocidad de rotación γ ; el primer modo energético estacionario; y los dos primeros modos fluctuantes.

Con la solución de las $a(t)$, resolvemos la ecuación (6.11) para la variable adjunta ξ con la condición final (6.12). Con $\xi(t)$ podemos conocer la variación de la velocidad $\delta\gamma$ y tras sucesivas iteraciones hallamos el valor mínimo del funcional:

$$J = 135,44 \text{ con } J(n) - J(n-1) = \varepsilon < 10^{-7}$$

Y la rotación asociada $\gamma = 1,36$.

De esta forma, hemos conseguido un modelo reducido para el control a lazo abierto del flujo alrededor del cilindro actuado con rotación mecánica.

En base a las analogías existentes entre el flujo bajo rotación mecánica y el actuado bajo excitación EHD, se puede proceder de manera similar a fin de establecer un valor óptimo de control.

Para trasladar el modelo al control mediante el actuador EHD, podemos incorporar el valor de potencia adimensional estimado en la ecuación (6.7). Si suponemos que trabajamos con una potencia eléctrica del orden de $13 \text{ watts}/m^2$, entonces $\chi \simeq 400$ y $\gamma \simeq 1,9$. Para $\beta(C_\gamma\gamma)^2 \sim \chi$ resulta un valor de $\beta \sim 2,8$. Este valor, en principio, conduce a un sistema de control caro en comparación con el obtenido en el ejemplo anterior. Los valores óptimos se encontrarían en este caso en un entorno de $\gamma = 0$.

Sin embargo, en la estimación de β pueden añadirse factores que excedan el concepto puramente energético. Si vinculamos las fluctuaciones provocadas por los desprendimientos de vórtices detrás de un sólido, podemos tener en cuenta el costo de: los esfuerzos mecánicos y la fatiga que dichas sollicitaciones imponen; el ruido que producen, la tasa de transferencia de calor, etc.

6.7. Conclusiones

Hemos examinado a lo largo del capítulo una serie de resultados experimentales con las herramientas presentadas en capítulos anteriores. El filtrado de datos mediante la técnica Gappy POD constituye una novedad en el tratamiento de imágenes PIV. Asimismo, hemos introducido la técnica de asimilación de datos para disminuir el ruido de las secuencias de imágenes de los escurrimientos. La utilización de ambas técnicas constituyen un aporte a la mecánica de fluidos experimental.

Apoyándonos en parte sobre la base teórica de otros trabajos, hemos logrado perfeccionar la formulación de modelos reducidos a partir de datos de PIV. Conseguimos así vincular resultados experimentales con un modelo de simulación numérica de manera satisfactoria. Esta técnica nos ha permitido estudiar los cambios fluidodinámicos generados por el actuador electrohidrodinámico descrito en el Capítulo 5 a través de un modelo reducido que permite reproducir la dinámica de las estructuras esenciales. También hemos aplicado esta técnica al análisis del escurrimiento alrededor del cilindro rotativo, consiguiéndose resultados que se ajustan a datos experimentales y numéricos de otros autores.

Hemos establecido relaciones de semejanza entre los flujos actuado con EHD y con rotación a fin de poder comparar los resultados de un caso de actuación con respecto al otro.

Asimismo, a fin de extender el sistema de ecuaciones diferenciales a una versión que contempla la acción de un control, hemos además extraído una función de control externo. Para el caso del flujo actuado con rotación mecánica, el coeficiente de dicha función de control tiene un comportamiento lineal ante la acción de rotación del cilindro.

Sobre el modelo reducido con la acción de control, hemos implementado con éxito la optimización a lazo abierto para el caso de rotación mecánica. Sobre la base de estos resultados es posible trasladar al diseño óptimo de la actuación electrohidrodinámica en el escurrimiento alrededor de un cilindro.

Conclusiones y perspectivas

A lo largo del trabajo, hemos estudiado el desarrollo de modelos de orden reducido que describen el comportamiento de un escurrimiento en un dominio espacio-temporal dado. A diferencia de las técnicas tradicionales de simulación numérica, los modelos que se alcanzan se basan en el uso de un conjunto de datos experimentales discretos comprendidos en el dominio espacio-temporal considerado. Los modelos realizan la descripción de los campos de velocidades mediante una descomposición modal, donde los modos y coeficientes son determinados, sin hipótesis a priori, a partir de datos empíricos.

Mediante una proyección Galerkin de estos modos sobre las ecuaciones de NS se logra un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden reducido que sustituye al sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Esta técnica se presenta particularmente ventajosa para el diseño de estrategias de control de flujos, debido a que es posible determinar la dinámica esencial del escurrimiento mediante un número limitado de ecuaciones sobre las que es posible introducir una acción de control.

A título de ilustración de las ventajas de la técnica que desarrollamos analizamos el problema del control del escurrimiento alrededor de un cilindro a bajos Reynolds ($Re = 125$) cuando se disponen de datos provenientes de la técnica PIV. Es de señalar que este tipo de flujo se puede considerar como prototipo para el estudio de una serie de problemas de la mecánica de fluidos teórica y de sus aplicaciones, razón por la cual lo hemos seleccionado.

Presentadas las nociones de estructuras coherentes, se ha estudiado particularmente el método POD para su extracción. Con ello, identificamos las estructuras más energéticas del flujo, cuya dinámica representa correctamente, en el flujo en estudio, el camino de vórtices de von Karman. Al utilizar una cantidad reducida de modos, los modelos obtenidos mediante la proyección de Galerkin presentan generalmente una serie de problemas de cierre, que se manifiestan especialmente cuando los datos provienen de medidas PIV. Este tipo de problema lo hemos resuelto de manera novedosa mediante la aplicación conjunta de las técnicas de identificación polinomial y de Asimilación-POD. Este resultado brinda nuevas herramientas generales para el análisis de escurrimientos caracterizados por fluctuaciones en la

estela de cuerpos a bajos números de Reynolds.

Por otra parte, se derivan los procedimientos de Gappy-POD y de Asimilación-POD para el tratamiento de las medidas experimentales que provienen de PIV. De esta forma contribuimos a resolver uno de los problemas que se suscitan en la mecánica de fluidos experimental: el filtrado de datos. Es de destacar que las técnicas de filtrado que hemos propuesto utilizan información estadística de cada una de las observaciones del conjunto de datos obtenidos, e incluyen un modelo físico lo que las hace más confiable respecto a los filtrados convencionales.

La construcción de modelos reducidos a partir de los datos de PIV posibilita el diseño de una acción de control producida por un actuador. Hemos investigado particularmente el control para el flujo alrededor de un cilindro a bajos Reynolds mediante actuadores electrohidrodinámicos debido al creciente desarrollo e interés que existe en la comunidad científica sobre este tipo de dispositivos. Teniendo en cuenta la posible analogía entre la acción mecánica que ejerce una acción EHD en la vecindad de una superficie y aquella producida por una pared en movimiento hemos realizado estudios también sobre el caso del cilindro rotativo. Nuestro estudio permitió determinar de manera clara las características de esta analogía. Este resultado es de particular importancia debido a la profusa bibliografía existente para el caso del cilindro rotativo.

Para el flujo controlado mediante un cilindro rotativo, hemos implementado con éxito un esquema de optimización fundado en la reducción de las fluctuaciones y en el costo asociado a la rotación del cilindro. Es de resaltar que el traslado de estos resultados pudo realizarse para el análisis del flujo actuado bajo la actuación EHD merced a las analogías existentes entre ambos escurrimientos.

Los logros de esta tesis son, en síntesis, un resultado alentador que esperamos puedan contribuir en posteriores líneas de investigación y en el diseño de aplicaciones. Podemos mencionar entre las perspectivas para la investigación de base en horizontes cercanos: la aplicación del esquema de trabajo al estudio de la transición del régimen de flujo alrededor de un cilindro ($Re \geq 180$), al proceso de datos de campos de velocidades tridimensionales, al análisis de otros escurrimientos de flujo en la estela, etc.

Por otra parte, establecimos una base para futuros proyectos sobre el control de flujos, donde podrán estudiarse acciones de control más complejas, por ejemplo, utilizando variaciones temporales en la excitación del flujo. En el caso de su implementación con actuadores EHD, éstos se caracterizan por tiempos de respuesta que garantizan una buena modulación en el tiempo de una señal de control. Una serie de aplicaciones pueden aún proyectarse en relación con la capacidad de optimizar las experiencias y dispositivos de control del flujo considerado.

Por último, consideramos que este trabajo significa un paso hacia el complejo diseño de un sistema de control de lazo cerrado, que aparece como la siguiente etapa de nuestros esfuerzos.

Apéndice A

Resultados del análisis funcional

A.1. Algunas definiciones

A.1.1. Espacios de Hilbert

Es un conjunto H de elementos f, g, \dots de naturaleza arbitraria que verifica las siguientes condiciones:

- I. H es un espacio euclídeo: un espacio lineal con producto interno definido en él.
- II. El espacio H es completo en el sentido de la métrica $d(f, g) = \|f - g\|$.
- III. El espacio H es de dimensión infinita: cualquiera que sea n se pueden encontrar n elementos linealmente independientes.
- IV. H es separable: existe en él un conjunto numerable siempre denso.

