Escola Politècnica Superior de Castelldefels

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

TRABAJO FINAL DE CARRERA

TÍTULO DEL TFC : Identificación del modo longitudinal de un UAV

TITULACIÓN: Ingenieria Técnica Aeronáutica, especialidad Aeronavegación

AUTOR: Marc Espuga Zaragoza

DIRECTOR: Dagoberto José Salazar Hernández

FECHA: 11 de julio de 2007

Título : Identificación del modo longitudinal de un UAV

Autor: Marc Espuga Zaragoza

Director: Dagoberto José Salazar Hernández

Fecha: 11 de julio de 2007

Resumen

En este proyecto se le presenta al lector un método para la construción de un modelo matemático teórico del modo longitudinal de una aeronave, capaz de describir el comportamiento de ésta mediante el cálculo de las derivadas de estabilidad.
Además de la presentación de dicho método hay una aplicación práctica de éste sobre un "Unmaned Aerial Vehicle" (UAV), del cual se quiere conocer sus funciones de transferencia para contruir un sistema de control adecuado.

Title : Identification of the longitudinal mode of a UAV

Author: Marc Espuga Zaragoza

Director: Dagoberto José Salazar Hernández

Date: July 11, 2007

Overview

A method for the construción of a theoretical mathematical model of the longitudinal mode of an aircraft is presented in this project. This model is able to describe the behaviour of the aircraft using the stability derivatives.
In addition to the presentation of this method there is a practical application on a “Unmaned Aerial Vehicle” (UAV), from which we want to know its transfer functions in order to build a proper control system.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCIÓN 1

CAPÍTULO 1. Dinámica longitudinal 3

1.1. Ecuaciones del movimiento 3

1.2. Ecuaciones longitudinales del movimiento 6

CAPÍTULO 2. Derivadas de Estabilidad 13

2.1. Derivadas de estabilidad. Modo longitudinal 13

2.2. Cálculo de las derivadas de estabilidad 18

2.2.1. Condiciones 18

2.2.2. Cálculo de las derivadas de estabilidad 22

CAPÍTULO 3. Funciones de transferencia 39

3.1. Respuesta transitoria 39

3.2. Funciones de transferencia 41

3.3. Gráficas de respuesta 42

CAPÍTULO 4. Conclusiones 45

BIBLIOGRAFÍA 47

APÉNDICE A. Momento de inercia 51

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1 Ejes Aeronave 3
1.2 Ejes Estabilidad 7
1.3 Componentes de la gravedad en los ejes de la aeronave 9

2.1 Orientación de los vectores de sustentación y drag después de una perturbación que provocó una velocidad vertical 15
2.2 Parámetros geométricos para la localización del estabilizador horizontal 17
2.3 Megastar XL-120 19
2.4 Pesado y balanceo 21
2.5 Área del estabilizador horizontal que está bajo los efectos del slipstream 24
2.6 Parámetros geométricos para el coeficiente de volumen 25
2.7 Ángulo de flecha en el borde ataque en función del ángulo de flecha en $c/4$ . . 26
2.8 Ángulo de flecha en el borde ataque en función del ángulo de flecha en $c/2$ . . 27
2.9 NACA 0012 C_L vs C_D 34
2.10 Constante de correción para la aportación del ala al pitch damping 35
2.11 Factor de correción para la sustentación de un alerón simple 35
2.12 Sustentación efectiva de un alerón simple 36
2.13 Factor de correción para el comportamiento no lineal en la sustentación de los alerones simples 36
2.14 Efecto del alargamiento y el cociente alerón-cuerda en la efectividad tridimesional del alerón 37

3.1 Modos longitudinales 40
3.2 Respuesta a un escalón para el modo de periodo corto 43
3.3 Respuesta a un escalón para el modo fugoide 44

A.1 Simplificación de la geometría del UAV 52
A.2 Cálculo del momento de inercia de uno de los triángulos 53

ÍNDICE DE CUADROS

1.1 Definiciones para las derivadas de estabilidad longitudinales 11

2.1 Cálculo del centro de gravedad 22

INTRODUCIÓN

Hoy en día es de gran importancia que los aviones dispongan de un buen piloto automático que facilite el trabajo del piloto y haga que el mundo de la aviación sea más seguro. Este hecho se hace imprescindible si vamos a trabajar con “Unmaned Aerial Vehicles” (UAV).

Para poder equipar un piloto automático a un UAV, y para que éste sea efectivo, debemos conocer las características de vuelo (es decir, las funciones de transferencia) del UAV en cuestión.

El objetivo principal de este proyecto se centra en la obtención de las funciones de transferencia de un UAV para el modo longitudinal. Para ello vamos a constriur un modelo del UAV a partir del comportamiento físico del sistema.

Para conseguir nuestro objetivo final hemos tenido que realizar unos pasos determinados, las cuales se describen en este documento estructurados en tres capítulos diferentes.

El primer capítulo se desarrollan las ecuaciones matemáticas que rigen el comportamiento físico del sistema y se identifican las incógnitas a calcular para conseguir nuestro objetivo final, denominadas “derivadas de estabilidad”.

En el segundo capítulo se hace un estudio detallado de estas derivadas de estabilidad y se calculan.

Y por último en el tercer capítulo se obtienen las funciones de trasferencia para el modo longitudinal del UAV estudiado.

La realización material de este proyecto se ha visto facilitada por la aportación de Xavier Prats i Menéndez, profesor de la EPSC, quien escribió los ficheros necesarios para la utilización del programa de edición LaTeX, el cual ha hecho posible que el texto tenga un aspecto agradable.

CAPÍTULO 1. DINÁMICA LONGITUDINAL

1.1. Ecuaciones del movimiento

Las ecuaciones del movimiento de una aeronave se obtienen de aplicar la segunda ley de Newton, la cual relaciona el sumatorio de fuerzas externas y momentos con las aceleraciones lineales y angulares del sistema. Para poder deducirlas primero hay que definir un sistema de ejes y tener en cuenta ciertas hipótesis:

1. El centro del sistema de ejes es el centro de gravedad del aeronave. Los ejes OX y OZ están en el plano de simetría del aeronave, y $J_{xy} = J_{yz} = 0$.
2. La masa de la aeronave es constante durante la condición de vuelo estudiada.
3. El aeronave es un sólido rígido.
4. La Tierra es un sistema de referencia inercial.
5. Las variaciones respecto del equilibrio son pequeñas, el producto de las variaciones será pequeño en comparación con las variaciones y podrán despreciarse, y la hipótesis de los ángulos pequeños podrá aplicarse a los ángulos entre los ejes de equilibrio y los de variaciones.

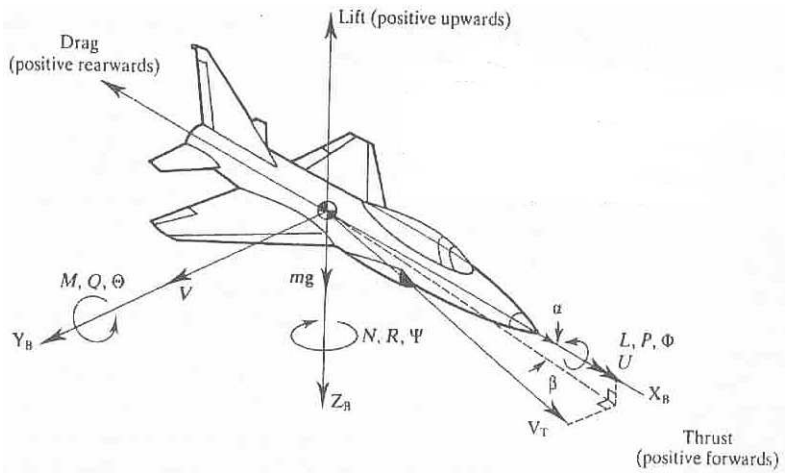

Figura 1.1: Ejes Aeronave

Una vez definidas las hipótesis que vamos a tener en cuenta para el desarrollo de las ecuaciones del movimiento aplicamos las leyes de Newton que relacionan el sumatorio de fuerzas externas con la derivada del momento y el sumatorio de momentos externos con la derivada del momento angular,

$$\sum F = \frac{d}{dt}(mV_T)\Big]_I \tag{1.1}$$

$$\sum M = \frac{d}{dt}(H)\Big]_I \tag{1.2}$$

donde $]_I$ indica que la derivada del vector es respecto a un sistema inercial. Las fuerzas y momentos externos consisten en fuerzas y momentos de equilibrio y sus cambios los cuales provocan perturbaciones de esta condición de equilibrio. Entonces,

$$\sum F = \sum F_0 + \sum \Delta F$$

y

$$\sum M = \sum M_0 + \sum \Delta M \tag{1.3}$$

donde $\sum F_0$ y $\sum M_0$ son los sumatorios de las fuerzas y momentos de equilibrio. En el análisis dinámico que vamos a realizar, el aeronave está siempre en equilibrio antes de que se introduzca una perturbación (por ejemplo, por una superficie de control). Entonces, $\sum F_0$ y $\sum M_0$ son cero. Bajo estas condiciones, las ecuaciones 1.1 y 1.2 se pueden reescribir como indican las ecuaciones 1.4 y 1.5

$$\sum \Delta F = \frac{d}{dt}(mV_T)\Big]_I \tag{1.4}$$

$$\sum \Delta M = \frac{d}{dt}(H)\Big]_I \tag{1.5}$$

A continuación vamos a considerar el movimiento de la aeronave con respecto a la Tierra. Asumiendo la segunda y cuarta hipótesis podemos reescribir la ecuación 1.4 como,

$$\sum \Delta F = m\frac{d}{dt}(V_T)\Big]_E \tag{1.6}$$

Ahora es necesario obtener una expresión para la derivada del vector velocidad con respecto a la tierra. Para ello hemos de tener en cuenta que el vector velocidad rota mientras también cambia en magnitud. Este hecho nos hace utilizar la expresión para la derivada total de un vector,

$$\frac{dV_T}{dt}\Big]_E = 1_{VT}\frac{dV_T}{dt} + \omega \times V_T \tag{1.7}$$

donde

$$1_{VT}\frac{dV_T}{dt} = i\dot{U} + j\dot{V} + k\dot{W} \tag{1.8}$$

y

$$\omega \times V_T = i(WQ - VR) + j(UR - WP) + k(VP - UQ) \tag{1.9}$$

Usando las ecuaciones 1.8 y 1.9 y separando $\sum \Delta F$ en sus componentes (x,y,z), obtenemos las ecuaciones de fuerzas lineales del movimiento:

$$\begin{aligned} \sum \Delta F_x &= m(\dot{U} + WQ - VR) \\ \sum \Delta F_y &= m(\dot{V} + UR - WP) \\ \sum \Delta F_z &= m(\dot{W} + VP - UQ) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Para obtener las ecuaciones del movimiento angular, es necesario volver a la ecuación 1.5, de la cual primero tendremos que obtener una expresión para H. Por definición, H es el momento angular de un cuerpo que gira. Para ello vamos a considerar un diferencial de masa dm del cual su momento debido a la velocidad angular ω es igual a la velocidad tangencial de dm con respecto al centro instantáneo de rotación. La velocidad tangencial puede expresarse como un producto vectorial (ver 1.11)

$$V_{tan} = \omega \times R \tag{1.11}$$

Entonces el diferencial de momento resultante puede expresarse como:

$$dM = (\omega \times r)dm \tag{1.12}$$

Y por tanto el diferencial del momento angular será el producto vectorial de dM por el brazo de palanca,

$$dH = r \times (\omega \times r)dm \tag{1.13}$$

Pero $H = \int dH$ sobre la masa de todo el aeronave. Asi

$$H = \int r \times (\omega \times r)dm \tag{1.14}$$

donde

$$\omega = iP + jQ + kR$$
$$r = ix + jy + kz$$

Resolviendo la integral 1.14 obtenemos la expresión de H que, separada en sus componentes es

$$\begin{aligned} H_x &= PI_x - RJ_{xz} \\ H_y &= QI_y \\ H_z &= RI_z - PJ_{xz} \end{aligned} \tag{1.15}$$

Una vez tenemos una expresión para H podemos resolver la ecuación 1.5. Dado que H puede cambiar en magnitud y dirección, utilizaremos de nuevo la expresión para la derivada total de un vector:

$$\sum \Delta M = 1_H \frac{dH}{dt} + \omega \times H \tag{1.16}$$

donde

$$1_H \frac{dH}{dt} = i(\dot{P}I_x - \dot{R}J_{xz}) + j(\dot{Q}I_y) + k(\dot{R}I_z - \dot{P}J_{xz}) \tag{1.17}$$

y

$$\omega \times H = i(QH_z - RH_y) + j(RH_x - pH_z) + k(PH_y - QH_x) \tag{1.18}$$

Usando las ecuaciones 1.17 y 1.18 y separando $\sum \Delta M$ en sus componentes (x, y, z) , obtenemos las ecuaciones angulares del movimiento:

$$\begin{array}{l} \sum \Delta L = \dot{P}I_x - \dot{R}J_{xz} + QR(I_z - I_y) - PQJ_{xz} \\ \sum \Delta M = \dot{Q}I_y + PR(I_x - I_z) + (P^2 - R^2)J_{xz} \\ \sum \Delta N = \dot{R}I_z - \dot{P}J_{xz} + PQ(I_y - I_x) + QRJ_{xz} \end{array} \tag{1.19}$$

1.2. Ecuaciones longitudinales del movimiento

Las ecuaciones 1.10 y 1.19 describen el comportamiento de una aeronave rígida como un sistema de seis ecuaciones no lineales. Dado que este proyecto se centra únicamente en la identificación del modo longitudinal del aeronave será necesario extraer las ecuaciones correspondientes y linealizarlas para poder obtener una solución analítica de estas sin la ayuda de un ordenador.

Para extraer las ecuaciones correspondientes al modo longitudinal hemos de considerar que el aeronave realiza un vuelo no acelerado recto y nivelado y que este será perturbado por deflexiones del elevador. Estas deflexiones generarán un momento de cabeceo sobre el eje OY, provocando una rotación sobre este eje que eventualmente genera un cambio en F_x y F_z, pero que no genera momento de alabeo o guiñada ni cambios en F_y; Asi $P = R = V = 0$ y las ecuaciones de $\sum \Delta F_y$, $\sum \Delta L$ y $\sum \Delta N$ pueden ser eliminadas. De esta manera se obtiene como resultado las ecuaciones longitudinales del movimiento para $P = R = V = 0$:

$$\begin{array}{l} \sum \Delta F_x = m(\dot{U} + WQ) \\ \sum \Delta F_z = m(\dot{W} - UQ) \\ \sum \Delta M = \dot{Q}I_y \end{array} \tag{1.20}$$

El otro juego de tres ecuaciones nos caracteriza el modo lateral, que no va a ser tratado en este proyecto. De ahora en adelante nos centraremos en la expansión de las ecuaciones longitudinales del movimiento.