En particular L^2 , el espacio de funciones de cuadrado integrable es un ejemplo de espacio de Hilbert. A menudo se indica el dominio de dichas funciones, $L^2(\Omega)$. El producto interno de dos elementos $u, v \in L^2(\Omega)$ se define según:

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v^*(x)dx$$

Luego, para calcular la norma de un vector :

$$\|u\| = (u, u)^{1/2} = \left(\int_{\Omega} u(x)u^*(x)dx \right)^{1/2}$$

Entonces, las funciones de cuadrado integrable sobre Ω satisfacen:

$$\|f\| = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right]^{1/2} < \infty$$

A.1.2. Completitud

Una sucesión $\{u_n\}$ de elementos de un espacio métrico (p. ej. $L^2(\Omega)$) se denomina *fundamental* o *de Cauchy*, cuando para cualquier $\epsilon > 0$ existe un número N_ϵ tal que $d(u_{n'}, u_{n''}) < \epsilon$ para cualesquiera $n' > N_\epsilon, n'' > N_\epsilon$.

De acuerdo al axioma de desigualdad triangular sobre la métrica $d(u, v)$ se demuestra que toda sucesión convergente es fundamental:

Si $\{u_n\}$ converge a u , sabemos que cualquiera sea ϵ existe un número N_ϵ tal que $d(u_n, u) < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $n > N_\epsilon$. Luego, $d(u_{n'}, u_{n''}) \leq d(u_{n'}, u) + d(u, u_{n''}) < \epsilon$ para cualesquiera $n' > N_\epsilon, n'' > N_\epsilon$.

Se define un espacio como *completo* si toda sucesión de Cauchy de él converge.

A.1.3. Densidad

Un conjunto $D \subset E$, siendo E un espacio métrico, es denso si: Para todo $u \in E$ y $\epsilon > 0$, existe $v \in D$ tal que $d(u - v) < \epsilon$

E es *separable* si existe $D \subset E$ es denso numerable.

A.1.4. Compacidad

Un espacio métrico es compacto si toda sucesión $\{u_n\} \subset E$ admite una subsucesión convergente a un punto de E .

A.1.5. Espacios de Banach

Un espacio de Banach se define como un espacio vectorial normado completo. Se cumple entonces que todo espacio de Hilbert es de Banach pero el recíproco no es cierto necesariamente.

A.1.6. Teorema de la Proyección Ortogonal

Teorema A.1 Sea H un espacio de Hilbert, V un subespacio lineal de H .

Dado $f \in H$, existe un único $f^* \in V$ tal que

$$\|f - f^*\| = \min_{v \in V} \|f - v\|$$

Demostración: Definimos $d = \inf \{\|f - v\| / v \in V\}$. V es completo y cerrado, de su definición. Si $d = 0 \Rightarrow f = f^*$. Luego, suponemos que $d > 0$. Consideremos el conjunto

$$C_n = \left\{ v \in V / \|f - v\| \leq d + \frac{1}{n} \right\}$$

sean v_1, v_2 dos elementos de C_n , vale la siguiente identidad (del paralelogramo¹):

$$\|v_1 + v_2 - 2f\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2 = 2(\|v_1 - f\|^2 + \|v_2 - f\|^2)$$

sabiendo que $\frac{v_1+v_2}{2} \in V$ podemos acotar la expresión anterior según:

$$\|v_1 - v_2\|^2 \leq \frac{8d}{n} + \frac{4}{n^2}$$

que resulta una relación para 2 elementos cualesquiera de C_n . En particular podemos elegir dentro de C_n una sucesión $\{v_n\}$. Esta resulta ser de Cauchy pues:

$$\|v_n - v_{n+p}\|^2 \leq \frac{8d}{n} + \frac{4}{n^2}$$

para todo $p \geq 0$. Luego, a medida que $n \rightarrow \infty$, v_n converge a un límite, llamémosle $f^* \in C_n \subset V$. Se cumple $\|f - f^*\| \leq d$ entonces

$$\|f - f^*\| = d = \min_{v \in V} \|f - v\|$$

Para probar la unicidad del resultado,

sea $d = \|f - f_1\| = \|f - f_2\|$ se cumple que $\frac{f_1+f_2}{2} \in V$

$$d \leq \|f - \frac{1}{2}(f_1 + f_2)\| \leq \frac{1}{2}\|f - f_1\| + \frac{1}{2}\|f - f_2\| = d$$

Llamando $u = \frac{f-f_1}{d}$, $v = \frac{f-f_2}{d}$ tenemos que $\|u\| = \|v\| = 1$ y $\|u + v\| = 2$. Por la identidad del paralelogramo resulta $\|u - v\| = 0$ y finalmente $f_1 = f_2$.

Se deduce el siguiente resultado:

Teorema A.2 f^* es la mejor aproximación de f en V si y sólo si:

$$(f - f^*, v) = 0 \text{ para todo } v \in V$$

Demostración:

\Leftarrow

$(f^* - v) \in V$ para todo $v \in V$, luego, $(f - f^*, f^* - v) = 0$. Por el teorema de Pitágoras,

$$\|f - v\|^2 = \|f - f^*\|^2 + \|f^* - v\|^2$$

Entonces $\|f - f^*\|^2 \leq \|f - v\|^2 =$, para todo $v \in V$ y f^* resulta la mejor aproximación.

¹ $\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$

Demostración:

\Rightarrow Sea $v_\alpha = f^* + \alpha(v - f^*)$ donde $\alpha \in \mathbb{C}$ y $v \in V$. Por definición de f^* como la mejor aproximación de f en V :

$$\|f - f^*\|^2 \leq \|f - v_\alpha\|^2 = (f - v_\alpha, f - v_\alpha) = \|f - f^*\|^2 + |\alpha|^2 \|v - f^*\|^2 - \alpha(v - f^*, f - f^*) - \bar{\alpha}(f - f^*, v - f^*)$$

Para que pueda cumplirse la primera desigualdad es necesario que:

$$\alpha(v - f^*, f - f^*) + \bar{\alpha}\overline{(v - f^*, f - f^*)} \leq |\alpha|^2 \|v - f^*\|^2$$

Escribimos α en la forma $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$, y definimos $u = v - f^*$. Dividiendo la expresión anterior por $|\alpha|$ y tomando $|\alpha| \rightarrow 0$:

$$e^{i\theta}(u, f - f^*) + e^{-i\theta}\overline{(u, f - f^*)} \leq 0$$

Esta expresión se cumple para todo $u \in V$ y para todo θ . En particular si consideramos $\theta = 0$ la expresión sigue siendo válida e implica:

$$(u, f - f^*) = 0, \quad \forall u \in V$$

con lo que queda demostrado el teorema.

A.1.7. Adjunto de un operador

Sean E, F espacios normados, y A un operador acotado entre ellos. Entonces se define el operador $A^* : F^* \rightarrow E^*$ como:

$$(A^*\varphi)(x) = \varphi(Ax) \tag{A.1}$$

para $\varphi \in F^*$ y $x \in E$. Este operador es lineal y acotado, y se denomina adjunto de A .

A.1.8. Espacios de funciones diferenciables

Sea I un intervalo arbitrario de \mathbb{R} . Para $p \in \mathbb{N}$ definimos el espacio de funciones $\mathcal{C}^p(I)$ según

$$\mathcal{C}^p(I) = \{f : \mathbb{R}(\text{o } \mathbb{C}) \text{ tal que } f \text{ es } p\text{-veces continuamente diferenciable}\}$$

Cuando $f \in \mathcal{C}^p(I)$ decimos que f es de clase \mathcal{C}^p . Cuando se dice que f es continuamente diferenciable, esto significa que f es diferenciable y que $x \mapsto f'(x)$ es continua.

A.1.9. Derivación de operadores

Sean V, W espacios normados completos y $U \subset V$ un conjunto abierto. Un operador $F : U \rightarrow W$ es diferenciable Fréchet en $x \in U$ si existe un operador lineal acotado $L_F : V \rightarrow W$ tal que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|F(x+h) - F(x) - L_F(x) \cdot (h)\|_W}{\|h\|_V} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Para todo $h \in V$.

La derivada fuerte o de Fréchet, cuando se aplica a espacios de dimensión finita, corresponde a la matriz jacobiana del funcional.

La existencia de la derivada fuerte, asegura la existencia de derivadas direccionales. Un funcional $F : U \rightarrow W$ es diferenciable Gâteaux en $x \in U$ si F tiene derivadas direccionales en todas las direcciones. Esto significa que existe un funcional $G : V \rightarrow W$ tal que:

$$G(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x+th) - F(x)}{t} \quad (\text{A.3})$$

para todo $h \in V$.

Luego si un operador es derivable en el sentido de Fréchet en x , esto asegura $L_F \equiv G$ pero no a la inversa.

A.2. Sobre la integral de Lebesgue

Es necesario para su definición:

- I. un conjunto X .
- II. una σ -álgebra de X : τ
 - a) \emptyset y $X \in \tau$
 - b) $S \in \tau \Rightarrow X \setminus S \in \tau$
 - c) $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots \in \tau \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \in \tau$
- III. Una medida sobre τ es una función $\mu : \tau \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ que tiene las siguientes propiedades:
 - a) $\mu(\emptyset) = 0$.

b) Si S_n es una secuencia de conjuntos disjuntos¹

(X, τ, μ) es un conjunto medible.

A.2.1. Definición: funciones características

La función característica de un conjunto medible A se denota χ_A y se define según:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

A.2.2. Definición: funciones simples

Sea (X, τ, μ) un espacio medible, y $S_1, \dots, S_n \subset X$. Una función e definida en X se denomina función simple cuando es combinación lineal de funciones características de modo que:

$$e = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{S_i} \tag{A.4}$$

Teorema A.3 *Toda función $f(x)$ es medible según μ en X si y sólo si puede ser representada como límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones medibles simples.*

A.2.3. Definición: Integración

Supongamos que (X, τ, μ) es un espacio medible y que $e = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{S_i}$ es una función en X no negativa. La integral de e sobre X con respecto a la medida μ es el número no negativo denotado por $\int_X e d\mu$ y definido por

$$\int_X e d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(S_i) \tag{A.5}$$

Se dice que e es integrable si $\int_X e d\mu$ es finito.