Anteriormente, hemos definido las componentes de las velocidades lineales y angulares como U, V, W, P, Q y R. Como estos valores incluyen un valor de equilibrio y el valor del cambio con respecto a esta condición de equilibrio, los podemos expresar como:

$$\begin{array}{ll} U = U_0 + u & P = P_0 + p \\ V = V_0 + v & Q = Q_0 + q \\ W = W_0 + w & R = R_0 + r \end{array} \tag{1.21}$$

donde U_0, V_0, W_0, P_0, Q_0 y R_0, son los valores de equilibrio y u, v, w, p, q y r, son los cambios en estos valores de equilibrio debidos a perturbaciones. En la sección 1.1. hemos definido un sistema de ejes donde el eje OX ha sido tomado hacia adelante, pero no se ha especificado la orientación exacta. Para definir ésta alinearemos el eje OX con la dirección de equilibrio del vector velocidad de la aeronave, hecho que supone que $W_0 = 0$ (ver figura 1.2).

En la figura 1.2 los ejes X_E, Y_E y Z_E son los ejes de referencia de la Tierra; X_0, Y_0 y Z_0 son los de equilibrio de la aeronave; y X, Y" y Z son los de perturbaciones de la aeronave. Este conjunto de ejes recibe el nombre de "ejes de estabilidad", y van a ser usados en todo el análisis dinámico que sigue.

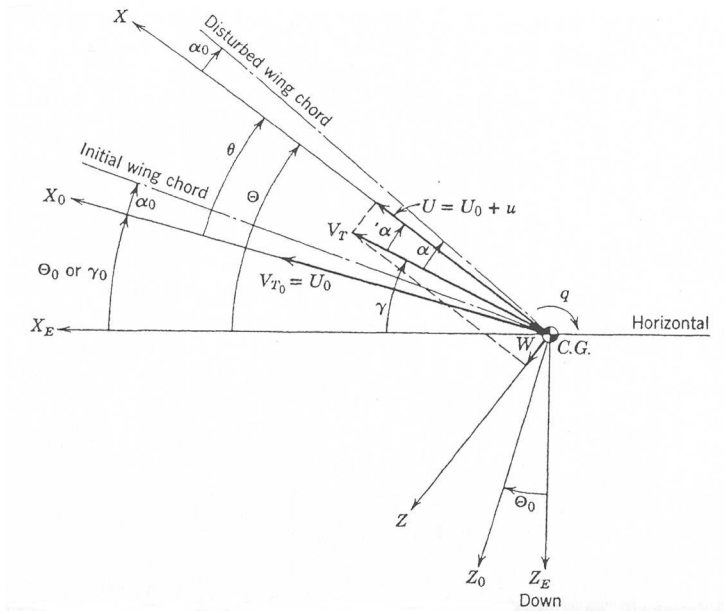

Figura 1.2: Ejes Estabilidad

Como se puede ver el la figura 1.2, Θ_0 y γ_0 se miden desde la horizontal hasta el eje de estabilidad X_0. Usando los ejes de estabilidad, Θ_0 y γ_0 son iguales. Como el cambio en Θ, que es igual a θ, está provocado por una rotación sobre el eje Y, entonces $q = \theta$.

Bajo las condiciones anteriores $U = U_0 + u$, $W = w$, y, como U_0 es una constante, $\dot{U} = \dot{u}$ y $\dot{W} = \dot{w}$. Como la aeronave inicialmente está en vuelo no acelerado, Q_0 debe ser cero; entonces $Q = q$. Haciendo estas sustituciones (y asumiendo la quinta hipótesis) las ecuaciones del movimiento longitudinal de la ecuación 1.20 pueden reescribirse como

$$\begin{array}{l} \sum \Delta F_x = m(\dot{u}) \\ \sum \Delta F_z = m(\dot{w} - U_0 q) = m(\dot{w} - U_0 \dot{\theta}) \\ \sum \Delta M = I_y \dot{q} = I_y \ddot{\theta} \end{array} \tag{1.22}$$

Ahora es necesario expandir las fuerzas y momentos aplicados y expresarlos en función de los cambios en las fuerzas y momentos que son resultado de las perturbaciones. Estas fuerzas son de origen aerodinámico y gravitacional.

Las fuerzas en la dirección X son función de $U, W, \dot{W}, \Theta$ y $\dot{\Theta}$. Entonces la ecuación diferencial de F_x puede expresarse como

$$\sum dF_x = \frac{\partial F_x}{\partial u} dU + \frac{\partial F_x}{\partial w} dW + \frac{\partial F_x}{\partial \dot{W}} d\dot{W} + \frac{\partial F_x}{\partial \Theta} d\Theta + \frac{\partial F_x}{\partial \dot{\Theta}} d\dot{\Theta} \tag{1.23}$$

Teniendo en cuenta la quinta hipótesis, las derivadas parciales son lineales y entonces los diferenciales pueden ser sustituidos por incrementos, $dU = \Delta U$, etc. Pero como u, w, etc., representan los cambios en los parámetros, podemos hacer la sustitución $u = \Delta U$, etc. Entonces la ecuación 1.23 puede expresarse como

$$\sum \Delta F_x = \frac{\partial F_x}{\partial u} u + \frac{\partial F_x}{\partial w} w + \frac{\partial F_x}{\partial \dot{w}} \dot{w} + \frac{\partial F_x}{\partial \theta} \theta + \frac{\partial F_x}{\partial \dot{\theta}} d\dot{\theta} \tag{1.24}$$

A continuación nuestro objetivo es adimensionalizar la ecuación 1.24. Para ello multiplicamos y dividimos los tres primeros términos de la ecuación 1.24 por U_0, convirtiéndose en

$$\sum \Delta F_x = U_0 \frac{\partial F_x}{\partial u} \frac{u}{U_0} + U_0 \frac{\partial F_x}{\partial w} \frac{w}{U_0} + U_0 \frac{\partial F_x}{\partial \dot{w}} \frac{\dot{w}}{U_0} + \frac{\partial F_x}{\partial \theta} \theta + \frac{\partial F_x}{\partial \dot{\theta}} d\dot{\theta} \tag{1.25}$$

Los cocientes adimensionales $\frac{u}{U_0}, \frac{w}{U_0}$ y $\frac{\dot{w}}{U_0}$ los definimos como

$$\frac{u}{U_0} = \acute{u}$$
$$\frac{w}{U_0} = \acute{\alpha}$$
$$\frac{\dot{w}}{U_0} = \acute{\dot{\alpha}}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación 1.25 obtenemos

$$\sum \Delta F_x = U_0 \frac{\partial F_x}{\partial u} \acute{u} + \frac{\partial F_x}{\partial \alpha} \acute{\alpha} + \frac{\partial F_x}{\partial \dot{\alpha}} \acute{\dot{\alpha}} + \frac{\partial F_x}{\partial \theta} \theta + \frac{\partial F_x}{\partial \dot{\theta}} d\dot{\theta} \tag{1.26}$$

como

$$U_0 \frac{\partial F_x}{\partial \omega} = \frac{\partial F_x}{\partial \omega / U_0} = \frac{\partial F_x}{\partial \acute{\alpha}} = \frac{\partial F_x}{\partial \alpha} \quad \text{ya que} \quad \frac{\partial \acute{\alpha}}{\partial \alpha} \equiv 1 \tag{1.27}$$

de la ecuación 1.22

$$\sum \Delta f_x = m\dot{u} = m\dot{u}\left(\frac{U_0}{U_0}\right) = mU_0\frac{\dot{u}}{U_0} = mU_0\acute{u} \tag{1.28}$$

Sustituyendo esta expresión para $\sum \Delta F_x$ en la ecuación y dividiendo por Sq, la ecuación 1.25 se convierte en

$$\frac{mU_0}{Sq}\acute{\dot{u}} - \frac{U_o}{Sq}\frac{\partial F_x}{\partial u}\acute{u} - \frac{1}{Sq}\frac{\partial F_x}{\partial \alpha}\acute{\alpha} - \frac{1}{Sq}\frac{\partial F_x}{\partial \dot{\alpha}}\acute{\dot{\alpha}} - \frac{1}{Sq}\frac{\partial F_x}{\partial \theta}\theta - \frac{1}{Sq}\frac{\partial F_x}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} = \frac{F_{xa}}{Sq} \tag{1.29}$$

donde F_{xa} es una fuerza aerodinámica cuyo origen se explicará posteriormente, S es la superficie alar y q es la presión dinámica. El término $\frac{\partial F_x}{\partial \theta}$, hace referencia a las componentes de la gravedad, y en la dirección X es igual a $-mgcos\Theta$ (ver figura 1.3).

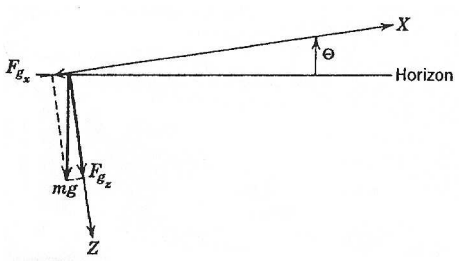

Figura 1.3: Componentes de la gravedad en los ejes de la aeronave

Sustituyendo este término y multiplicando y dividiendo el cuarto y sexto término por $\frac{c}{2U_0}$ la ecuación 1.29 se convierte en

$$\begin{aligned} &\frac{mU_0}{Sq}\acute{\dot{u}} - \frac{U_o}{Sq}\frac{\partial F_x}{\partial u}\acute{u} - \frac{1}{Sq}\frac{\partial F_x}{\partial \alpha}\acute{\alpha} - \frac{c}{2U_0}\left(\frac{1}{Sq}\right)\left(\frac{2U_o}{c}\right)\frac{\partial F_x}{\partial \dot{\alpha}}\acute{\dot{\alpha}} \\ &+\frac{mg}{Sq}(cos\Theta)\theta - \frac{c}{2U_0}\left(\frac{1}{Sq}\right)\left(\frac{2U_0}{c}\right)\frac{\partial F_x}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} = \frac{F_{xa}}{Sq} = C_{Fxa} \end{aligned} \tag{1.30}$$

Una vez adimensionalizada la ecuación 1.24 podemos sustituir todos los términos introducidos por coeficientes adimensionales. Estos coeficientes reciben el nombre de “derivadas de estabilidad” (ver cuadro 1.1). Introduciendo estos coeficientes la ecuación 1.30 se convierte en

$$\frac{mU_0}{Sq}\acute{\dot{u}} - C_{xu}\acute{u} - C_{x\alpha}\acute{\alpha} - \frac{c}{2U_0}C_{x\dot{\alpha}}\acute{\dot{\alpha}} - C_w(cos\Theta)\theta - \frac{c}{2U_0}C_{xq}\dot{\theta} = C_{Fxa} \tag{1.31}$$

Del mismo modo podemos obtener las ecuaciones para F_z y M. La ecuación F_z puede escribirse como

$$\sum \Delta F_z = \frac{\partial F_z}{\partial u}u + \frac{\partial F_z}{\partial w}w + \frac{\partial F_z}{\partial \dot{w}}\dot{w} + \frac{\partial F_z}{\partial \theta}\theta + \frac{\partial F_z}{\partial \dot{\theta}}d\dot{\theta} \tag{1.32}$$

Multiplicando y dividiendo los tres primeros términos por U_0 y usando los cocientes adimensionales definidos anteriormente, la ecuación 1.32 se convierte en

$$\sum \Delta F_z = U_0 \frac{\partial F_z}{\partial u}\acute{u} + \frac{\partial F_z}{\partial \alpha}\acute{\alpha} + \frac{\partial F_z}{\partial \dot{\alpha}}\dot{\alpha} + \frac{\partial F_z}{\partial \theta}\theta + \frac{\partial F_z}{\partial \dot{\theta}} d\dot{\theta} \tag{1.33}$$

de la ecuación 1.22

$$\sum \Delta F_z = m(\dot{\omega} - U_0\dot{\theta}) = m\left(\frac{\dot{\omega}}{U_0}U_0 - U_0\dot{\theta}\right) = mU_0\acute{\alpha} - mU_0\dot{\theta} \tag{1.34}$$

Sustituyendo esta expresión para $\sum \Delta F_z$, dividiendo por Sq y usando los coeficientes correspondientes del cuadro 1.1 la ecuación 1.33 se convierte en

$$-C_{zu}\acute{u} + \left(\frac{mU_0}{Sq} - \frac{c}{2U_0}C_{z\dot{\alpha}}\right)\acute{\dot{\alpha}} - C_{z\alpha}\acute{\alpha} + \left(-\frac{mU_0}{Sq} - \frac{c}{2U_0}C_{zq}\right)\dot{\theta} - C_w(sin\Theta)\theta = C_{Fza} \tag{1.35}$$

La ecuación de momento puede escribirse como

$$\sum \Delta M = \frac{\partial M}{\partial u}u + \frac{\partial M}{\partial w}w + \frac{\partial M}{\partial \dot{w}}\dot{w} + \frac{\partial M}{\partial \dot{\theta}}d\dot{\theta} \tag{1.36}$$

Nótese que $\frac{\partial M}{\partial \theta} = 0$ si todos los demás parámetros se mantienen constantes.

Multiplicando y dividiendo los tres primeros términos por U_0, la ecuación 1.36 se convierte en

$$\sum \Delta M = U_0 \frac{\partial M}{\partial u}\acute{u} + \frac{\partial M}{\partial \alpha}\acute{\alpha} + \frac{\partial M}{\partial \dot{\alpha}}\acute{\dot{\alpha}} + \frac{\partial M}{\partial \dot{\theta}}d\dot{\theta} \tag{1.37}$$

De la ecuación 1.22, $\sum \Delta M = I_y\ddot{\theta}$, y dividiendo por Sqc y usando los coeficientes correspondientes del cuadro 1.1 la ecuación de momento se convierte en

$$-C_{mu}\acute{u} - \frac{c}{2U_0}C_{m\dot{\alpha}}\acute{\dot{\alpha}} - C_{m\alpha}\acute{\alpha} + \frac{I_y}{Sqc}\ddot{\theta} - \frac{c}{2U_0}C_{mq}\dot{\theta} = C_{ma} \tag{1.38}$$

Las ecuaciones 1.31, 1.35 y 1.38 son las ecuaciones longitudinales del movimiento para la aeronave. Estas ecuaciones son adimensionales, y por ello todos los ángulos y sus derivadas deben estar en radianes.

En el desarrollo de las ecuaciones longitudinales del movimiento hemos introducido las derivadas de estabilidad. En el siguiente capítulo expondremos las ecuaciones y el origen de dichas derivadas.