¹ $S_n \cap S_m = \emptyset$ si $n \neq m$

A.2.4. Derivación bajo la Integral

Teorema A.4 Sea I un intervalo real y (X, τ, μ) un espacio medible. Sea $f : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

- I. $f(x, \cdot)$ es absolutamente continua en I para casi todo $x \in X$.
- II. Para todo $\lambda \in I$ existe $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ para casi todo $x \in X$.
- III. $f(\cdot, \lambda)$ es integrable en X para todo $\lambda \in I$. En particular, estas condiciones implican que $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ está definida en casi todo $(x, \lambda) \in X \times I$. Supongamos que existe una función m , integrable en X , tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right| \leq m(x) \quad \forall (x, \lambda) \in X \times I \quad \text{donde} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{esté definida.}$$

Entonces

- $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ es integrable en X para todo $\lambda \in I$
- $\int f(x, \lambda) dx$ es derivable en I y se cumple

$$\frac{d}{d\lambda} \int_X f(x, \lambda) dx = \int_X \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) dx \quad \forall \lambda \in I$$

A.2.5. Teorema de Fubini

El teorema de Fubini establece que si:

$$\int_{A \times B} |f(x, y)| d(x, y) < \infty$$

la integral tomada respecto a la medida producto en el espacio $A \times B$, entonces

$$\int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx = \int_B \left(\int_A f(x, y) dx \right) dy = \int_{A \times B} f(x, y) d(x, y)$$

Las primeras dos integrales suponen integración con respecto a las medidas de A y B respectivamente mientras que la tercera lo es respecto de la medida producto. También vale,

$$\int_A f(x) dx \int_B g(y) dy = \int_{A \times B} f(x)g(y) d(x, y)$$

Aplicando estos conceptos sobre el conjunto $L^2(\Omega)$, podemos definir a la medida:

$$\mu(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \chi_A(u^k) \quad (\text{A.6})$$

donde $A \subset L^2(\Omega)$, $u^k \in L^2(\Omega)$ es una secuencia de estados físicos.

A.3. Intercambiabilidad entre el el promedio temporal y la integración espacial.

Sea μ una medida de probabilidad en $L^2(\Omega) \cap C(\Omega)$, donde $C(\Omega)$ es el espacio de funciones continuas en Ω , tal que para cada $x \in \Omega$ se tiene $\langle |u(x)|^2 \rangle^{1/2} \in L^2(\Omega)^1$. Entonces:

- I. $\langle u(x_1)u^*(x_2) \rangle$ existe para cada $(x_1, x_2) \in \Omega \times \Omega$.
- II. $\langle u(x_1)u^*(x_2) \rangle$ está en $L^2(\Omega \times \Omega)$
- III. Se cumple:

$$\left\langle \int_0^1 \int_0^1 u(x)u^*(x')\varphi(x')\psi(x)dx dx' \right\rangle = \int_0^1 \left[\int_0^1 \langle u(x)u^*(x') \rangle \varphi(x')dx' \right] \psi(x)dx \quad (\text{A.7})$$

Es decir se verifica el intercambio entre el promedio temporal $\langle \bullet \rangle$ y la integración espacial.

Para demostrar (I.), definimos los funcionales $f_{x_i} : L^2(\Omega) \cap C(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ de forma que $f_{x_i}(u) = u(x_i)$. Debemos demostrar que existe:

$$\langle u(x_1)u^*(x_2) \rangle = \int_{L^2(\Omega)} f_{x_1}(u)f_{x_2}^*(u)d\mu \quad (\text{A.8})$$

si el funcional $f_{x_i}(u) = u(x_i)$

Primeramente, aclaramos que resulta de integrar en $L^2(\Omega)$ respecto de la medida μ . Sea el funcional $h : L^2(\Omega) \cap C(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(u) = u(x)$. De acuerdo a (A.3) podemos escribir:

$$h(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{S_i}(u) = \alpha_1 \chi_{S_1}(u) + \alpha_2 \chi_{S_2}(u) + \dots$$

¹Esta hipótesis supone que el promedio temporal sobre la norma de los campos de velocidad es acotado en L^2 , físicamente esto implica trabajar con campos en los que la energía cinética está acotada.

Luego,

$$\int_{L^2(\Omega)} h(u) d\mu = \alpha_1 \mu(S_1) + \alpha_2 \mu(S_2) + \dots$$

De la definición de medida (A.6),

$$\begin{aligned} \int_{L^2(\Omega)} h(u) d\mu &= \alpha_1 \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \chi_{S_1}(u^k) \right) + \alpha_2 \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \chi_{S_2}(u^k) \right) + \dots = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} (u^1(x) + u^2(x) + \dots + u^{N-1}) \end{aligned}$$

A partir de la hipótesis de ergodicidad sobre u en (3.3) el resultado está de acuerdo a la definición de promedio temporal. Entonces

$$\int_{L^2(\Omega)} h(u) d\mu = \langle u \rangle$$

Volviendo a (A.8), podemos acotar la integral sirviéndonos de la desigualdad integral de Hölder :

$$\begin{aligned} \int_{L^2(\Omega)} |f_{x_1}(u) f_{x_2}^*(u)| d\mu &\leq \left[\int_{L^2(\Omega)} |f_{x_1}|^2 d\mu \right]^{1/2} \cdot \left[\int_{L^2(\Omega)} |f_{x_2}|^2 d\mu \right]^{1/2} \\ \int_{L^2(\Omega)} |f_{x_1}(u) f_{x_2}^*(u)| d\mu &\leq \langle |u(x_1)|^2 \rangle^{1/2} \cdot \langle |u(x_2)|^2 \rangle^{1/2} \end{aligned}$$

Con lo que su existencia quedará asegurada. Para probar (II.) partimos de la desigualdad anterior, multiplicando por el conjugado del miembro izquierdo de (A.8):

$$|\langle u(x_1) u^*(x_2) \rangle \langle u^*(x_1) u(x_2) \rangle| \leq \langle |u(x_1)|^2 \rangle \cdot \langle |u(x_2)|^2 \rangle$$

Entonces, integrando dos veces sobre Ω ,

$$\left| \int_{\Omega} \int_{\Omega} \langle u(x_1) u^*(x_2) \rangle \langle u^*(x_1) u(x_2) \rangle dx_1 dx_2 \right| \leq \left[\int_{\Omega} \langle |u(x)|^2 \rangle dx \right]^2 < \infty$$

con lo que se demuestra (II.). El resultado permite asegurar que el núcleo del operador integral \mathfrak{R} pertenece a L^2 .

Por último, de acuerdo al teorema de Fubini (A.2.5), podemos cambiar el orden de integración en (III.). Antes, debemos demostrar que la integral existe. A partir de (II.) y utilizando nuevamente la desigualdad integral de Hölder, podemos escribir:

$$\left| \int_{\Omega} \int_{\Omega} \langle u(x_1) u^*(x_2) \rangle \varphi(x_2) \psi^*(x_1) dx_1 dx_2 \right| \leq \int_{\Omega} \int_{\Omega} |\langle u(x_1) u^*(x_2) \rangle \varphi(x_2) \psi^*(x_1)| dx_1 dx_2$$

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} |\langle u(x_1)u^*(x_2) \rangle \varphi(x_2)\psi^*(x_1)| dx_1 dx_2 \leq \left[\int_{\Omega} \int_{\Omega} |\langle u(x_1)u^*(x_2) \rangle|^2 dx_1 dx_2 \right]^{1/2} \cdot \left[\int_{\Omega} \int_{\Omega} \|\varphi(x_2)\psi^*(x_1)\|^2 dx_1 dx_2 \right]^{1/2} < \infty$$

Ahora podemos aplicar el teorema de Fubini:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{\Omega} \langle u(x_1)u^*(x_2) \rangle \varphi(x_2)\psi^*(x_1) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \int_{L^2(\Omega)} f_{x_1}(u) f_{x_2}^*(u) \varphi(x_2)\psi^*(x_1) d\mu dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{L^2(\Omega)} \left[\int_{\Omega} \int_{\Omega} f_{x_1}(u) f_{x_2}^*(u) \varphi(x_2)\psi^*(x_1) dx_1 dx_2 \right] d\mu \end{aligned}$$

Con lo que se prueba (III.).

A.4. Propiedades del operador de Fredholm

El operador $(\mathfrak{R}\psi)(x) = \int_{\Omega} \langle u(x)u(y) \rangle \psi(y) dy$ puede asimilarse al operador de Fredholm. Éste se define a partir de la ecuación integral de Fredholm. En particular, las ecuaciones de primera especie:

$$g(s) = \int_a^b K(t, s) f(t) dt \tag{A.9}$$

La función K se llama núcleo de la ecuación, se supone medible y que verifica:

$$\int_a^b \int_a^b |K^2(t, s)| ds dt < \infty \tag{A.10}$$

La función $f(t) \in L^2[a, b]$.

En correspondencia con (A.9) se define al operador T:

$$Tf = g$$

Teorema A.5 Si $K(s, t)$ es una función de cuadrado integrable, el operador T resulta compacto y su norma satisface la desigualdad:

$$\|A\| \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K^2(t, s)| ds dt} \tag{A.11}$$

Demostración:

Debido al teorema de Fubini (A.2.5), a partir de (A.10) se puede asegurar que existe para casi todo s :

$$\int_a^b |K(t, s)|^2 dt$$

$K(s, t)$ pertenece como función de t a $L^2[a, b]$ para casi todo s . Luego, como el producto de dos funciones $L^2[a, b]$ pertenece a $L^1[a, b]$, la integral en (A.9) existe para casi todo s y en consecuencia $g(s)$ está definida para casi todo s .