Símbolo	Definición
C_{xu}	$\frac{U_0}{Sq}\frac{\partial F_x}{\partial u}$
$C_{x\alpha}$	$\frac{1}{Sq}\frac{\partial F_x}{\partial \alpha}$
C_w	-
$C_{x\dot{\alpha}}$	$\frac{1}{Sq}\left(\frac{2U_0}{c}\right)\frac{\partial F_x}{\partial \dot{\alpha}}$
C_{xq}	$\frac{1}{Sq}\left(\frac{2U_0}{c}\right)\frac{\partial F_x}{\partial \dot{\theta}}$
C_{zu}	$\frac{U}{Sq}\frac{\partial F_z}{\partial u}$
$C_{z\alpha}$	$\frac{1}{Sq}\frac{\partial F_z}{\partial \alpha}$
$C_{z\dot{\alpha}}$	$\frac{1}{Sq}\left(\frac{2U_0}{c}\right)\frac{\partial F_z}{\partial \dot{\alpha}}$
C_{zq}	$\frac{1}{Sq}\left(\frac{2U_0}{c}\right)\frac{\partial F_z}{\partial \dot{\theta}}$
C_{mu}	$\frac{U_0}{Sqc}\frac{\partial M}{\partial u}$
$C_{m\alpha}$	$\frac{U_0}{Sqc}\frac{\partial M}{\partial \alpha}$
$C_{m\dot{\alpha}}$	$\frac{1}{Sqc}\left(\frac{2U_0}{c}\right)\frac{\partial M}{\partial \dot{\alpha}}$
C_{mq}	$\frac{1}{Sqc}\left(\frac{2U_0}{c}\right)\frac{\partial M}{\partial \dot{\theta}}$

Cuadro 1.1: Definiciones para las derivadas de estabilidad longitudinales

CAPÍTULO 2. DERIVADAS DE ESTABILIDAD

2.1. Derivadas de estabilidad. Modo longitudinal

En el desarrollo de las ecuaciones longitudinales del movimiento en el capítulo 1 en la sección 1.2., cuando hemos expandido las fuerzas y momentos no hemos tenido en cuenta las derivadas parciales con respecto a $\dot{u}$, mientras que las derivadas parciales con respecto a $\dot{w}$ si que se han tenido en cuenta. Esto se basa en que hemos considerado el aire como un fluido cuasiestático. El fluido cuasiestático asume que la circulación de aire alrededor de la aeronave cambia instantáneamente cuando la aeronave es perturbada del equilibrio.

Como resultado de esta hipótesis, todas las derivadas en función de las tasas de cambio de velocidades son omitidas excepto las que hacen referencia a $\dot{w}$, las cuales se tienen en cuenta debido a los efectos del “downwash” en el estabilizador horizontal. Igualmente las tasas de cambio del movimiento de las superficies de control son desprecidas por la misma hipótesis.

El downwash es causado por los vórtices de las puntas de las alas. El resultado de este sistema de vórtices es inducir un componente **hacia abajo** de la velocidad al flujo de aire, que se refiere como *downwash*. Las velocidades de downwash varían en función de la distancia al fuselaje, pero como la envergadura del estabilizador horizontal es pequeña en comparación con la del ala, podemos considerar que la velocidad de downwash experimentada por el estabilizador horizontal es constante sobre toda su envergadura.

El efecto del downwash es reducir el ángulo de ataque del estabilizador horizontal, generando un cambio en la sustentación y así en las fuerzas en el eje Z y en el momento de cabeceo. Por eso, las derivadas parciales en función de $\dot{w}(\acute{\alpha})$ deben ser incluidas aunque consideremos el aire como un fluido cuasiestático. Como hemos dicho anteriormente, la conservación de las derivadas en función de $\dot{w}$ no contradice la hipótesis del fluido cuasiestático.

Una vez explicada la inclusión de las derivadas parciales en función de la velocidad vertical, $\dot{w}$, es momento de centrarse en el resto de derivadas de estabilidad. Normalmente $C_{x\dot{\alpha}}$ y C_{xq} son despreciables:

- $C_{x\dot{\alpha}}$ es el efecto de la tasa de cambio del ángulo de ataque provocado por $\dot{\omega}$ en la fuerza en el eje X. En el párrafo anterior hemos indicado que esta tasa de cambio del ángulo de ataque del ala tiene como resultado el cambio del ángulo de ataque del estabilizador horizontal, cambiando su sustentación y su resistencia aerodinámica (“drag”). Este cambio en el drag representa la parte más importante del cambio de fuerza en el eje X. Como el drag del estabilizador horizontal es mucho más pequeño en comparación con el del resto de la aeronave, cualquier cambio en este drag es despreciable.
- De la misma manera, una velocidad de cabeceo $\dot{\theta}$ también provoca un cambio en el ángulo de ataque del estabilizador horizontal, y al igual que en el caso de $\acute{\alpha}$, el

cambio en el drag resultante de $\dot{\theta}$ puede despreciarse. Es por esto que tanto $C_{x\dot{\alpha}}$ como C_{xq} van a ser despreciadas.

C_{xu} es el cambio en la fuerza en el eje X provocado por un cambio en la velocidad hacia adelante. La fuerza en el eje X, cuando la aeronave está en equilibrio con $W_0 = 0$, depende del empuje y del drag. El vector de empuje puede no estar alineado con el vector velocidad de la aeronave, pero el ángulo existente entre los dos vectores normalmente es pequeño. Así, usando la hipótesis de los ángulos pequeños, el coseno del ángulo será 1. Entonces:

$$F_x = T - D = T - C_D \rho \frac{{U_0}^2 S}{2} \tag{2.1}$$

Derivando en función de u, manteniendo los demás parámetros constantes, la ecuación 2.1 se convierte en

$$\frac{\partial F_x}{\partial u} = \frac{\partial T}{\partial u} - C_D \rho U S - \frac{\partial C_D}{\partial u} \rho \frac{{U_0}^2 S}{2} \tag{2.2}$$

Multiplicando la ecuación 2.2 por $\frac{U_0}{Sq}$ para obtener el coeficiente adimensional, ésta se convierte en

$$\begin{gathered} C_{xu} = \frac{U_0}{Sq}\frac{\partial T}{\partial u} - 2C_D - U_0 \frac{\partial C_D}{\partial u} \\ \text{Si el Mach} < 0{,}6 \Rightarrow \frac{\partial C_D}{\partial u} \simeq 0 \end{gathered} \tag{2.3}$$

C_{zu} es el cambio en la fuerza en el eje Z provocado por un cambio en la velocidad hacia adelante. La componente de empuje en el eje Z es mucho más pequeña que la sustentación, entonces ésta puede ser despreciada. Así:

$$F_z = -L = -C_L \rho \frac{{U_0}^2 S}{2} \tag{2.4}$$

Derivando la ecuación 2.4 en función de u

$$\frac{\partial F_z}{\partial u} = -C_L \rho U_0 S - \frac{\partial C_L}{\partial u} \rho \frac{{U_0}^2 S}{2} \tag{2.5}$$

Multiplicando por $\frac{U_0}{Sq}$ para obtener el coeficiente adimensional, la ecuación 2.5 se convierte en

$$\begin{gathered} C_{zu} = \frac{U_0}{Sq}\frac{\partial F_z}{\partial u} = -2C_L - U_0 \frac{\partial C_L}{\partial u} \\ \text{Si el Mach} < 0{,}6 \Rightarrow \frac{\partial C_L}{\partial u} \simeq 0 \end{gathered} \tag{2.6}$$

C_{mu} es el cambio en el momento de cabeceo provocado por un cambio en la velocidad hacia adelante. Este término principalmente es resultado del empuje y de los vórtices de la hélice (“slipstream”):

$$C_{mu} = \frac{d_T}{c}\frac{\partial T}{\partial u} \tag{2.7}$$

$C_{x\alpha}$ es el cambio en la fuerza en el eje X provocado por un cambio en α (causado, a su vez, por un cambio en ω). Debido a que los ejes de la aeronave están fijos a ésta, una perturbación de la velocidad vertical produce sendos vectores de sustentación y drag que no son perpendiculares ni paralelos al eje X respectivamente (ver figura 2.1).

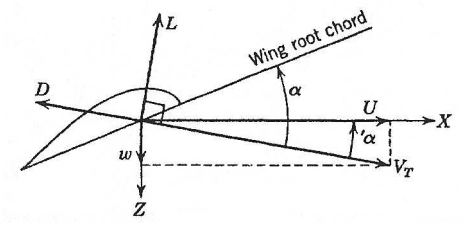

Figura 2.1: Orientación de los vectores de sustentación y drag después de una perturbación que provocó una velocidad vertical

De esta manera, para encontrar la aportación de la sustentación y el drag a las fuerzas en el eje X será necesario encontrar sus componentes en dicho eje através del ángulo $\acute{\alpha}$. Entonces:

$$F_x = L\sin\acute{\alpha} - D\cos\acute{\alpha} \tag{2.8}$$

Derivando la ecuación 2.8 en función de $\acute{\alpha}$

$$\frac{\partial F_x}{\partial\acute{\alpha}} = \frac{\partial L}{\partial\acute{\alpha}}\sin\acute{\alpha} + L\cos\acute{\alpha} - \frac{\partial D}{\partial\acute{\alpha}}\cos\acute{\alpha} + D\sin\acute{\alpha} \tag{2.9}$$

Las derivadas parciales deben ser evaluadas en la condición de equilibrio, o lo que es lo mismo, cuando $\acute{\alpha} = 0$. Entonces la ecuación 2.9 se convierte en

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial F_x}{\partial\acute{\alpha}}\right)_{\acute{\alpha}=0} = L - \frac{\partial D}{\partial\acute{\alpha}} = L - \frac{\partial D}{\partial\alpha} \\ &\text{ya que}\frac{\partial\acute{\alpha}}{\partial\alpha} \equiv 1 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Multiplicando por $\frac{1}{Sq}$ para obtener el coeficiente adimensional, la ecuación 2.10 se convierte en

$$C_{x\alpha} = \frac{1}{Sq}\frac{\partial F_x}{\partial\alpha} = C_L - \frac{\partial C_D}{\partial\alpha} \tag{2.11}$$

$C_{z\alpha}$ es el cambio en la fuerza en el eje Z con el ángulo de ataque. Este término es muy parecido a $C_{x\alpha}$. Si observamos la figura 2.1, la nueva fuerza en el eje Z será:

$$F_z = -L\cos'\alpha - D\sin'\alpha \tag{2.12}$$

Derivando la ecuación 2.12 en función de $'\alpha$

$$\frac{\partial F_z}{\partial \alpha} = -\frac{\partial L}{\partial \alpha}\cos'\alpha + L\sin'\alpha - \frac{\partial D}{\partial \alpha}\sin'\alpha - D\cos'\alpha \tag{2.13}$$

Evaluando la ecuación 2.13 sobre su condición de equilibrio ($\alpha = 0$) y multiplicando por $\frac{1}{Sq}$ para obtener el coeficiente adimensional obtenemos

$$C_{z\alpha} = \frac{1}{Sq}\frac{\partial F_z}{\partial \alpha} = -C_D - \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \equiv -\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \tag{2.14}$$

$C_{m\alpha}$ es el cambio en el momento de cabeceo provocado por un cambio en el ángulo de ataque. Este término determina la estabilidad estática longitudinal de la aeronave y debe ser negativa para que la aeronave sea estáticamente estable (es decir, la aeronave tiende a retomar su condición de equilibrio después de una perturbación). Un $C_{m\alpha}$ negativo significa que a medida que el ánglo de ataque incrementa positivamente, el momento de cabeceo se hace más negativo, tendiendo a disminuir el ángulo de ataque.

$$C_{m\alpha} = \frac{\partial C_m}{\partial \alpha} = \frac{dC_m}{dC_L}\frac{dC_L}{d\alpha} \tag{2.15}$$

donde $\frac{dC_m}{dC_L}$ es el margen estático: La distancia entre el punto fijo neutro de control y el centro aerodinámico, dividida entre la cuerda aerodinámica media.

$C_{m\dot{\alpha}}$ es el efecto de la tasa de cambio del ángulo de ataque provocado por $\dot{\omega}$ en el coeficiente del momento de cabeceo. Esta derivada proviene del tiempo requerido por el downwash del ala en alcanzar la cola:

$$C_{m\dot{\alpha}} = -2\left[\frac{dC_L}{d\alpha}\right]_h \eta_h \overline{V}_h(\overline{X}_{ach} - \overline{x}_{cg})\frac{d\varepsilon}{d\alpha} \tag{2.16}$$

donde

- $\left[\frac{dC_L}{d\alpha}\right]_h$ es la pendiente del coeficiente de sustentación en función del ángulo de ataque.
- η_h es el cociente entre la presión dinamica en el estabilizador horizontal y la del ala (tomando en cuenta el efecto de la hélice).
- $\overline{V_h}$ es el coeficiente de volumen del estabilizador horizontal.

- $\bar{x_{ach}}$ es la posición del centro aerodinámico del estabilizador horizontal entre la cuerda del ala.
- $\bar{x_{cg}}$ es la posición del centro de gravedad de la aeronave entre la cuerda del ala.
- $\frac{d\varepsilon}{d\alpha}$ es el gradiente del downwash en el estabilizador horizontal.

Nótese que en la ecuación 2.16 hemos asumido que la única contribución importante en esta derivada de estabilidad es la del estabilizador horizontal.

$C_{z\dot{\alpha}}$ es el efecto de la tasa de cambio del ángulo de ataque causado por $\dot{\omega}$ sobre la fuerza en Z. Esta derivada proviene por el mismo motivo que $C_{m\dot{\alpha}}$ y su ecuación la podemos obtener a partir de la de $C_{m\dot{\alpha}}$, dividiendo ésta por una longitud adecuada para obtener un coeficiente de fuerza a partir de un coeficiente de momento. Esta longitud es l_h, la distancia entre el punto que está a un cuarto de la cuerda aerodinamica media del ala y el punto que está a un cuarto de la cuerda aerodinámica media del estabilizador horizontal (Ver la figura 2.2).