Podemos luego probar que $g(s) \in L^2[a, b]$. En virtud de la desigualdad de Cauchy-Buniakovski, tenemos para casi todo s :

$$|g(s)|^2 = \left| \int_a^b K(t, s) f(t) dt \right|^2 \leq \int_a^b |K(t, s)|^2 dt \cdot \int_a^b |f(t)|^2 dt = \|f\|^2 \int_a^b |K(t, s)|^2 dt$$

Integrando respecto de s y sustituyendo la integral sobre $\int_a^b |K(t, s)|^2$ por una integral doble, obtenemos:

$$\|Tf\|^2 = \int_a^b |g(s)|^2 ds \leq \|f\|^2 \int_a^b \int_a^b |K(t, s)|^2 dt ds \quad (\text{A.12})$$

El resultado prueba la integrabilidad de $|g^2(s)|$ y demuestra la estimación (A.11) para la norma del operador.

Para probar que T es acotado, consideramos en primer lugar un sistema completo ortogonal de $L^2[a, b]$, $\{\psi_n\}$. Los productos del tipo $\{\psi_m(s)\psi_n(t)\}$ forman un sistema completo en $L^2([a, b] \times [a, b])$. El núcleo puede ser escrito en la forma:

$$K(s, t) = \sum_m \sum_n a_{mn} \psi_m(s) \psi_n(t)$$

Considerando el núcleo K_N definido de acuerdo a:

$$K_N(s, t) = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N a_{mn} \psi_m(s) \psi_n(t) \quad (\text{A.13})$$

Podemos asociarle un operador T_N de la misma manera en que definimos a T . T_N es compacto pues transforma todo el espacio $L^2[a, b]$ en un subespacio de dimensión finita¹:

$$T_N f = \int_a^b K_N(t, s) f(t) dt = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N a_{mn} \psi_m(s) \int_a^b f(t) \psi_n(t) dt = \quad (\text{A.14})$$

$$= \sum_{m=1}^N \psi_m(s) \sum_{n=1}^N a_{mn} b_n \quad (\text{A.15})$$

¹Operadores de este tipo se denominan degenerados.

donde

$$b_n = \int_a^b f(t)\psi_n(t)dt$$

De esta forma toda $f \in L^2[a, b]$ es transformada por el operador T_N en un elemento del subespacio de dimensión finita generado por los vectores ψ_1, \dots, ψ_N . Ahora bien, como K_N es la suma parcial de la serie de Fourier (A.13) de la función K

$$\int_a^b \int_a^b K(s, t) - K_N(s, t))^2 ds dt \rightarrow 0 \text{ para } N \rightarrow \infty$$

Aplicando la estimación de la norma hallada en (A.11), al operador $T - T_N$, se deduce que:

$$\|T - T_N\| \rightarrow 0 \text{ para } N \rightarrow \infty$$

Empleando el teorema A.6 que establece que el límite de una sucesión convergente de operadores compactos es un operador compacto, se obtiene la compacidad de T .

A.4.1. Teorema sobre convergencia de operadores compactos

Teorema A.6 *Si $\{T_n\}$ es una sucesión de operadores compactos en un espacio de Banach E que converge, según la norma, a un operador T , el operador T es también compacto.*

Demostración:

Para probar la compacidad del operador T , basta con probar que para cualquier sucesión acotada de elementos de E , $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, es decir $\|x_n\| \leq Cte$, se puede extraer de la sucesión $\{Tx_n\}$ una subsucesión convergente.

Sabiendo que el operador T_1 es compacto, de la sucesión $\{T_1x_n\}$ puede extraerse una subsucesión convergente. Sea:

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, \dots \tag{A.16}$$

una sucesión tal que $\{T_1x_n^{(1)}\}$ converge. Consideremos la sucesión $\{T_2x_n^{(1)}\}$, es posible extraer una subsucesión convergente de ella. Sea:

$$x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}, \dots$$

la subsucesión de (A.16) tal que $\{T_2x_n^{(2)}\}$ converge. Debe cumplirse que $\{T_1x_n^{(2)}\}$ también converge. Análogamente, podemos elegir de la sucesión $\{x_n^{(2)}\}$ una subsucesión

$$x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, \dots, x_n^{(3)}, \dots$$

tal que $\{T_3x_n^{(3)}\}$ converge y así sucesivamente. Considerando la sucesión diagonal

$$x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(n)}, \dots$$

Cada uno de los operadores $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ transforma esta sucesión en convergente. Para probar la compacidad de T debemos probar que la sucesión $\{Tx_n^{(n)}\}$ también converge. Como el espacio E es completo, es suficiente demostrar que $\{Tx_n^{(n)}\}$ es una sucesión de Cauchy. Se tiene:

$$\|Tx_n^{(n)} - Tx_m^{(m)}\| \leq \|Tx_n^{(n)} - T_kx_n^{(n)}\| + \|T_kx_n^{(n)} - T_kx_m^{(m)}\| + \|T_kx_m^{(m)} - Tx_m^{(m)}\| \quad (\text{A.17})$$

Puede elegirse k de manera que $\|T - T_k\| < \frac{\varepsilon}{3Cte}$. Sea N tal que para todo $n > N$ y $m > N$ se cumple:

$$\|T_kx_n^{(n)} - T_kx_m^{(m)}\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

De (A.17) se deduce:

$$\|Tx_n^{(n)} - Tx_m^{(m)}\| < \varepsilon$$

para todos los n y m suficientemente grandes.

Teorema A.7 (Hilbert-Schmidt) *Para cualquier operador lineal T autoconjugado y compacto en un espacio de Hilbert H existe un sistema ortonormal $\{\varphi_n\}$ de vectores propios, correspondientes a los valores propios $\{\lambda_n\}$ tal que cada elemento de H se puede escribir de manera única en la forma:*

$$\xi = \sum c_k \varphi_k + \xi'$$

donde el vector ξ' verifica la condición $T\xi' = 0$; además,

$$T\xi = \sum \lambda_k c_k \varphi_k$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$$

Notación: la cantidad $c_k = (\xi, \varphi_k)$

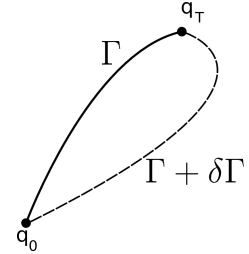
A.5. Problema del cálculo de variaciones

A.5.1. Planteo general.

Sea $q = q(t) \in \mathbb{R}^n$ un vector de estado que define un arco Γ .

Dado Γ se fabrica un entorno de arcos variados.
Estos arcos se expresan como una familia

$$\begin{aligned} q(t, \varepsilon) \in \mathcal{C}^m \quad / \forall t \in [0, T] \\ q(t, 0) = \Gamma \\ q(t, \varepsilon) = \Gamma + \delta\Gamma \end{aligned}$$



La familia verifica que $\forall \varepsilon$ pequeño,

$$\left. \begin{aligned} q(0, \varepsilon) = q_0 \\ q(T, \varepsilon) = q_T \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.18})$$

Se define al funcional $J(\Gamma) = \int_0^T f(q'(t), q(t), t) dt$, funcional del tipo de Lagrange.²

El problema consiste en hallar la función $q^*(t)$ que define Γ^* que proporciona un extremo al funcional J .

Para ello se definen:

$$\begin{aligned} A_m = \{q(t) \in \mathcal{C}^m / (q', q, t) \in D_1, \forall t \in [0, T], \\ \text{con } q(0) = q_0, q(T) = q_T \text{ fijos, } J(\Gamma) < \infty\} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

siendo

$$\begin{aligned} D_1 = \{(q', q, t) \in \mathcal{C}^3\} \quad J : A_m \rightarrow \mathbb{R} \\ f : D_1 \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$A_m \text{ es métrico con } d_m(p, q) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^m \sup_{t \in [0, T]} |q_j^{(i)}(t) - p_j^{(i)}(t)|$$

²Consideramos como notación $q' = \frac{\partial q}{\partial t}$

Por otro lado, las variaciones de q se aproximan según:

$$\Delta_\varepsilon q = q(t, \varepsilon) - q(t, 0) \simeq \underbrace{\left. \frac{\partial q}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}}_{\text{se llama variación de } q: \delta q} \cdot \varepsilon \quad (\text{por Taylor})$$

En general el operador variación es: $\delta(\bullet) = \left. \frac{\partial(\bullet)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon$

Suponemos que existe un arco $\Gamma = q(t, 0)$ tal que $J(\Gamma) = J(\varepsilon = 0)$ es un extremo.

Con esto, para el funcional de costo

$$J(\Gamma + \delta\Gamma) - J(\Gamma) = J(\varepsilon) - J(0) \simeq \left. \frac{\partial J}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon = \delta J$$

Por la condición necesaria de extremo, $\delta J = 0$.

Calculamos entonces δJ considerando la familia $q(t, \varepsilon)$

$$\delta J = \delta \left[\int_0^T f(q'(t, \varepsilon), q(t, \varepsilon), t) dt \right]$$

Como ni 0 ni T dependen de δ ,

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_0^T \delta [f(q'(t, \varepsilon), q(t, \varepsilon), t)] dt = \\ &= \int_0^T \left(\left. \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon + \left. \frac{\partial f}{\partial q'} \frac{\partial q'}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon \right) dt = \\ &= \int_0^T \left(\frac{\partial f}{\partial q} \delta q + \frac{\partial f}{\partial q'} \delta q' \right) dt \end{aligned}$$

Dado que

$$\frac{d}{dt}(\delta q) = \delta q' = \delta \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)$$

luego,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\left(\int_0^t \frac{\partial f}{\partial q} dt \right) \cdot \delta q \right] &= \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \delta q + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial q} dt \cdot \delta q' \\ \Rightarrow \delta J &= \int_0^T \left(\frac{d}{dt} \left[\left(\int_0^t \frac{\partial f}{\partial q} dt \right) \cdot \delta q \right] - \int_0^t \frac{\partial f}{\partial q} dt \cdot \delta q' + \frac{\partial f}{\partial q'} \delta q' \right) dt = \\ &= \underbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \delta q \right|_0^T}_{\delta q=0 \text{ en } T \text{ y en } 0, \text{ ver (A.18)}} + \int_0^T \left(\frac{\partial f}{\partial q'} - \int_0^t \frac{\partial f}{\partial q} dt \right) \delta q' dt \end{aligned}$$

Para satisfacer la condición de extremo,

$$\text{debe ser } \delta J = 0, \forall \delta q' \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial q'} - \int_0^t \frac{\partial f}{\partial q} dt = cte.}$$

Se aplica el teorema fundamental del cálculo variacional:

Sea $\alpha(t) \in \mathcal{C}^0$ en $[a, b]$

$$\int_a^b \alpha(t) h'(t) dt = 0 \quad \forall h(t) \in \mathcal{C}^1 / h(a) = h(b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha(t) = cte \quad \forall t \in [a, b]$$

Con ello, el resultado anterior puede expresarse también así:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial q'} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q} = 0 \quad \forall t \in [0, T]}$$

Esta última es la ecuación de Euler-Lagrange, un conjunto de n ecuaciones diferenciales de 2º orden que requieren $2n$ constantes de integración, que son q_0 y $q_T \in \mathbb{R}^n$, para su resolución.

Observación:

Cuando se tiene el problema de encontrar el extremo del funcional $J = \int_0^T f(q', q, t) dt$
 sujeto a $\begin{cases} \phi(q', q, t) = 0 & \phi \in \mathbb{R}^m, m \leq n \\ \psi(q_\alpha, t_\alpha) = 0 & \psi \in \mathbb{R}^p \end{cases}$,

donde el subíndice α indica 0 o T .

El problema es equivalente a encontrar el extremo de

$$F = J + \xi^t \psi \quad \text{sujeto a } \phi = 0$$

$$q \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^p, \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_p \end{pmatrix}, \text{ siendo } \xi = \xi(t)$$

A.5.2. Aplicación sobre los modelos reducidos POD.

Supongamos que nos interesa minimizar

$$J(a, \gamma) = \frac{1}{2} \int_0^T \alpha \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) + \beta \gamma^2 dt \quad (\text{A.20})$$

donde $a = (a_1, \dots, a_n)$, $a_i = a_i(t)$ representa a cada modo temporal, γ es la rotación y $\alpha, \beta > 0$ son parámetros que se fijan.

Si la ecuación (A.20) se halla sujeta a las condiciones

$$\begin{cases} \phi_i = a'_i - \dots = 0 & 1 \leq i \leq n \\ a_i(0) = a_{i0} \text{ (condición inicial)} \end{cases}$$

Esto es, cada ϕ_i representa a la ecuación diferencial asociada a cada modo a_i .

Para escribir explícitamente el desarrollo, supongamos $n = 2$, entonces:

$$\begin{aligned} a'_1 &= h_1 + l_{11}a_1 + l_{12}a_2 + c_{111}a_1^2 + c_{112}a_1a_2 + c_{121}a_2a_1 + c_{122}a_2^2 + \\ &+ d_1\gamma' + (e_1 + f_{11}a_1 + f_{12}a_2)\gamma + g_1\gamma^2 \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} a'_2 &= h_2 + l_{21}a_1 + l_{22}a_2 + c_{211}a_1^2 + c_{212}a_1a_2 + c_{221}a_2a_1 + c_{222}a_2^2 + \\ &+ d_2\gamma' + (e_2 + f_{21}a_1 + f_{22}a_2)\gamma + g_2\gamma^2 \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Estas dos expresiones definen $\phi_1 = a'_1 - \dots = 0$ y $\phi_2 = a'_2 - \dots = 0$

Por lo expresado antes, el problema se reduce a buscar el extremo de

$$J(a, \gamma, \xi) = \frac{1}{2} \int_0^T (\alpha(a_1^2 + a_2^2) + \beta\gamma^2) dt + \int_0^T \xi_1\phi_1 + \xi_2\phi_2 dt$$

sujeto a:

$$\begin{cases} \phi_1 = a'_1 - \dots = 0 \\ \phi_2 = a'_2 - \dots = 0 \end{cases}$$

Reemplazando,

$$\begin{aligned} \delta J &= \\ &\int_0^T \{ [\alpha a_1 + \xi_1(-l_{11} - 2c_{111}a_1 - (c_{112} + c_{121})a_2 - f_{11}\gamma) + \\ &+ \xi_2(l_{21} - 2c_{211}a_1 - (c_{212} + c_{221})a_2 - f_{21}\gamma)] \delta a_1 + \\ &+ [\alpha a_2 + \xi_1(-l_{12} - 2c_{122}a_2 - (c_{112} + c_{121})a_1 - f_{12}\gamma) + \\ &+ \xi_2(-l_{22} - (c_{212} + c_{221})a_1 - 2c_{222}a_2 - f_{22}\gamma)] \delta a_2 \\ &+ [\beta\gamma + \xi_1(-e_1 - f_{11}a_1 - f_{12}a_2 - 2g_1\gamma) + \xi_2(-e_2 - f_{21}a_1 - f_{22}a_2 - 2g_2\gamma)] \delta\gamma + \\ &+ \xi_1\delta a'_1 + \xi_2\delta a'_2 + [\xi_1(-d_1) + \xi_2(-d_2)] \delta\gamma' \} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta J = & \int_0^T [\alpha a_1 + \xi_1(-l_{11} - 2c_{111}a_1 - (c_{112} + c_{121})a_2 - f_{11}\gamma) + \\
& + \xi_2(l_{21} - 2c_{211}a_1 - (c_{212} + c_{221})a_2 - f_{21}\gamma) - \xi_1'] \delta a_1 dt + \xi_1 \delta a_1|_0^T + \\
& + \int_0^T [\alpha a_2 + \xi_1(-l_{12} - 2c_{122}a_2 - (c_{112} + c_{121})a_1 - f_{12}\gamma) + \\
& + \xi_2(-l_{22} - (c_{212}a_1 + c_{221})a_1 - 2c_{222}a_2 - f_{22}\gamma) - \xi_2'] \delta a_2 dt + \xi_2 \delta a_2|_0^T + \\
& + \int_0^T [\beta\gamma + \xi_1(-e_1 - f_{11}a_1 - f_{12}a_2 - 2g_1\gamma) + \\
& + \xi_2(-e_2 - f_{21}a_1 - f_{22}a_2 - 2g_2\gamma)] \delta\gamma + (-d_1)\xi_1 \delta\gamma|_0^T + (-d_2)\xi_2 \delta\gamma|_0^T - \\
& - \int_0^T [\xi_1'(-d_1)\delta\gamma + \xi_2'(-d_2)\delta\gamma] dt = \\
= & 0
\end{aligned}$$

Imponiendo las condiciones $\xi_1(T) = \xi_2(T) = 0$, y las condiciones iniciales $\delta a_1(0) = \delta a_2(0) = 0$, $\delta\gamma(0) = 0$, se eliminan en la anterior ecuación, los términos $\xi_1 \delta a_1|_0^T$, $\xi_2 \delta a_2|_0^T$ y $\xi_1 \delta\gamma|_0^T + \xi_2 \delta\gamma|_0^T$.

Haciendo además,

$$\begin{aligned}
\xi_1' &= \alpha a_1 + \xi_1(-l_{11} - 2c_{111}a_1 - (c_{112} + c_{121})a_2 - f_{11}\gamma) + \\
& \quad \xi_2(-l_{21} - 2c_{211}a_1 - (c_{212} + c_{221})a_2 - f_{21}\gamma) \\
\xi_2' &= \alpha a_2 + \xi_1(-l_{12} - 2c_{122}a_2 - (c_{112} + c_{121})a_1 - f_{12}\gamma) + \\
& \quad + \xi_2(-l_{22} - (c_{212} + c_{221})a_1 - 2c_{222}a_2 - f_{22}\gamma)
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Con las condiciones en el extremo T es posible asegurar la solución única de esta ecuación que se integra hacia atrás desde T hasta 0.

Las integrales que contienen δa_1 y δa_2 se simplifican y la expresión para δJ resulta:

$$\begin{aligned}
\delta J = & \int_0^T [\beta\gamma + \xi_1(-e_1 - f_{11}a_1 - f_{12}a_2 - 2g_1\gamma) + \\
& + \xi_2(-e_2 - f_{21}a_1 - f_{22}a_2 - 2g_2\gamma) + d_1\xi_1' + d_2\xi_2'] \delta\gamma dt
\end{aligned} \tag{A.24}$$

En la determinación de un mínimo para la función de costo J , se busca que en cada paso de cálculo, sea $\delta J < 0$. Podemos establecer un valor umbral ε a partir del cual $\delta J = \varepsilon_J \sim 0$. Para asegurar lo anterior, necesitamos que el integrando de (A.24) sea siempre negativo, luego:

$$\begin{aligned}
\delta\gamma = - & [d_1\xi_1' + d_2\xi_2' + \beta\gamma + \xi_1(-e_1 - f_{11}a_1 - f_{12}a_2 - 2g_1\gamma) + \\
& \quad \xi_2(-e_2 - f_{21}a_1 - f_{22}a_2 - 2g_2\gamma)]
\end{aligned} \tag{A.25}$$

Conocido $\delta\gamma$ se calcula nuevamente la ecuación diferencial para los modos temporales y se obtiene \tilde{a} , que representa a los modos temporales correspondientes a $\gamma + \delta\gamma$. Se evalúa entonces $J(\tilde{a}, \gamma + \delta\gamma)$ y lo comparamos con $J(a, \gamma)$ hasta verificar

$$\boxed{\delta J = J(\tilde{a}, \gamma + \delta\gamma) - J(a, \gamma) < \varepsilon}$$

Implementación.