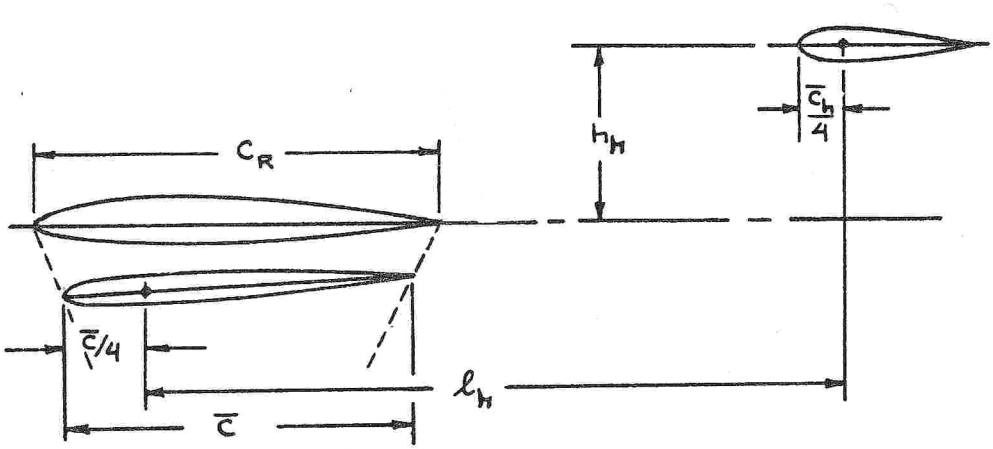

Figura 2.2: Parámetros geométricos para la localización del estabilizador horizontal

Para obtener el coeficiente adimensional, éste es multiplicado por la cuerda aerodinámica media, c.

$$C_{z\dot{\alpha}} = \frac{c}{l_h} C_{m\dot{\alpha}} \tag{2.17}$$

C_{mq}, es el efecto en el momento de cabeceo debido a $\dot{\theta}$. Proviene de la curvatura de la trayectoria de vuelo, la cual provoca cambios en el ángulo de ataque del estabilizador horizontal.

$$C_{mq} = C_{mq}\Big]_w + C_{mq}\Big]_h \tag{2.18}$$

donde:

$$C_{mq}\Big]_w = C_{mq}\Big]_{w/paraM=0} \frac{\left[\frac{A^3\tan^2\Lambda_{c/4}}{AB+6\cos\Lambda_{c/4}} + \frac{3}{B}\right]}{\left[\frac{A^3\tan^2\Lambda_{c/4}}{A+6\cos\Lambda_{c/4}} + 3\right]}$$

$$C_{mq}\Big]_h = -2\left[\frac{dC_L}{d\alpha}\right]_h \eta_h \overline{V}_h(\overline{X}_{ach} - \overline{X}_{cg})$$

C_{zq} es el cambio en la fueza en el eje Z provocado por la velocidad de cabeceo. Como en el caso de $C_{z\dot{\alpha}}$, esta derivada de estabilidad se puede obtener de C_{mq} multiplicando por $\frac{c}{l_h}$. Así:

$$C_{zq} = \frac{c}{l_h} C_{mq} \tag{2.19}$$

C_{ma} es el efecto en el momento de cabeceo resultante del movimiento de una superficie de control externa. En el caso que estamos estudiando, esta superficie es el elevador. Para una aeronave con elevadores convencionales:

$$C_{ma} = C_{m\delta e}\delta_e \tag{2.20}$$

donde $C_{m\delta e}$ es la efectividad del elevador y se calcula a partir de la ecuación 2.21

$$C_{m\delta e} = (a_{\delta e})C_{mih} \tag{2.21}$$

Las ecuaciones para calcular $(a_{\delta e})$ y C_{mih} se expondran más adelante.

C_{Fza} es el efecto en la fuerza en el eje Z debido a la deflexión del elevador.

$$C_{Fza} = \frac{c}{l_h} C_{m\delta_e}\delta_e \tag{2.22}$$

C_{Fxa} es el efecto en la fuerza en el eje X debido a la deflexión del elevador. Esto supone un cambio en el drag provocado por las deflexiones del elevador y normalmente es despreciable.

2.2. Cálculo de las derivadas de estabilidad

2.2.1. Condiciones

Para poder calcular las derivadas de estabilidad primero de todo hemos de determinar bajo que condiciones las vamos a calcular. Estas condiciones las vamos a dividir en dos grupos: Características de la aeronave y condiciones de vuelo, expuestas a continuación:

2.2.1.1. Características de la aeronave

En este proyecto vamos a modelar el modo longitudinal del UAV que está desarrollando el grupo de trabajo del proyecto ICARUS de la EPSC. Este UAV parte del fuselaje de un avión de radio control Megastar XL-120 al que se le ha equipado con todo lo necesario para que sea capaz de realizar vuelos autónomos.

Figura 2.3: Megastar XL-120

A continuación vamos a detallar las características físicas del UAV que necesitaremos para calcular las derivadas de estabilidad.

El ala tiene un perfil alar NACA 0012, perfil simétrico con un espesor máximo igual al 12 % de la cuerda del ala. Tiene las características siguientes:

- Envergadura (b): $240\ cm$
- Superficie alar (S): $9800\ cm^2$
- Cuerda aerodinámica media $(\bar{c})$: $41\ cm$
- Cuerda máxima (c_t): $41\ cm$
- Cuerda del perfil en la punta del ala (c_r): $41\ cm$
- Ángulo de flecha en el borde de ataque (Λ_{LE}): $0°$
- Alargamiento (A): $A = \frac{b^2}{S} = 5,87$
- Estrechamiento (λ): $\lambda = \frac{c_t}{c_r} = 1$

El estabilizador horizontal es una pieza de madera plana de la cual consideramos que va a tener un comportamiento aerodinámico igual al perfil simétrico NACA de menor espesor, un NACA 0006. Sus características son las siguientes:

- Envergadura (b_h): $85,9\ cm$
- Superficie alar (S): $2093,8\ cm^2$

- Cuerda aerodinámica media $(\bar{c_h})$: $24,2\ cm$
- Cuerda máxima (c_t): 20,8 cm
- Cuerda del perfil en la punta (c_r): $27,95\ cm$
- Ángulo de flecha en el borde de ataque (Λ_{LE}): $9,45°$
- Alargamiento (A_h): $A = \frac{b^2}{S} = 3,53$
- Estrechamiento (λ_h): $\lambda_h = \frac{c_t}{c_r} = 0,7$

El fuselaje es una caja recta de contrachapado ligero. Un parámetro que necesitaremos para calcular las derivadas de estabilidad es el diámetro equivalente del fuselaje (d_f). En nuestro caso tenemos un fuselaje recto que va disminuyendo su área transversal hacia la cola del UAV.

Para calcular el diámetro equivalente se calcularán dos áreas en la zona del encastre (a la altura de los bordes de ataque y salida) y nos quedaremos con la media de éstas. Entonces se hallará el diámetro de un círculo que tenga esta misma área.

- Diametro equivalente del fuselaje $(d_f) = 18,3\ cm$

El tren de aterrizaje es fijo, es decir, está siempre bajado. Esta situación provoca cambios en las fuerzas y momentos que deben aparecer en las ecuaciones longitudinales del movimiento. Sin embargo, ya que podemos considerar que la aeronave está en equilibrio con el tren de aterrizaje abajo, entonces este efecto no lo vamos a tener en cuenta.

Por último, es necesario agregar que el UAV tiene un motor de hélice, la cual tiene un diámetro (D_p) de $50,1\ cm$ con una potencia máxima de $4,2\ HP$ a $7500\ rpm$.

2.2.1.2. Condiciones de vuelo

Para el cálculo de las derivadas de estabilidad es necesario determinar sobre qué condiciones de vuelo vamos a realizar dicho cálculo, ya que en función de las condiciones las derivadas tendrán valores diferentes.

Las condicones que debemos tener en cuenta son: la altitud, el número de Mach, el número de Reynolds, el peso del UAV, la posición del centro de gravedad y la fase de vuelo que vamos a estudiar (despegue, aterrizaje, crucero, etc.).

- Altitud. Se considerará que el UAV volará entre 0 y 100 metros.
- Número de Mach. Dado de que no disponemos de datos reales de la velocidad de vuelo del UAV hemos asumido una velocidad de 60 Km/h (16,66 m/s). Entonces el número de mach será:

$$M = \frac{V}{C_s} = 0,05 \tag{2.23}$$

Donde C_s es la velocidad del sonido, y teniendo en cuenta que estamos volando a nivel del mar, ésta tiene un valor de $340,3\ m/s$.

- Número de Reynolds.

$$Re = \frac{\rho_{SL} V \bar{c}}{\mu_{SL}} = 0,47114 * 10^6 \tag{2.24}$$

Este valor es el que correspondería según la velocidad y características de nuestro UAV, pero dado que no disponemos de datos aerodinámicos del perfil alar para dicho Reynolds, vamos a suponer el valor es de $3 \cdot 10^6$, correspondiente al más bajo para el cual tenemos datos aerodinámicos. Según la bibliografía consultada para estos rangos de Reynolds no deberia haber mucha diferencia entre usar un valor u otro.

- Peso. El UAV tiene un peso de $7,05\ kg$.

- Posición del centro de gravedad. La posición del centro de gravedad la hemos obtenido experimentalmente mediante la técnica del pesado y balanceado.

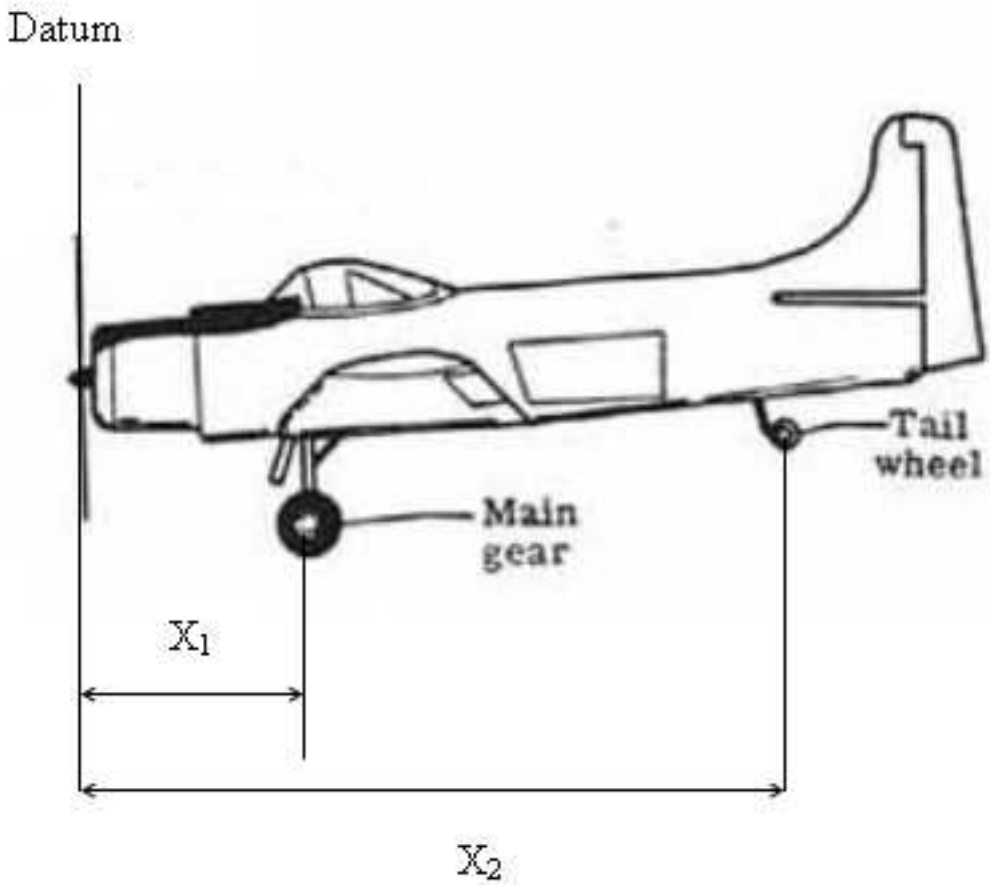

Figura 2.4: Pesado y balanceo

Para realizar el pesado y balanceado hemos de elevar el UAV por dos puntos diferentes. En nuestro caso hemos decidido que estos puntos serán el tren de aterrizaje delantero y el trasero.

También necesitamos saber la distancia existente entre los puntos de alza. Para ello hemos de determinar un punto de referencia para medir las distancias (denominado *datum*. Se decidió que el datum será el extremo del eje de la hélice.

Una vez tenemos la distancia correspondiente a cada punto de alza calculamos el momento multiplicando el peso existente en el punto de alza por la distancia correspondiente. A continuación sumamos los momentos para obtener el momento total.

Por último, dividimos el momento total por el peso total del UAV para obtener la posición del centro de gravedad.

Item	**Peso (kg)**	**Brazo (cm)**	**Momento ($cm\,kg$)**	**CG (cm)**
Ruedas principales	$6,4$	46	$294,4$	-
Rueda trasera	$0,65$	$178,3$	$115,9$	-
Total	$7,05$	-	$410,3$	$58,2$

Cuadro 2.1: Cálculo del centro de gravedad

Tras realizar este procedimiento obtenemos que la posición del centro de gravedad está a $X_{CG} = 58,2\ cm$ del datum.

- Fase de Vuelo. Vamos a estudiar el UAV cuando esta en crucero, es decir, vuelo recto y nivelado.

2.2.2. Cálculo de las derivadas de estabilidad

2.2.

Una vez determinadas las condiciones que vamos a tener en cuenta ya se pueden calcular las derivadas de estabilidad utilizando las fórmulas desarrolladas en la sección 2.1. Pero antes de empezar a calcular las derivadas vamos a realizar unos cálculos previos que utilizaremos para calcularlas:

2.2.2.1. Cálculo de la potencia disponible

Cuando hemos hablado de las caractirísticas de la aeronave hemos dicho que el motor tenía una potencia de $4,2\ HP$ a $7500\ rpm$. Esta potencia es la del eje del motor, SHP_{av}, que difiere de la que el motor transforma en empuje, la potencia disponible.

Para calcular la potencia disponible hemos de tener en cuenta el rendimiento de la hélice (η_p), el rendimiento de la transmisión (η_{gear}), la relación de recupereción de presión en la zona de admisión de aire para un flujo incompresible ($\eta_{inl/inc}$), la potencia del motor que se desvía para alimentar otros subsitemas de la aeronave, P_{extr} (sistema eléctrico, hidraúlico,

pneumático, etc.) y la potencia del eje del motor. Todos estos términos se relacionan mediante la ecuación 2.25

$$P_{av} = [(\eta_{inl/inc} SHP_{av} - P_{extr})\eta_p]\eta_{gear} \tag{2.25}$$

donde:

- $\eta_p = 0{,}75$ (Valor asumido en base a hélices similares).
- $\eta_{gear} = 1$, ya que la transmisión por el eje es directa, es decir, el motor carece de caja de transmisión.
- $\eta_{inl/inc} = 0{,}98$, dato obtenido de la bibliografia consultada para motores con aspiración normal.
- $P_{extr} = 0$, ya que en el UAV no se deriva potencia para otros subsistemas, toda ella se utiliza para generar empuje.
- $SHP_{av} = 4,2\,HP$, dato obtenido de la información proporcionada por el fabricante del motor.

$$\underline{\underline{P_{av} = 3,087 HP}}$$

2.2.2.2. *Cálculo de* η_h

Es el cociente entre la presión dinamica en el estabilizador horizontal y la del ala, tomando en cuenta el efecto de la hélice. La presión dinámica en el ala y en el estabilizador horizontal debería ser la misma, pero esto no es así al tener en cuenta que la hélice acelera el aire, creando una corriente más rápida tras de sí. Teniendo en cuenta dichos efectos calcularemos η_h a partir de la ecuación 2.26

$$\eta_h = 1 + \frac{(S_h)_{slip}}{S_h} \frac{2200 P_{av}}{\overline{q} U \pi {D_p}^2} \tag{2.26}$$

Nótese que esta ecuación se ha de usar con unidades inglesas, ya que ha sido extraída de bibliografía inglesa y está multiplicada por un factor empírico, donde:

- $S_{hslip} = 1295,8\,cm^2$ es el área del estabilizador horizontal que está bajo los efectos del slipstream. Ver figura 2.5.
- $S_h = 2093,8\,cm^2$ es el área del estabilizador horizontal.
- $P_{av} = 3,087\,HP$ es la potencia disponible.
- $D_p = 1,64\ ft$ es el diámetro de la hélice del motor.

- $U = 54,66\ ft/s$ es la velocidad del UAV.
- $\overline{q} = 3,55\ lb\ s^2/ft^4$ es la presión dinámica.

$$\underline{\underline{\eta_h = 3,55}}$$

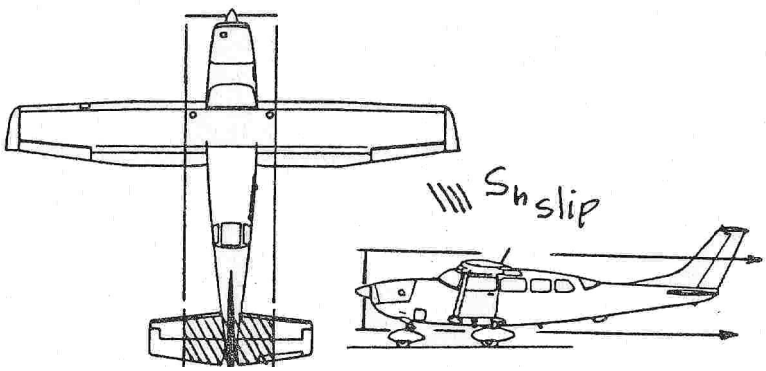

Figura 2.5: Área del estabilizador horizontal que está bajo los efectos del slipstream

2.2.2.3. Cálculo del coeficiente de volumen del estabilizador horizontal

$$\overline{V}_h = \frac{(\overline{X}_{ach} - \overline{X}_{cg})S_h}{S} \tag{2.27}$$

donde: $\overline{X}_{ach}$ y $\overline{X}_{cg}$ están definidos en la figura 2.6

- $\overline{X}_{ach} = \frac{114}{c}$
- $\overline{x}_{cg} = \frac{10,9}{c}$

$$\underline{\underline{\overline{V}_h = 0,537}}$$

2.2.2.4. Cálculo del gradiente del downwash en el estabilizador horizontal

$$\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = 4,44[K_A K_\lambda K_h (cos\Lambda_{c/4})^{1/2}{}^{1,19}]\left[\frac{\frac{dC_L}{d\alpha}_{w/M}}{\frac{dC_L}{d\alpha}_{w/M=0}}\right] \tag{2.28}$$

donde:

- $K_A = \frac{1}{A} - \frac{1}{1+A^{1,7}}$

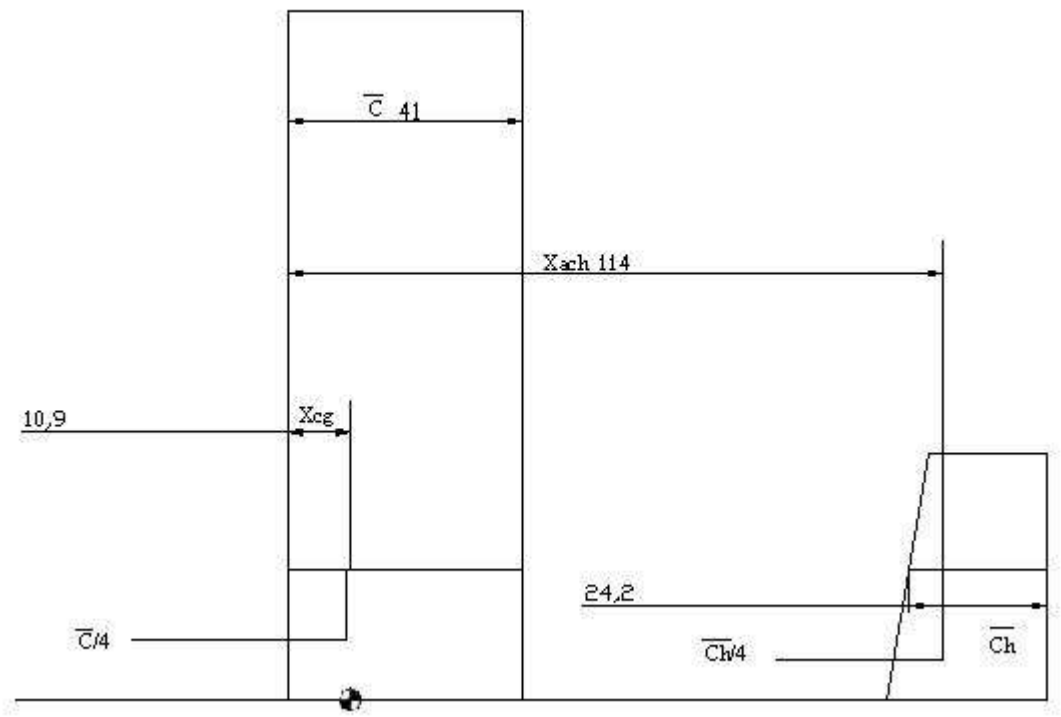

Figura 2.6: Parámetros geométricos para el coeficiente de volumen

- $K_\lambda = \frac{10-3\lambda}{7}$
- $K_h = \frac{1-\left|\frac{h_h}{b}\right|}{\frac{2l_h}{b}}$, los parámeros h_h y l_h están definidos en la figura 2.2.
- $\Lambda_{c/4}$ es el ángulo de flecha sobre $c/4$ para conocer su valor utilizaremos la figura 2.7 que nos relaciona el ángulo de flecha en $c/4$ con el ángulo de flecha en el borde de ataque (teniendo en cuenta el estrechamiento del ala).
- $\frac{\frac{dC_L}{d\alpha}_{w/M}}{\frac{dC_L}{d\alpha}_{w/M=0}}$, este cociente nos relaciona, para el Mach al que vuela el UAV, la pendiente del coeficiente de sustentación en función del ángulo de ataque entre la misma pendiente pero para el Mach igual a 0. Dado que el Mach de nuestro UAV es prácticamente 0 (M=0.05) este cociente es igual a 1 y no nos afectará para el cálculo del gradiente del downwash.

$$\underline{\underline{\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = 0,37}}$$

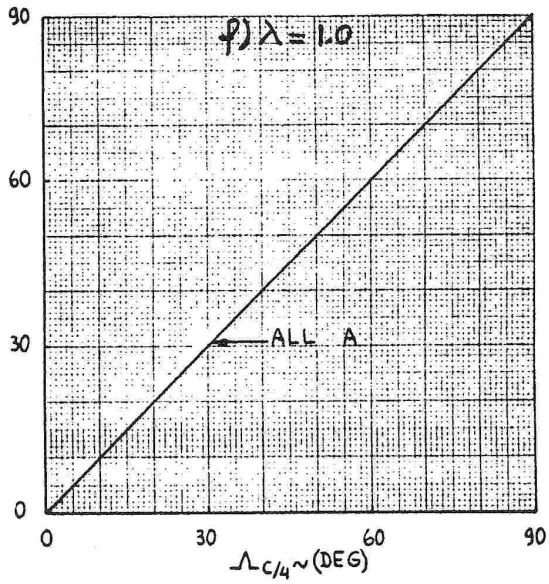

Figura 2.7: Ángulo de flecha en el borde ataque en función del ángulo de flecha en $c/4$

2.2.2.5. *Cálculo de las pendientes de la curva de sustentación del ala y del estabilizador horizontal*

El cálculo de la pendiente de las curvas de sustentación es diferente dependiendo de la velocidad a la que vuele el UAV. En este caso volamos a una velocidad subsónica.

Teniendo en cuenta esta velocidad, que el ala es recta, que el estabilizador horizontal es recto, y que tiene un estrechamiento que disminuye gradualmente, podremos calcular ambas pendientes a partir de la siguiente ecuación:

$$\left.\frac{dC_L}{d\alpha}\right]_{woh} = \frac{2\pi A}{\left[2+\left[\left(\frac{A^2\beta^2}{k^2}\right)\left(\frac{1+\tan^2\Lambda_{c/2}}{\beta^2}\right)+4\right]^{1/2}\right]} \tag{2.29}$$

donde:

- $\Big]_{woh}$ hace referencia a parámetros del ala o del estabilizador horizontal dependiendo de la pendiente que estamos calculando.
- $\beta = (1-M^2)^{1/2}$
- $k = \frac{\frac{dC_l}{d\alpha}}{\frac{2\pi}{\beta}}$, siendo $\frac{dC_l}{d\alpha}$ la pendiente del perfil aerodinámico, es decir, la pendiente de un perfil NACA 0012 para el ala y la de un NACA 0006 para el estabilizador horizontal.
- $\Lambda_{c/2}$ es el ángulo de flecha en $c/2$. Para conocer su valor utilizaremos la figura 2.8 que nos relaciona el ángulo de flecha en $c/2$ con el ángulo de flecha en el borde de ataque (teniendo en cuenta el estrechamiento del ala).

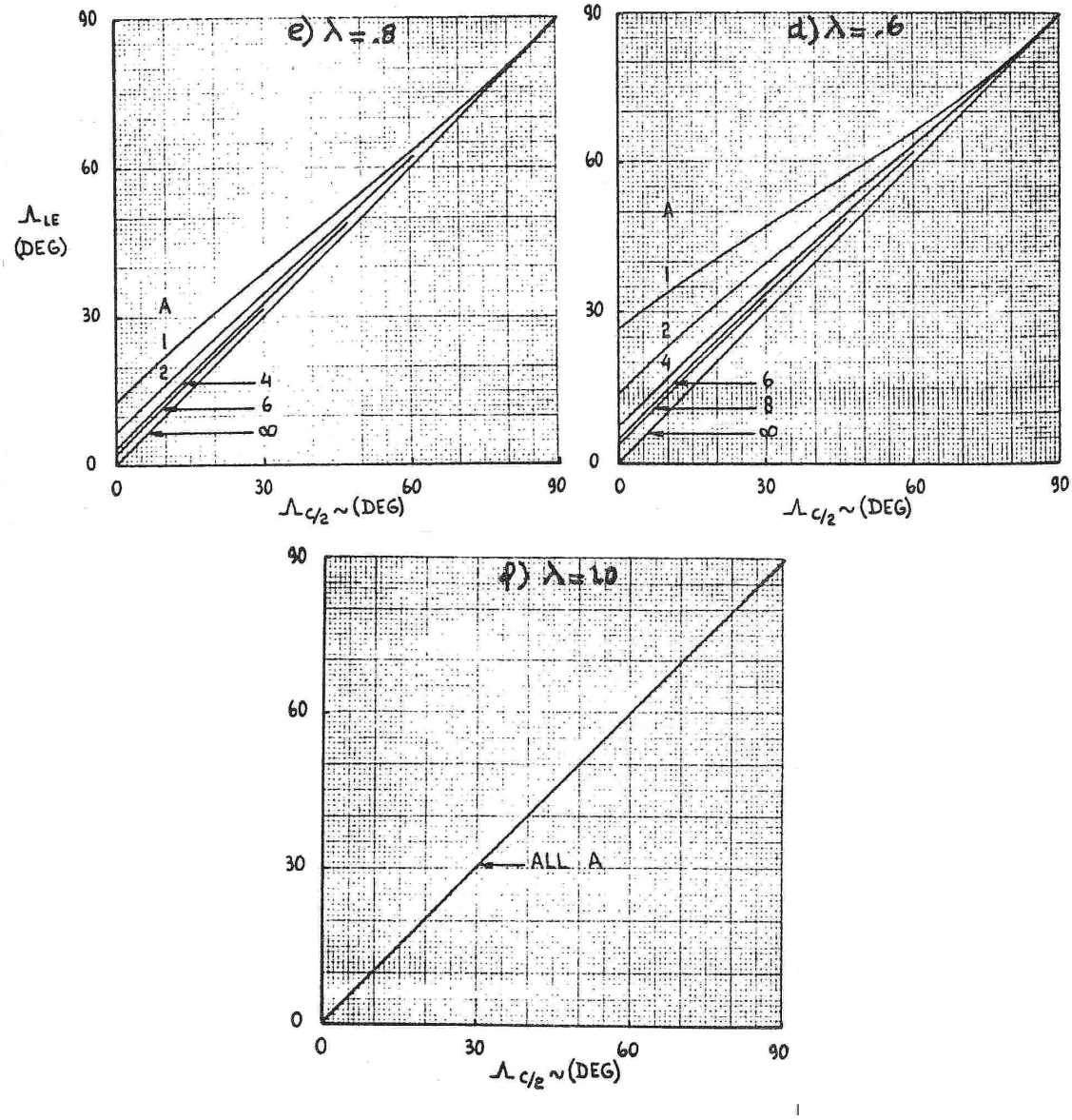

Figura 2.8: Ángulo de flecha en el borde ataque en función del ángulo de flecha en $c/2$

$$\left.\frac{dC_L}{d\alpha}\right]_w = 4,255$$
$$\left.\frac{dC_L}{d\alpha}\right]_h = 1,947 \tag{2.30}$$

Una vez realizados estos cálculos previos ya podemos empezar a calcular todas las derivadas de estabilidad.