Para calcular la solución del sistema formado por las ecuaciones (A.21)(A.22), el método es similar al que ya conocemos para resolver el sistema (4.21). Los coeficientes de los términos asociados a las rotaciones pueden también estimarse mediante identificación polinomial.

- I. Para un valor de α y β relativos a la ponderación del costo del desprendimiento y del control respectivamente, calculamos la función de costo asociada para cada caso de control, J_{γ_1} , J_{γ_2} , etc. Estos valores de la función J nos permiten saber alrededor de qué velocidades se encuentra el mínimo. Seleccionamos entonces la velocidad γ_i para la que J es mínima. Disponemos entonces de un valor de $J^{(0)} = J_{\gamma_i}$.
- II. Con la solución $a^{(0)}(t)$ y con el valor de γ_i correspondiente podemos calcular el sistema de ecuaciones para la variable adjunta ξ (A.23). A partir de este resultado, podemos determinar $\delta\gamma$.
- III. El nuevo valor de $\gamma^{(1)} = \gamma_i + \kappa\delta\gamma$, donde κ es una constante de módulo menor a 1. En nuestro trabajo consideramos sólo funciones de velocidad constante. Introducimos este valor para resolver nuevamente las ecuaciones (A.21)(A.22). Esto significa que consideramos que los coeficientes de las ecuaciones diferenciales no cambian en nuestro problema. Esto implica considerar que los modos espaciales, asociados a los dos modos fluctuantes con los que trabajamos, difieren poco cuando el cambio de velocidad es pequeño.
- IV. Con el nuevo valor $a^{(1)}(t)$ podemos conocer $J^{(1)}$ y δJ . Si $\delta J > 0$, debemos recalcular $\gamma^{(1)} = \gamma_i - \kappa\delta\gamma$. En caso contrario, proseguimos con el cálculo de $\gamma^{(n)}$ hasta la convergencia $\delta J^{(n)} = \varepsilon$.

Bibliografía

- [1] Adrian R.J. Particule-imaging techniques for experimental fluid mechanics. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 23 :261 304, 1991.
- [2] Adrian R, Conditional eddies in isotropic turbulence, *Physics of Fluids*, November 1979 – Volume 22, Issue 11, pp. 2065-2070
- [3] Akselvoll K. and Moin P. Large-eddy simulation of turbulent confined coannular jets. *J. Fluid Mech.*, 315 :387 411, 1996.
- [4] Artana G., Desimone G. and Touchard G. 1999 Study of the changes in the flow around a cylinder caused by electroconvection *Electrostatics 99* (IOP Publishing Ltd, Bristol Philadelphia) pp 147-152.
- [5] Artana G., DiPrimio G., Desimone G., Moreau E. and Touchard G., Electrohydrodynamic actuators on a subsonic air flow around a circular cylinder, *Proc. 4th AIAA Weakly Ionized Gases International Conference* (Anaheim, USA, June 2001) paper 2001-3056
- [6] Artana G., Sosa R., Moreau E. and Touchard G., Control of the near-wake flow around a circular cylinder with electrohydrodynamic actuators, *Exp. Fluids*, 2003, 35, 580-588.
- [7] Artana G., D’Adamo J., Leger L., Moreau E., Touchard G., Flow control with electrohydrodynamic actuators, *AIAA Journal*, 40(9), 1773-1779, (2002).
- [8] Aubry N., Holmes P., Lumley J.L., Stone E., The dynamics of coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, 192:115-73
- [9] Bennett A.F., *Inverse Methods in Physical Oceanography*, Cambridge University Press, 1992.
- [10] Begueri Buquet M. , .^{Estudio experimental del flujo en una cavidad por tecnicas de seguimiento de imagenes de particulas}”, Tesis de Ingeniería, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, Argentina.

- [11] Bergmann M, Cordier L., and Brancher J.P., Optimal rotary control of the cylinder wake using proper orthogonal decomposition reduced-order model, *Physics of Fluids* 17, 2005
- [12] Blevins, R. D. *Flow Induced Vibration*. New York: Van Nostrand Reinhold Co., 1997. 451 p., il.
- [13] Bonnet J.P., Cordier L., Delville J., Large-Scale-Structure Identification and Control in Turbulent Shear Flows, en *Flow Control: Fundamental and Practices*, eds. Mohamed Gad-el-Hak Andrew Pollard y Jean Paul Bonnet, Springer, 1998.
- [14] Bonnet J.P., Delville J., Glauser M.N., Antonia R.A., Bisset D.K., Cole D.R., Fiedler H.E., Garem J.H., Hilberg J.H., Jeong J., Kevlahan N.K.R., Ukeiley L.S., and Vincendeau E. Collaborative testing of eddy structure identification methods in free turbulent shear flows. *Exp. Fluids*, 25 :197 225, 1998.
- [15] Braud Caroline. *Identification de systèmes dynamiques*, Diplôme d'études approfondis, Université de Poitiers, 2000
- [16] Braud Caroline. *Etude de la dynamique d'un écoulement à cisaillements croisés : interaction couche de mélange - sillage*. Thèse de doctorat (12 décembre 2003), Université de Poitiers.
- [17] Braud C., Heitz D., Arroyo G., Perret L., Delville J., and Bonnet J.P. Low-dimensional analysis, using POD, for two mixing layer-wake interactions. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 25(3) :351 363, June 2004.
- [18] Braud C., Heitz D., Braud P., Arroyo G., and Delville J. Analysis of the wake/mixing-layer interaction using multiple plane PIV and 3D classical POD. *Exp. Fluids*, 37(1) :95 104, 2004.
- [19] Brereton, GJ & Kodal, A. An adaptive turbulence filter for decomposition of organized turbulent flows. *Phys. Fluids* 6 (5), 1775–1786, (1994).
- [20] Cazemier A, Verstappen R and Veldman P., Proper orthogonal decomposition and low-dimensional models for driven cavity flows, *Physics of Fluids*, Volume 10, Number 7, July 1998.
- [21] Colver G. and El-Khabiry S., Modeling of DC corona discharge along an electrically conductive flat plate with gas flow *IEEE Trans. Ind. Appl.* 35 387–94.
- [22] Cook, P. A. (1986). *Nonlinear Dynamical Systems*. Prentice-Hall International. London, UK.

- [23] Couplet M., Basdevant C., Sagaut P., Modélisation d'un écoulement turbulent par un système dynamique de dimension réduite, CANUM 2003, Montpellier, France.
- [24] Couplet M., Sagaut P., and Basdevant C. Intermodal energy transfers in a proper orthogonal decomposition-Galerkin representation of a turbulent separated flow. *J. Fluid Mech.*, 491 :275-284, 2003.
- [25] Couplet M., Basdevant C., Sagaut P., Calibrated reduced-order POD-Galerkin system for fluid flow modelling, *Journal of Computational Physics*, Volume 207, Issue 1, 20 July 2005, Pages 192-220.
- [26] Corke T., Jumper E., Post M., Orlov D. and McLaughlin T., Applications weakly ionized plasmas as wing flow control devices, AIAA Paper No 2002-0350
- [27] Corke T. and Chuan H.E., Plasma flaps and slats: an application of weakly-ionized plasma actuators, AIAA Paper No 2004-2127
- [28] Chew Y T, Cheng M, Luo SC, A numerical study of vortex shedding from a rotating circular cylinder by a hybrid vortex method - *Journal of Fluid Mechanics*, 299,35-71, 1995
- [29] D'Adamo J., Papadakis N., Mémin E., Artana G., Variational assimilation of POD low-order dynamical systems, *Journal of Turbulence*, 2006, accepted for publication.
- [30] D'Adamo J., Cammilleri A., Artana G., POD reduced order model for control of wake flows, *Anais da 5a EPTT 2006*, ABCM, Rio de Janeiro, Brasil, Set. 25 -30, 2006.
- [31] D'Adamo J., Artana G., Moreau E., Touchard G., 2002, "Control of the airflow close to a flat plate with electrohydrodynamic actuators", ASME Paper N° 2002-31041.
- [32] D'Adamo J., Cammilleri A., Artana G., Control del flujo alrededor de cilindros mediante el uso de actuadores EHD, *Escola de Transicao e Turbulence*, Florianopolis, Brasil, Septiembre, 2002.
- [33] D'Adamo J., Cammilleri A., Gronskis A., Artana G., Silvestrini J., Modelo Reducido POD-Galerkin para flujos viscosos a bajos Re, *Congreso de Mecánica Computacional MECOM 2005*, UADE, diciembre de 2005.