2.2.2.6. *Cálculo de $C_{x\dot{\alpha}}$, C_{xq} y C_{Fxa}*

Como ya hemos explicado en la sección 2.1., $C_{x\dot{\alpha}}$, C_{xq} y C_{Fxa} son despreciables, esto es,

$$\underline{\underline{C_{x\dot{\alpha}} = C_{xq} = C_{Fxa} = 0}}$$

2.2.2.7. Cálculo de C_{xu}

$$C_{xu} = \frac{U_0}{Sq}\frac{\partial T}{\partial u} - 2C_D - U_0\frac{\partial C_D}{\partial u}$$
$$\text{Si el Mach} < 0{,}6 \Rightarrow \frac{\partial C_D}{\partial u} \simeq 0 \tag{2.31}$$

Para calcular C_{xu} necesitaremos conocer el coeficiente de resistencia, C_D y la variación del empuje en función de la velocidad hacia adelante, $\frac{\partial T}{\partial U}$. C_D lo podemos calcular a partir del coeficiente de sustentanción. Dado que el UAV vuela recto y nivelado podemos decir que

$$L = W \Rightarrow \frac{1}{2}\rho_{SL}SC_L{U_0}^2 = mg \Rightarrow C_L = \frac{2mg}{\rho_{SL}S{U_0}^2} = 0,42$$

Utilizando la figura 2.9 obtenemos que

$$\text{Para } C_L = 0,42 \Rightarrow C_D = 0,007$$

Para calcular $\frac{\partial T}{\partial U}$ utilizaremos la ecuación 2.32

$$\frac{\partial T}{\partial U} = \frac{1}{Sq}\frac{\partial P_{req}}{\partial U} - 3C_D \tag{2.32}$$

donde la variación de la potencia requerida en función de la velocidad la vamos a suponer nula. Así pues C_{xu} es igual a

$$\underline{\underline{C_{xu} = \left[\frac{U}{Sq}(-3C_D)\right] - [2C_D] = -0,016}}$$

2.2.2.8. Cálculo de C_{zu}

$$C_{zu} = \frac{U_0}{Sq}\frac{\partial F_z}{\partial u} = -2C_L - U_0\frac{\partial C_L}{\partial u}$$
$$M = 0,05 < 0{,}6 \Rightarrow \frac{\partial C_L}{\partial u} \simeq 0$$

$$\underline{\underline{C_{zu} = -2C_L = -0,84}} \tag{2.33}$$

2.2.2.9. Cálculo de C_{mu}

$$C_{mu} = \frac{d_T}{c}\frac{\partial T}{\partial u}$$

Donde d_T es el brazo de momento del empuje en relación al centro de gravedad. En nuestro caso es 0 ya que consideramos que el empuje está alineado con el centro de gravedad. Entonces:

$$\underline{\underline{C_{mu} = \frac{0}{c}\frac{\partial T}{\partial u} = 0}} \tag{2.34}$$

2.2.2.10. Cálculo de $C_{x\alpha}$

$$C_{x\alpha} = C_L - \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} = C_L - \left(\frac{\partial C_D}{\partial C_L}\frac{dC_L}{d\alpha}\right)$$

donde todos los parámetros ya han sido calculados anteriormente a excepción de $\frac{\partial C_D}{\partial C_L}$. Para calcular esta pendiente hemos considerado la curva de la figura 2.9 como una parábola y hemos obtenido su ecuación matemática usando el método de los mínimos cuadrados.

Una vez tenemos la ecuación de la parábola la hemos derivado respecto a C_L y hemos calculado el valor de la pendiente en el punto que nos interesa, es decir, para $C_L = 0,42$, que corresponde al coeficiente de sustentación del UAV en nuestra condición de vuelo. El resultado obtenido es:

$$\frac{\partial C_D}{\partial C_L} = 4,724 \cdot 10^{-3}$$

Entonces:

$$\underline{\underline{C_{x\alpha} = 0,395}} \tag{2.35}$$

2.2.2.11. Cálculo de $C_{z\alpha}$

$$\underline{\underline{C_{z\alpha} = -C_D - \frac{dC_L}{d\alpha} = -5,182}} \tag{2.36}$$

2.2.2.12. Cálculo de $C_{m\alpha}$

$$C_{m\alpha} = \frac{dC_m}{dC_L}\frac{dC_L}{d\alpha}$$

donde:

- $\frac{dC_L}{d\alpha}$ es la pendiente de la curva de sustentación para todo el UAV, y se calcula a partir de la siguiente ecuación:

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = K_{wf}\frac{dC_L}{d\alpha}\Big]_w + \frac{dC_L}{d\alpha}\Big]_h \eta_h\left(\frac{S_h}{S}\right)\left(1-\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right) \tag{2.37}$$

  En la ecuación 2.37 todos los parámetros han sido calculados anteriormente excepto K_{wf}. Éste es el factor de interferencia de la unión ala-fuselaje, que se calcula a partir de la ecuación:

$$K_{wf} = 1 + 0,025\left(\frac{d_f}{b}\right) - 0,25\left(\frac{d_f}{b}\right)^2 = 1,0004 \simeq 1$$

  Entonces:

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = 5,185$$

- $\frac{dC_m}{dC_L}$ es el márgen estático. Como ya hemos dicho en la sección 2.1., el margen estático es la distancia entre el punto fijo neutro de control (el centro de gravedad del UAV) y el centro aerodinámico, normalizada por la cuerda media.

$$\frac{dC_m}{dC_L} = \overline{X}_{cg} - \overline{X}_{ac}$$

  La posición del centro de gravedad ya la hemos calculado anteriormente en el proyecto.

$$\overline{X}_{cg} = \frac{10,9}{\overline{c}}$$

  Para calcular la posición del centro de gravedad del UAV utilizaremos la ecuación siguiente:

$$\overline{X}_{ac} = \frac{\left[\overline{X}_{acw}\frac{dC_L}{d\alpha}\right]_w + \left(\eta_h\frac{dC_L}{d\alpha}\right]_h\left(1-\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right)\left(\frac{S_h}{S}\right)\overline{X}_{ach}\Big)\Big]}{\frac{dC_L}{d\alpha}} = 0,704$$

  Entonces:

$$\frac{dC_m}{dC_L} = -0,438$$

Finalmente

$$\underline{\underline{C_{m\alpha} = -2,271}} \tag{2.38}$$

2.2.2.13. Cálculo de $C_{m\dot{\alpha}}$

$$C_{m\dot{\alpha}} = -2\frac{dC_L}{d\alpha}\Big]_h \eta_h \overline{V}_h(\overline{X}_{ach} - \overline{X}_{cg})\left(\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right)$$

Donde todos los parámetros ya han sido calculados en el proyecto. Así obtenemos que

$$\underline{\underline{C_{m\dot{\alpha}} = -6,907}} \tag{2.39}$$

2.2.2.14. Cáculo de $C_{z\dot{\alpha}}$

$$\underline{\underline{C_{z\dot{\alpha}} = \frac{c}{l_h}C_{m\dot{\alpha}} = -2,729}} \tag{2.40}$$

2.2.2.15. Cálculo de C_{mq}

$$C_{mq} = C_{mq}\Big]_w + C_{mq}\Big]_h$$

donde:

- Primer término:

$$C_{mq}\Big]_w = C_{mq}\Big]_{w/paraM=0} \frac{\left[\frac{A^3\tan^2\Lambda_{c/4}}{AB+6\cos\Lambda_{c/4}} + \frac{3}{B}\right]}{\left[\frac{A^3\tan^2\Lambda_{c/4}}{A+6\cos\Lambda_{c/4}} + 3\right]}$$

  Utilizando la figura 2.7 obtenemos que $\Lambda_{c/4} = 0\ rad$. Entonces la ecuación anterior se transforma en:

$$C_{mq}\Big]_w = \frac{1}{B}C_{mq}\Big]_{w/paraM=0}$$

  donde

$$C_{mq}\Big]_{w/paraM=0} = -K_w\frac{dC_L}{d\alpha}\Big]_w \cos\Lambda_{c/4}\left[\frac{A\left(2\left(\frac{X_w}{\overline{c}}\right)^2 + 0,5\left(\frac{X_w}{\overline{c}}\right)\right)}{A+2\cos\Lambda_{c/4}} + \frac{A^3\tan^2\Lambda_{c/4}}{24(A+6\cos\Lambda_{c/4})} + \frac{1}{8}\right]$$

  El parámetro $K_w = 0,7$ es el factor de correción para la aportación del ala al **pitch damping**, ya definido en la figura 2.10, y el parámetro $X_w = 0,65$ corresponde a la distancia entre el centro de gravedad del UAV y el centro aerodinámico del ala.

  Entonces:

$$C_{mq}\Big]_w = -1,653 \cdot 10^{-3}$$

- Segundo término:

$$C_{mq}\Big]_h = -2\Big[\frac{dC_L}{d\alpha}\Big]_h \eta_h \overline{V}_h(\overline{X}_{ach} - \overline{X}_{cg}) = -18,669$$

Finalmente

$$\underline{\underline{C_{mq} = -18,671}} \tag{2.41}$$

2.2.2.16. Cálculo de C_{zq}

$$\underline{\underline{C_{zq} = \frac{c}{l_h} C_{mq} = -7,378}} \tag{2.42}$$

2.2.2.17. Cálculo de C_{ma}

$$C_{ma} = C_{m\delta e}\delta_e = (a_{\delta e})C_{mih}$$

donde:

- El término $a_{\delta e}$ se calcula de la siguiente manera:

$$(a_{\delta e}) = K_b\Big(\frac{C_{l\delta}}{C_{l\delta\,teórico}}\Big)C_{l\delta\,teórico}\frac{K'}{\frac{dC_l}{d\alpha}\Big]_h}\frac{a_{\delta C_L}}{a_{\delta C_l}}$$

  - K_b es el factor de envergadura del elevador. En nuestro caso $K_b = 1$ ya que el elevador ocupa toda la envergadura del estabilizador horizontal.
  - $\frac{C_{l\delta}}{C_{l\delta\,teórico}} = 0,8694$ es el factor de corrección para la sustentación de un alerón simple. Obtenemos su valor utilizando la figura 2.11.
  - $C_{l\delta\,teórico} = 3,888$ se calcula a partir de la figura 2.12.
  - k' es el factor de corrección que tiene en cuenta las nolinealidades para ángulos grandes de deflexión del elevador. En nuestro caso será igual a 1 ya que consiremos que las deflexiones del elevador no van a ser superiores a $10\,grados$ (ver la figura 2.13).
  - $\frac{a_{\delta C_L}}{a_{\delta C_l}} = 1,097$ se calcula a partir de la figura 2.14.
  - $\frac{dC_l}{d\alpha}\Big]_h = 5,844$ es la pendiente del perfil alar NACA 0006 obtenida de [3].

  Entonces:

$$(a_{\delta e}) = 0,636$$

- C_{mih} es la derivada de estabilidad del momento de cabeceo debido a la incidencia del estabilizador horizontal. Se calcula a partir de la ecuación siguiente donde todos los parámetros han sido calculados anteriormente.