- [34] A. Deane, I. Kevrekidis, G. Karniadakis and S. Orszag, Low-dimensional models for complex geometry flows: Application to grooved channels and circular cylinders,” *Phys. Fluids A*, Vol. 3, 1991, pp. 2337-2354.
- [35] Desimone G., Estudio experimental de la modificación del escurrimiento alrededor de un cilindro circular a través de la electroconvección, Tesis de Ingeniería F.I.U.B.A.(2000)
- [36] Dusek J., Le Gal P., Fraunié P, A numerical and theoretical study of the first Hopf bifurcation in a cylinder wake, *J. Fluid Mech.*, 264 (1994),
- [37] de Souza F, Delville J, Lewalle J, Bonnet J P, On the large scale organization of a turbulent boundary layer disturbed by a circular cylinder. Symposium on Turbulent Shear Flows, 11th, Grenoble, France, 1999.
- [38] R. Everson and L. Sirovich. The Karhunen-Loeve Procedure for Gappy Data. *J.Opt.Soc.Am.*, 12: 1657-1664, 1995.
- [39] R. Everson and L. Sirovich. The Karhunen-Loeve Procedure for Gappy Data. *J.Opt.Soc.Am.*, 12: 1657-1664, 1995.
- [40] E Arian, M Fahl, E Sachs, Trust region Proper Orthogonal Decomposition for flow control ICASE Report 2000-25
- [41] and Kevlahan N., *Physics of Fluids* 11, 2187 (1999).
- [42] Farge M., Schneider K., Pellegrino G., Wray A., Rogallo R., Coherent vortex extraction in three-dimensional homogeneous turbulence: Comparison between CVS-wavelet and POD-Fourier decompositions, *Physics of Fluids* 15(10), 2886-2896 (2003).
- [43] Fey, U., König, M. & Eckelmann, H. 1998 A new Strouhal-Reynolds-number relationship for the circular cylinder in the range $47 \leq Re \leq 2 \times 10^5$. *Physics of Fluids A* Vol. 1, pp. 189-192.
- [44] Filler JR, Marston PL, Mih WC, Response of the shear layers separating from a circular cylinder to small-amplitude rotational oscillations, *J. Fluid Mech.* (1991), vol. 231, pp. 481-499
- [45] Forte M., Jolibois J., Moreau E. y Touchard G., Optimization of a dielectric barrier discharge actuator by stationary and non-stationary measurements of the induced flow velocity - Application to airflow control, AIAA 2006-2863, 3rd AIAA FLOW Control Conference, California.

- [46] Mohamed Gad-el-Hak Andrew Pollard y Jean Paul Bonnet, Flow Control: Fundamental and Practices, Springer, 1998.
- [47] Gasquet C. y Witomski P., Fourier analysis and applications, Springer-Verlag, 1998.
- [48] Gerhard J., Pastoor M., King R., Noack B.R., Dillmann A., Morzinski M. & Tadmor G.(2003) Model-based control of vortex shedding using low-dimensional Galerkin models, AIAA Paper 2003-4262
- [49] Gerber van der Graaf, GPIV software, <http://gpiv.sourceforge.net>
- [50] Glaze J.D. and Frankel S.H. Stochastic inlet conditions for large-eddy simulation of a fully turbulent jet. AIAA Journal, 41(6) :1064 1073, June 2003.
- [51] Gordeyev S.V. and Thomas F.O. Coherent structure in the turbulent planar jet. Part2. Structural topology via POD eigenmode projection. J. Fluid Mech., 460 :349 380, 2002.
- [52] Graham, W., Peraire, J., Tang, K., "Optimal control of vortex shedding using Low Order Models. Part I:Open-Loop Model Development", IJNME, 1997.
- [53] Graham, W., Peraire, J., Tang, K., "Optimal control of vortex shedding using Low Order Models. Part II: Model-Based Control", IJNME, 1997.
- [54] Gronskis A., D'Adamo J., Artana G., Camillieri A., Silvestrini J., Coupling mechanical rotation and EHD actuation in flow past a cylinder, Proceedings of the 2006 International Symposium on electrohydrodynamics, 4-6 diciembre 2006, Buenos Aires, Argentina.
- [55] Gunes H., Sirisup S. & Karniadakis G., Journal of computational physics, 2006, vol. 212, no1, pp. 358-38.
- [56] Hart D.P. Super-resolution PIV by recursive local-correlation. Journal of Visualization, 3(2):187 194, september 2000.
- [57] He J. W., Glowinski, Metcalfe R. Nordlander A. y Periaux J., Active control and drag optimization for flow past a circular cylinder, J. Computational Physics, 163, 83(2000).
- [58] Hilborn R., Chaos and Nonlinear Dynamics. Oxford University Press, New York, 1994
- [59] Homescu C., Navon I.M. and Li Z., Suppression of vortex shedding for flow around a circular cylinder using optimal control, Int. J. Numer. Meth. Fl. 38, 43(2002).

- [60] Holmes, P. J., Lumley J. L., and Berkooz, G., Turbulence, coherent structures, symmetry and dynamical systems. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1996.
- [61] Hussain A., Coherent structures—reality and myth. [Physics of Fluids 26, 2816 (1983)]
- [62] Huang Rong F., LIN Chih L., Vortex Shedding and Shear-Layer Instability of Wing at Low-Reynolds Numbers, AIAA Journal, Vol. 33, No.8, August 1995.
- [63] Hyun K. T. and Chun C. H., The wake ow control behind a circular cylinder ion wind Exp. Fluids(2003), 35, pp 541-552.
- [64] Iollo A., Lanteri S., Desideri J.A., Stability Properties of POD-Galerkin Approximations for the Compressible Navier Stokes Equations, INRIA Research Rapport n° RR-3589, 1998
- [65] Ivanko D., Reporte técnico sobre la instalación del laboratorio de fluidodinámica, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, 1971.
- [66] Jaminet J. F. and Van Atta C. W., Experiments on vortex shedding from rotating circular cylinders, AIAA Journal. 7, 1817 (1969).
- [67] Gunes H., Sirisup S. and Karniadakis G.E., Gappy Data: To Krig or Not to Krig? 212, 358-382, 2006.
- [68] Sirisup S. and Karniadakis G.E. , A spectral viscosity method for correcting the long-term behavior of POD models,” J. Comp. Phys., 194, 92-116, 2004.
- [69] Keane R., Adrian R., Theory of Cross Correlation Analysis of PIV Images”, Applied Scientific Research, Vol 49, 1992 pp 191-215.
- [70] Kolmogorov & Fomin, Elementos de la Teoría de Funciones y el Análisis Funcional, Mir, Moscú, 1978
- [71] Kunhardt E.E. (2000), Generation of Large-Volume, Atmospheric-Pressure, Nonequilibrium Plasmas , IEEE Transactions on Plasma Science, vol. 28, N0.1, pp. 189- 200
- [72] Lagarkov A.N. and Rutkevich I.M. , ”Ionization Waves in Electrical Breakdown of Gases”, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [73] Le Dimet F., Talagrand O, Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: theoretical aspects, Tellus, 1986, 38A, 97–110.

- [74] Lesieur M. Turbulence and coherent vortices.(1993) En Computational Fluid Dynamics, eds. M Lesieur, P. Comte, J. Zinn-Justin. Elsevier, New York.
- [75] Likhanskii A. V., Shneider M. N., Macheret S., Miles R., Modeling of interaction between weakly ionized near surface plasmas and gas flow, AIAA 2006-1204, 44 AIAA Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada, 2006.
- [76] Lu X. Y., Sato J., A numerical study of flow past a rotationally oscillating cylinder, *J. Fluids Struct.* 10, 829(1996)
- [77] Lumley, J. L., The structure of inhomogeneous turbulence, in *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation*, A.M. Yaglom and V.I. Tatarski, eds., Nauka, Moscow, 1967, pp. 166-178.
- [78] McLaughlin T. E., Munska M. D., Vaeth J. P., Dauwalter T. E., Goode J. R. and Siegel S. G., Plasma-based actuators for cylinder wake vortex control AIAA Meeting (Portland, USA, June 2004)
- [79] Manneville P., *Dynamique non lineaire et chaos*, cours de DEA en Mecanique . Laboratoire d'Hydrodynamique, Ecole Polytechnique.
- [80] Mathelin L., Bataille F., Lallemand A., The effect of uniform blowing on the flow past a circular cylinder, *J. Fluids Eng.*, 124(2), p. 452-464, 2002.
- [81] Mathelin L., Bataille F., Lallemand A., Near wake of a circular cylinder submitted to blowing. Part I: boundary layers evolution, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 44(19), p. 3701-3708, 2001.
- [82] Mathelin L., Bataille F., Lallemand A.,Near wake of a circular cylinder submitted to blowing. Part II: impact on the dynamics, with F. Bataille and A. Lallemand, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 44(19), p. 3709-3719, 2001.
- [83] Meier G. E. A., Schnerr, G. H., *Control of flow instabilities and unsteady flows*, Springer-Wien, 1996.
- [84] Meyer C., *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 2000.
- [85] Mittal S., Kumar B., Flow past a rotating cylinder, *Journal of Fluid Mechanics*, 2003, vol 476, pp 303-334. Cambridge Univ Press.
- [86] Moreau E., Airflow control by non-thermal plasma actuators 2007 *J. Phys. D: Appl. Phys.* 40 605-636.