$$C_{mih} = -(\frac{dC_L}{d\alpha}\Big]_h)\eta_h\overline{V}_h = -3,711$$

Finalmente

$$\underline{\underline{C_{ma} = -2,361}} \tag{2.43}$$

2.2.2.18. Cálcula de C_{Fza}

$$\underline{\underline{\frac{c}{l_h}C_{ma} = -0,933}} \tag{2.44}$$

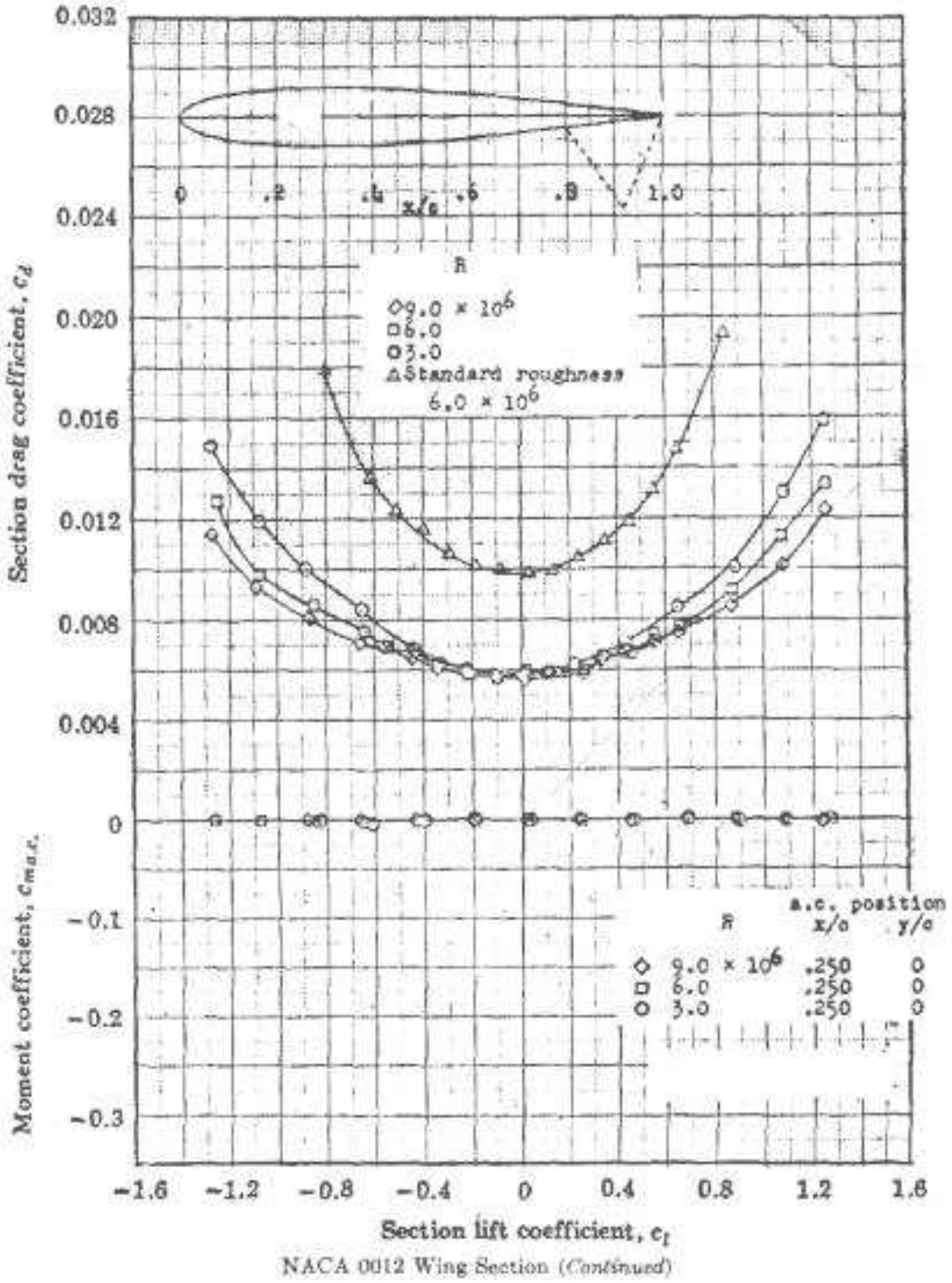

Figura 2.9: NACA 0012 C_L vs C_D

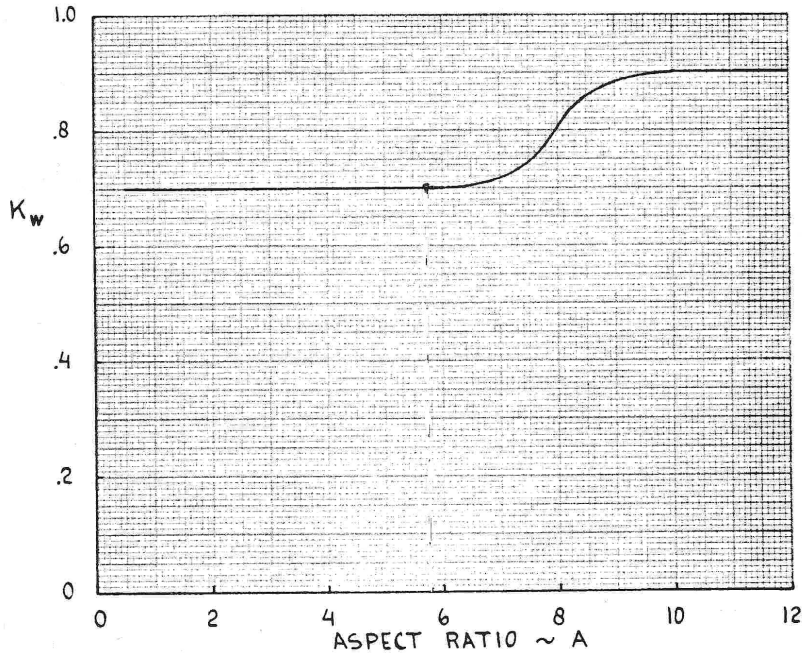

Figura 2.10: Constante de correción para la aportación del ala al pitch damping

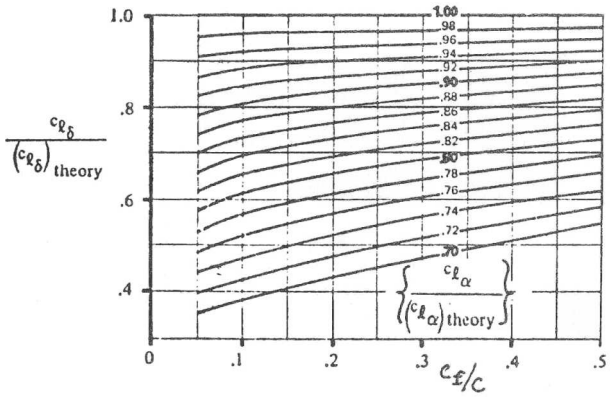

Figura 2.11: Factor de correción para la sustentación de un alerón simple

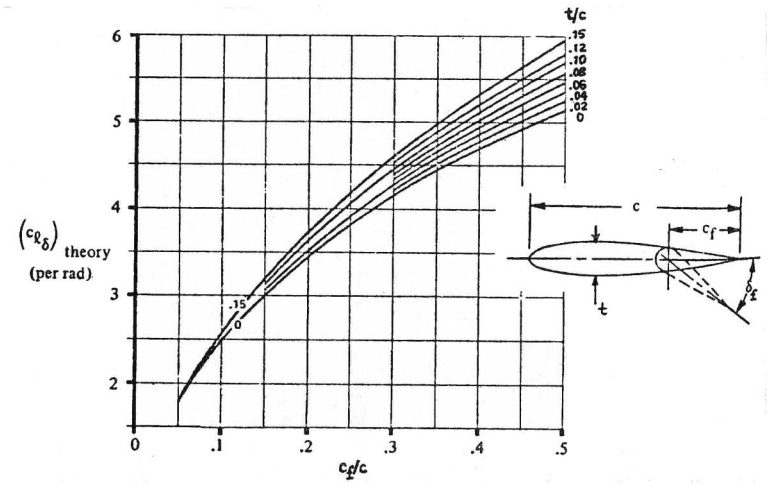

Figura 2.12: Sustentación efectiva de un alerón simple

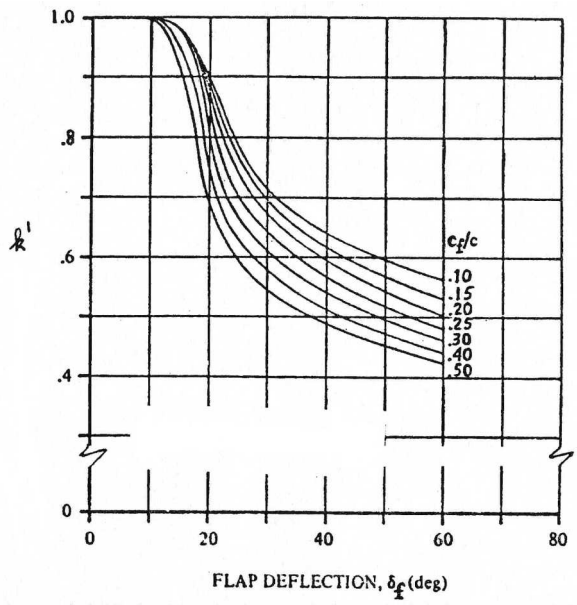

Figura 2.13: Factor de correción para el comportamiento no lineal en la sustentación de los alerones simples

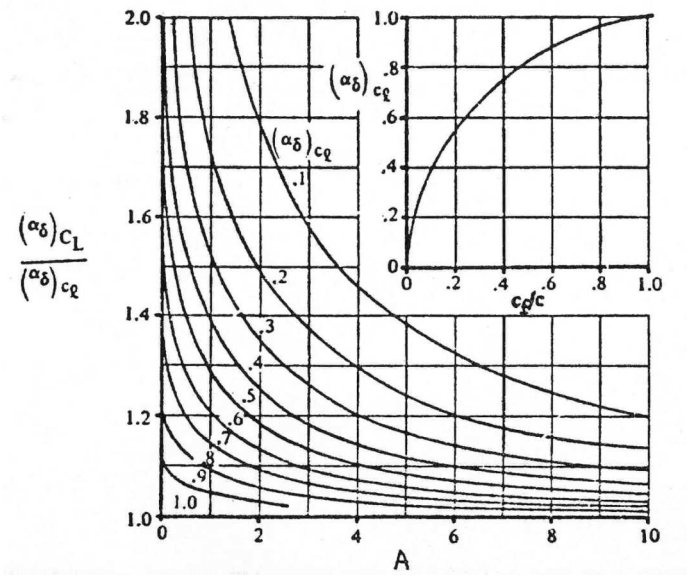

Figura 2.14: Efecto del alargamiento y el cociente alerón-cuerda en la efectividad tridimesional del alerón

CAPÍTULO 3. FUNCIONES DE TRANSFERENCIA

Una vez calculadas todas las derivadas de estabilidad, y retomando las ecuaciones longitudinales del aeronave 1.31, 1.35 y 1.38, ya podemos calcular las funciones de transferencia del UAV.

3.1. Respuesta transitoria

Antes de calcular y analizar las funciones de transferencia primero tendremos que obtener la respuesta transitoria del UAV. Ésta se obtiene de la ecuación homogenea, es decir, sin entradas externas ($C_{ma} = C_{Fza} = C_{Fxa} = 0$).

Aplicando la transformada de Laplace a las ecuaciones 1.31, 1.35 y 1.38 con las condiciones iniciales igual a cero y despreciando $C_{x\dot{\alpha}}$, C_{xq} y C_{mu} (ver secciones 2.1. y 2.2.) obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{mU_0}{Sq}s - C_{xu}\right)\acute{u}(s) - C_{x\alpha}\acute{\alpha}(s) - C_w(cos\Theta)\theta(s) = 0 \\
&-C_{zu}\acute{u}(s) + \left[\left(\frac{mU_0}{Sq} - \frac{c}{2U_0}C_{z\dot{\alpha}}\right)s - C_{z\alpha}\right]\acute{\alpha}(s) + \left[\left(-\frac{mU_0}{Sq} - \frac{c}{2U_0}C_{zq}\right)s - C_w(sin\Theta)\right]\theta(s) = 0 \\
&\left(-\frac{c}{2U_0}C_{m\dot{\alpha}}s - C_{m\alpha}\right)\acute{\alpha}(s) + \left(\frac{I_y}{Sqc}s^2 - \frac{c}{2U_0}C_{mq}s\right)\theta(s) = 0
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Sustituyendo por los valores de las derivadas de estabilidad calculados en el capítulo 2, la ecuación 3.1 se convierte en:

$$\begin{aligned}
&(0,705s + 0,016)\acute{u}(s) - 0,395\acute{\alpha}(s) + 0,415\theta(s) = 0 \\
&0,84\acute{u}(s) + (0,739s + 5,182)\acute{\alpha}(s) - 0,614s\theta(s) = 0 \\
&(0,085s + 2,271)\acute{\alpha}(s) + (0,023s^2 + 0,229s)\theta(s) = 0
\end{aligned} \tag{3.2}$$

La única solución del sistema de ecuaciones 3.2 diferente de $(0,0,0)$ necesita que el determinante de los coeficientes sea cero. Entonces:

$$\begin{vmatrix} 0,705s + 0,016 & -0,395 & 0,415 \\ 0,84 & 0,739s + 5,182 & -0,614s \\ 0 & 0,085s + 2,271 & 0,023s^2 + 0,229s \end{vmatrix} = 0 \tag{3.3}$$

Expandiendo el determinante obtenemos un polinomio de cuarto grado. Este polinomio es la ecuación característica del UAV.

El UAV será dinámicamente estable si todas las raices del polinomio tienen su parte real negativa. En caso contrario el UAV será dinámicamente inestable.

Se ha observado que para la mayoria de las aeronaves la ecuación característica se puede factorizar en dos factores de segundo grado de la siguiente manera

$$(s^2 + 2\zeta_p \omega_{np} s + \omega^2{}_p)(s^2 + 2\zeta_s \omega_{ns} s + \omega^2{}_s) \tag{3.4}$$

El primer factor corrresponde al modo fugoide que está caracterizado por un amortiguado suave y por una oscilación de periodo largo, que consiste en variaciones de θ y $\acute{u}$ con $\acute{\alpha}$ constante. El aeronave tiendo a volar una trayectoria de vuelo senoidal en el plano vertical. El valor ω_{np} corresponde a la frecuencia natural de este modo de oscilación, y ζ_p al cociente de amortiguamiento.

El segundo factor corresponde al modo de periodo corto que está caracterizado por un movimiento relativamente bien amortiguado asociado con una oscilación de periodo corto, que consiste en variaciones de $\acute{\alpha}$ y θ con cambios muy pequeños en la velocidad hacia adelante. ω_{ns} corresponde a su frecuencia natural y ζ_s al coeficiente de amortiguamiento.

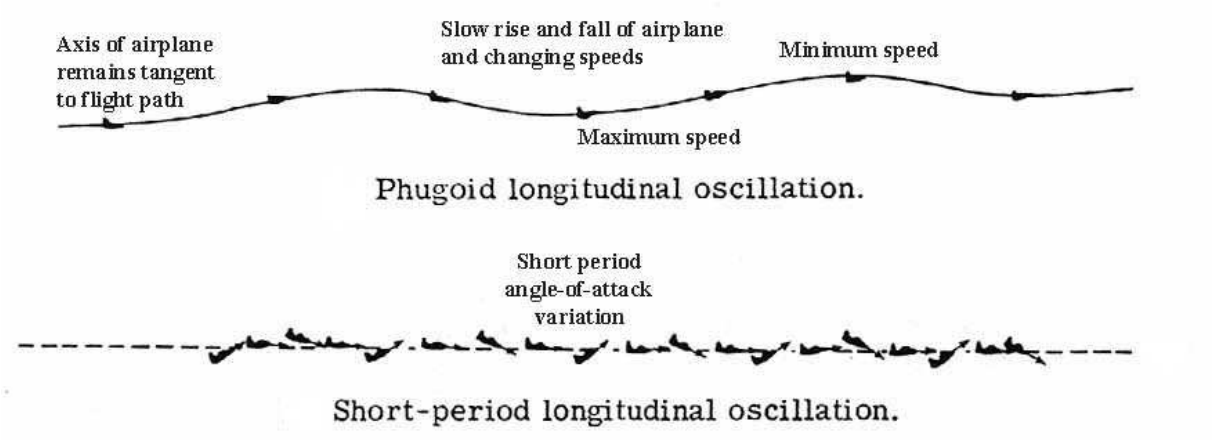

Figura 3.1: Modos longitudinales

En nuestro caso expandiendo el determinante de la ecuación 3.3 obtenemos la ecuación característica del UAV (∇)

$$\nabla = 0,012s^4 + 0,156s^3 + 1,081s^2 + 0,962s + 0,814 \tag{3.5}$$

La ecuación 3.5 tiene dos pares de raices complejas conjugadas donde cada par es una oscilación senoidal amortiguada que corresponden con los dos modos de la aeronave. Dichas raíces conjugadas son:

$$s_1 = -6,0559 \pm 6,4643i$$

$$s_2 = -0{,}4442 \pm 0{,}81698i$$

A continuación hemos de identificar cuál par de raices es el del modo fugoide y cuál el del periodo corto. Para ello, factorizamos la ecuación 3.5 en dos ecuaciones de segundo grado las cuales tienen por solución los pares de raices complejas expuestas anteriormente.

$$\nabla = (s^2 + 12,1118s + 78,4611)(s^2 + 0,8882 + 0,8646) \tag{3.6}$$

Si expresamos la ecuación 3.6 en los términos de la ecuación 3.4, podremos calcular la frecuencia natural y el coeficiente de amortiguamiento para identificar los modos del aeronave. Entonces utilizando los datos del primer factor obtenemos:

$$\begin{aligned} \zeta &= 0,684 \\ \omega &= 8,859\, rad\, s^{-1} \end{aligned}$$

Y utilizando los del segundo factor obtenemos:

$$\begin{aligned} \zeta &= 0,478 \\ \omega &= 0,929\, rad\, s^{-1} \end{aligned}$$

Observando los resultados podemos decir que el primer factor corresponde al modo de periodo corto y que el segundo corresponde al modo fugoide ya que el modo de periodo corto se caracteriza por tener una frecuencia más grande que la del modo fugoide.

3.2. Funciones de transferencia

Una vez obtenida la respuesta transitoria ya podemos calcular las funciones de transferencia con desplazamiento del elevador.