- [87] B.R. Noack, K. Afanasiev, M. MorzyDski, G. Tadmor, and F. Thiele, A hierarchy of low-dimensional models for the transient and post-transient cylinder wake, *J. Fluid Mech.* 497, 335 2003
- [88] Noack B., Papas P., Monkewitz P., The need for a pressure-term representation in empirical Galerkin models of incompressible shear flows, *J. Fluid Mech.* (2005), vol. 523, pp. 339 365.
- [89] Noack B., Tadmor G., Morzynski M.(2004) "Low-dimensional models for feedback flow control. Part I: Empirical Galerkin models", AIAA Paper 2004-2408
- [90] Tadmor G., Noack B., Morzynski M., Siegel S.(2004) "Low-dimensional models for feedback flow control. Part II: Observer and controller design", AIAA Paper 2004-2409
- [91] Noger C, Touchard G and Chang J S, Active control of cylinder in cross flow by corona discharge induced EHD secondary flow, *Proc. ISNTP-2* (1997), pp. 136–141997.
- [92] Okazaki S. J. (1988), Stable Glow Plasma at Atmospheric Pressure , *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 21, pp. 836.
- [93] Park D. S., Ladd D. M. and Hendricks E. W. Feedback control of von Kármán vortex shedding behind a circular cylinder at low Reynolds numbers, *Physics of Fluids – July 1994 – Volume 6, Issue 7*, pp. 2390-2405.
- [94] Perret L., 2004, Etude du couplage instationnaire calculs expériences en écoulements turbulents, Thesis of the University of Poitiers, France.
- [95] Perret L., Collin E., Delville J., Polynomial identification of POD based low-order dynamical system, *Journal of Turbulence*, Volume 7, Number 17 / 2006, pp. 1 - 15
- [96] Perry, A., Chong M., Lim T., The vortex-shedding process behind twodimensional bluff bodies. *Journal of Fluid Mechanics.* v. 116, p. 77-90, 1982.
- [97] B Pier, On the frequency selection of finite amplitude vortex shedding in the cylinder wake, 2002 *J. Fluid. Mech.* 458, 407-477
- [98] Protas B. and Wesfreid J. , "Drag force in the open-loop control of the cylinder wake in the laminar regime," *Phys. Plasmas* 14, 810 (2002).
- [99] Protas B., Linear Feedback Stabilization of Laminar Vortex Shedding Based on a Point Vortex Model. *Physics of Fluids* 16(12), 4473-4488, 2004

- [100] Protas B., Styczek A., Optimal rotary control of the cylinder wake in the laminar regime, *Phys. Fluids*, 14(7),2073, 2002.
- [101] Provansal M., Mathis C., and Boyer L. Benard-von Karman instability: transient and forced regimes. *J. Fluid Mech*, 182:1-22, 1987.
- [102] Raffel M., Willert C., and Kompenhans J. *Particule Image Velocimetry, a practical guide*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [103] Rajae M, Karlson S, Sirovich L. Low-dimensional description of free shear flow coherent structures and their dynamical behavior. *Journal of Fluid Mechanics* 1994; 258: 1401 1402.
- [104] Raizer Y. P. (1991), *Gas Discharge Physics* , Springer, Berlin.
- [105] Ravindran S : Control of flow separation over a forward-facing step by Model reduction, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol 191, pp 4599-4617, 2002.
- [106] Rempfer D. Investigations of boundary layer transition via Galerkin projections on empirical eigenfunctions. *Phys. Fluids*, 8(1) :175 188, January 1996.
- [107] Brown G.L., Roshko A., On density effects and large scale structure in turbulent mixing layers, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 64, pp. 775-816, 1974
- [108] Roshko A., Vortex systems in a wake. *Advances in Applied Mechanics*,3, 185-95, 1953.
- [109] Roth J., Sherman D. and Wilkinson S., Boundary layer flow control with a one atmosphere uniform glow discharge surface plasma AIAA Paper 98-0328 Proc. 36th AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit (Reno, NV, January 12 15, 1998)
- [110] Roth J, Sherman D., Electrohydrodynamic flow control with a glow discharge surface plasma AIAA J. 38 1166 78(2000)
- [111] Roth J., Xin D., Optimization of the aerodynamic plasma actuator as an electrohydrodynamic (EHD) electrical device AIAA Paper No 2006-1203.
- [112] Roth J., "Aerodynamic Flow Acceleration using Paraelectric and Peristaltic Electrohydrodynamic (EHD) Effects of a One Atmosphere Uniform Glow Discharge Plasma", *Physics of Plasmas*, Vol. 10, No. 5 (2003).
- [113] Rudin W., *Functional Analysis*, Mc Graw Hill, 1973

- [114] Schlichting, H. *Boundary-Layer Theory*. 7th ed. New York: McGraw-Hill, 1979. 817 p.
- [115] Shanmugan K. S. and Breipohl A. M. , *Random Signals: Detection, Estimation, and Data Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
- [116] Sherman D. M., *Manipulating aerodynamic boundary layers using an electrohydrodynamic effect generated by a one atmosphere uniform glow discharge plasma* MS Thesis Department of Physics, University of Tennessee.(1998)
- [117] Feedback control of a cylinder wake low-dimensional model. Cohen K., Siegel S., McLaughlin T., Gillies E., *AIAA Journal* 41, 8, 2003
- [118] Sirovich, L. (1987) Turbulence and the dynamics of coherent structures, Part I-III, *Quarterly of Appl. Math.*, XLV(3), pp. 561-82.
- [119] Scherbakov A et al 2000 Drag reduction by ac streamer corona discharges along a wing-like profile plate *AIAA Paper* No 2000-2670
- [120] Sosa R., Moreau E., Touchard G., Artana G., *Stall Control at High Angle of Attack with periodically excited EHD actuators* *AIAA Oregon* *AIAA Paper* No 2004-2738
- [121] Sosa R., Artana G., Grondona D., Kelly H., Márquez A. and Minotti F., *Discharge characteristics of plasma sheet actuators*, *Journal of Physics D* (2006) *****
- [122] Stojkovic D., Schön P., Breuer M., and Durst F., *On the new vortex shedding mode past a rotating circular cylinder*, *Physics of Fluids – May 2003 – Volume 15, Issue 5*, pp. 1257-1260.
- [123] Sumer, B. M.; Fredsoe, J. *Hydrodynamics around Cylindrical Structures*. London: World Scientific Publishing, 1997. 530 p.
- [124] B.Sportisse, D. Quelo, *Assimilation de données. 1ère partie: Eléments théoriques*. Rapport, Centre d'Enseignement et de Recherche en Environnement Atmosphérique, Laboratoire Commun ENPC-EDF R&D, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Octobre 2004.
- [125] Thiria, B., Goujon-Durand, S., Wesfreid, J.E., *Wake of a cylinder performing rotary oscillations*. *Journal Of Fluid Mechanics* 2006, 560: 123-147.
- [126] Verdet P. *Etude expérimentale de la signature thermique des structures turbulentes d un jet subsonique, axisymétrique, chauffé*. Diplôme D Etudes Approfondies, Université de Poitiers, 1998.

- [127] Vigo G., Méthodes de décomposition orthogonales aux valeurs propres appliquées aux écoulements instationnaires compressibles complexes, Thèse de doctorat (16 novembre 2000), Université PARIS IX DAUPHINE.
- [128] O. Talagrand, P. Courtier, Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. I: Theory, *Journ. of Roy. Meteor. soc.*, 1987, 113, 1311–1328.
- [129] Temam R., *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Mathematics*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1993.
- [130] Thomas F., Kozlov A., Corke T., Plasma Actuators for bluff body flow control, AIAA 2006-2845 3rd AIAA Flow Control Conference, California.
- [131] Tokumaru, P. T., & Dimotakis, P. E. "The lift of a cylinder executing rotary motions in a uniform flow," *J. Fluid Mech.* 255, 1-10, 1993.
- [132] Tokumaru, P. T. & Dimotakis P. E., Rotary oscillation control of a cylinder wake, *J. Fluid Mech.* 224,71 (1991)
- [133] Townsend A.A. *The structure of turbulent shear flow*. Cambridge University Press, 1956.
- [134] Pope A., Harper J. J., *Low-Speed Wind Tunnel Testing*, 1966.
- [135] Weiss, J. (1992). The dynamics of enstrophy transfer in two-dimensional hydrodynamics, *Physica D*, 48, 273.
- [136] Welch, G. and Bishop G., *An Introduction to the Kalman Filter*, TR 95-041 Department of Computer Science University of North Carolina at Chapel Hill Chapel Hill, NC 27599-3175.
- [137] Wilkinson S P 2003 Investigation of an oscillating surface plasma for turbulent drag reduction AIAA Paper No 2003-1023
- [138] *Reduced order aerodynamics models for aerolastic control of turbomachines*, PhD Thesis, M.I.T. 2000.
- [139] Willcox , K., "Unsteady Flow Sensing and Estimation via the Gappy Proper Orthogonal Decomposition" in *Proceedings of the 5th SMA Symposium*, January 2004, also AIAA Paper 2004-2415
- [140] Williams E. M., *The physics and technology of xerographic processes* , Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1993.

- [141] Williamson C. H. K., The existence of two stages in the transition to three-dimensionality of a cylinder wake. *Phys. Fluids*, v. 31 (11), p. 3165-3168, 1988.
- [142] Williamson, Vortex Dynamics in the cylinder wake. *Annual Review in Fluid Mechanics*. v. 28, p. 477-539, 1996a.
- [143] Williamson, C. H. K. 1996b Three-dimensional wake transition. *J. Fluid Mech.* Vol. 328, pp. 345 407.
- [144] Ma-Xia, Karniadakis G., A low-dimensional model for simulating three-dimensional cylinder flow, *J. Fluid Mech.* (2002), vol. 458, pp. 181, 2002.
- [145] Zdravkovich M., *Flow Around Circular Cylinders*, 2 Volúmenes, Oxford University Press, 1997
- [146] Zielinska BJA, Wesfreid JE, On the spatial structure of global modes in wake flows, *Phys. Fluids* 7 (1995) 1418–1424.