Para ello aplicamos la transformada de Laplace a las ecuaciones 1.31, 1.35 y 1.38 teniendo en cuenta las deflexiones del elevador

$$\begin{aligned} &(0,705s + 0,016)\acute{u}(s) - 0,395\acute{\alpha}(s) + 0,415\theta(s) = 0 \\ &0,84\acute{u}(s) + (0,739s + 5,182)\acute{\alpha}(s) - 0,614s\theta(s) = -0,933\delta_e(s) \\ &(0,085s + 2,271)\acute{\alpha}(s) + (0,023s^2 + 0,229s)\theta(s) = -2,361\delta_e(s) \end{aligned} \tag{3.7}$$

donde δ_e es la deflexión del elevador en radianes. Para calcular las funciones de transferencia utilizaremos el método de Cramer para la solución de sistemas de ecuaciones mediante determinantes.

La función de transferencia para δ_e de entrada y $\acute{u}$ como salida es:

$$\frac{\acute{u}(s)}{\delta_e(s)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -0,395 & 0,415 \\ -0,933 & 0,739s+5,182 & -0,614s \\ -2,361 & 0,085s+2,271 & 0,023s^2+0,229s \end{vmatrix}}{\nabla} \tag{3.8}$$

que expandiendo el determinante del numerador, se convierte en

$$\frac{\acute{u}(s)}{\delta_e(s)} = \frac{-8,487 \cdot 10^{-3}s^2+0,033s+4,199}{\nabla} \tag{3.9}$$

La función de transferencia para δ_e de entrada y $\acute{\alpha}$ como salida es:

$$\frac{\acute{\alpha}(s)}{\delta_e(s)} = \frac{\begin{vmatrix} 0,705s+0,016 & 0 & 0,415 \\ 0,84 & -0,933 & -0,614s \\ 0 & -2,361 & 0,023s^2+0,229s \end{vmatrix}}{\nabla} \tag{3.10}$$

Expandiendo el determinante, se obtiene

$$\frac{\acute{\alpha}(s)}{\delta_e(s)} = \frac{-0,015s^3-1,172s^2-0,026s-0,823}{\nabla} \tag{3.11}$$

Y la función de transferencia para δ_e de entrada y $\theta(s)$ como salida:

$$\frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{\begin{vmatrix} 0,705s+0,016 & -0,395 & 0 \\ 0,84 & 0,739s+5,182 & -0,933 \\ 0 & 0,085s+2,271 & -2,361 \end{vmatrix}}{\nabla} \tag{3.12}$$

que expandiendo el determinante obtenemos,

$$\frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{-1,174s^2-7,158s-0,945}{\nabla} \tag{3.13}$$

Una vez calculadas la funciones de transferencia vamos a ver el comportamiento de los modos de la aeronave.

3.3. Gráficas de respuesta

Teniendo en cuenta que el modo de periodo corto consiste en variaciones en el ángulo de ataque y en el de actitud vamos a graficar la respuesta a una entrada escalón para estas dos funciones de transferencia.

La Figura 3.2 presenta estas respuestas.

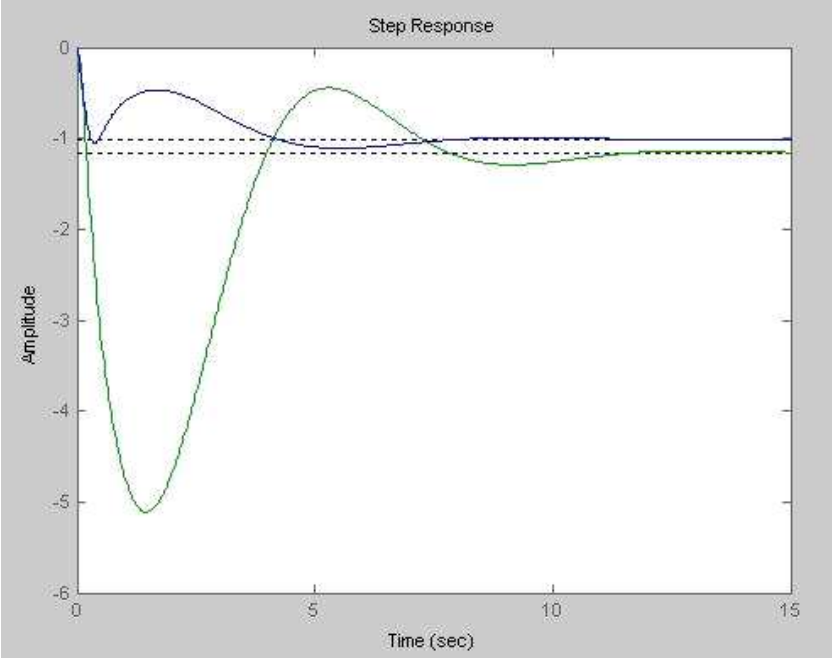

Figura 3.2: Respuesta a un escalón para el modo de periodo corto

Observando la Figura 3.2 vemos que esta respuesta tiene una amortiguación rápida por lo que no se requiere ningún esfuerzo especial por parte del piloto para contrarrestarla, pues desaparecerá por sí sola con rapidez. Esta es una característica típica del modo de periodo corto.

Por otro lado, dado que el modo fugoide consiste en variaciones de la velocidad hacia adelante y del ángulo de actitud, graficaremos la respuesta a un escalón de las respectivas funciones de transferencia. El resultado se muestra en la Figura 3.3.

Si observamos la Figura 3.3 vemos que tiene una amortiguación débil de mayor extensión en el tiempo. Dada la lentitud de la oscilación, ésta puede ser controlada por un piloto humano sin problemas. Un piloto automático no debe tener tampoco ninguna dificultad en contrarrestar esta oscilación.

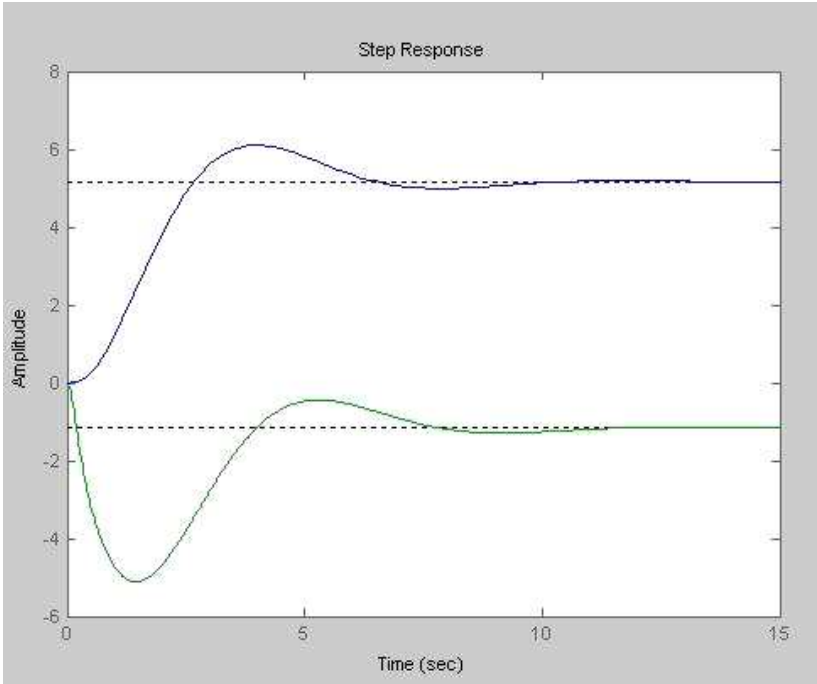

Figura 3.3: Respuesta a un escalón para el modo fugoide

CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES

El objetivo inicial del proyecto consistía en la obtención de las funciones de transferencia de un UAV para el modo longitudinal. Este objetivo resulta extenso y complejo, es por eso que para conseguir realizarlo con éxito se marcaron una serie de objetivos secundarios.

El primero fue sido construir un modelo que describa el comportamiento físico del UAV. Para ello se han obtenido las ecuaciones matemáticas que describen el vuelo de una aeronave para el caso que estamos estudiando (vuelo recto y nivelado). Una vez conseguidas estas ecuaciones se han identificado las incógnitas a calcular para conseguir nuestro objetivo, las derivadas de estabilidad.

A partir de este punto el siguiente objetivo ha sido realizar un estudio de éstas para poder calcularlas. Tras este estudio se han conseguido las ecuaciones para el cálculo de las derivadas de estabilidad, y a partir de éstas ecuaciones se calcularon dichas derivadas.

Después de la consecución de estos objetivos secundarios, ya se dispuso de todos los elementos necesarios para alcanzar objetivo principal del proyecto, la obtención de las funciones de transferencia del un UAV para el modo longitudinal.

Si bien el objetivo pricipal se alcanzó satisfactoriamente, este no es un proyecto cerrado. Una posible ampliación sería realizar la validación y el ajuste de las funciones de transferencia obtenidas.

Esto se podría hacer a partir de datos reales de vuelo del UAV, comprobando si nuestras funciones de transferencia representan fielmente dichos datos, por lo que este proyecto queda abierto para futuras investigaciones.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Roskam, Jan. *Airplane Design*. Design, Analysis and Research Corporation (DARCorporation). Kansas. 2004

[2] Blakelock, John H. *Automatic control of aircraft and missiles*. John Wiley and Sons Corp. New York. 1991.

[3] Jacobs, E. N., Ward, K. E. and Pinkerton, R. M. *The Characteristics of 78 related Airfoil Sections from Tests in the Variable-Density Wind Tunnel*. Report National Advisory Commitee for Aeronautics, Report 460. 1933.

[4] Abbott, I. H., Von Doenhoff, A. E. *Theory of wing sections including a summary of airfoil data*. New York Dover Corp. New York. 1959.

[5] McLean, Donald. *Automatic flight control systems*. Prentice Hall International. Great Britain. 1990.

[6] Spiegel, M. R., Liu, J., Abellanas, L. *Fórmulas y tablas de matemática aplicada*. Mc Graw Hill. U.S.A. 2000.

APÉNDICES

APÉNDICE A. MOMENTO DE INERCIA

Durante el desarollo del proyecto hemos calculado las diferentes derivadas de estabilidad que afectan al modo longitudinal. Pero no hemos hablado del momento de inercia, magnitud que está presente en las ecuaciones finales del modo longitudinal, y que será necesaria para poder calcular las funciones de transferencia, que es nuestro objetivo final.

El momento de inercia es una medida de la inercia rotacional o la tendencia de un cuerpo a resistirse al cambio en su movimiento rotacional. Aunque se dice que el momento de inercia debe ser constante para un cuerpo rígido, este se corresponde a un eje determinado y puede tener valores diferentes para ejes diferentes. El momento de inercia depende también de la distribución de la masa con respecto al eje de rotación.

Para el cálculo del momento de inercia primero de todo hemos de ver si tenemos una distribución de masas puntuales o si, por el contrario, la masa está distribuida, ya que dependiendo de la situación el cálculo se realiza de una manera u otra.

En nuestro caso tenemos una la masa distribuida de manera continua, así que el momento de inercia será:

$$I = \int r^2 dm \tag{A.1}$$

donde dm es un diferencial de masa del cuerpo y r^2 es la mínima distancia al eje de rotación. Pero integrar en función de la masa puede ser una tarea muy complicada ya que no conocemos una función matemática que nos diga como está distribuida.

Si tenemos en cuenta que la masa de un cuerpo es igual a la densidad por su volumen podemos sustituir esta relación en la ecuación A.1 para entonces poder integrar en función del volumen, tarea que nos será mucho mas sencilla:

$$I = \int r^2 \rho dV \tag{A.2}$$

Dependiendo de la geometría del cuerpo del que queramos calcular el momento de inercia diferenciaremos tres tipos de densidades:

- ρ, densidad volumétrica. Tiene unidades de masa partido volumen.
- θ, densidad superficial. Se utiliza en aquellos casos en que el cuerpo en cuestión tiene un espesor t constante. $\theta = \rho t$ y tiene unidades de masa partido superficie.
- λ, densidad lineal.

Si analizamos con las ecuaciones longitudinales del movimiento observaremos que tenemos que calcular el momento de inercia del UAV en función del eje Y.

Para poder calcular el momento de inercia primero de todo vamos a simplificar la geometría del UAV de tal manera que su cálculo nos sea más fácil. Para ello dividiremos el UAV en figuras geométricas simples de las cuales calcularemos su momento de inercia por separado.

Una vez tengamos el momento de inercia de cada una de las figuras con respecto a su centro de masas, mediante la aplicación del teorema de los ejes paralelos

$$I = I_{CM} + Md^2 \tag{A.3}$$

calcularemos el momento de inercia de cada una de estas figuras con respecto al centro de masas del UAV, y por último sumaremos todo para obtener el momento de inercia total del UAV.

En la figura A.1 podemos ver la simplificación de la geometria del UAV que hemos llevado a cabo.

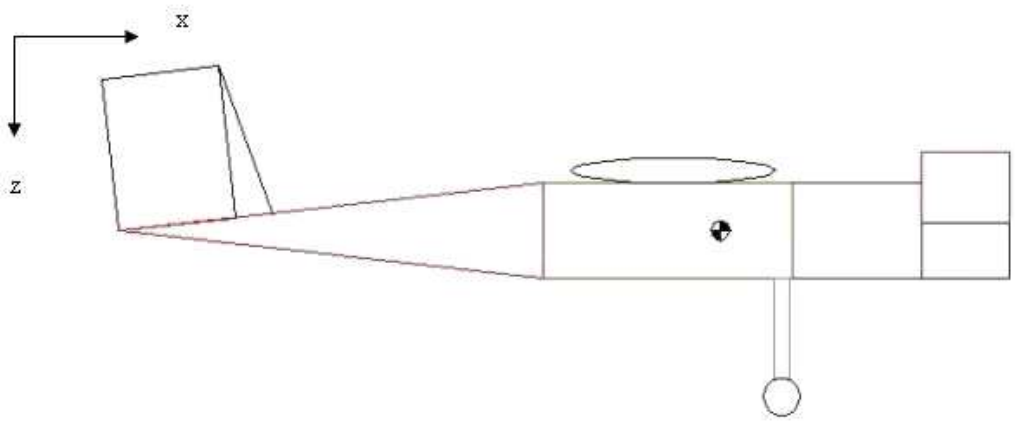

Figura A.1: Simplificación de la geometría del UAV

Si observamos la simplificación del UAV vemos que basicamente esta formado por rectángulos, circumferencias, triángulos y elipses. Los momentos de inercia de cada figura se calculan utilizando las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned} I_{rectangulo} &= \tfrac{\rho t}{12}(x^3 z + z^3 x) \\ I_{elipse} &= \tfrac{\rho \pi t}{2}(5x^3 z + xz^3) \\ I_{circulo} &= \tfrac{\rho t \pi x^4}{2} \end{aligned} \tag{A.4}$$

Estos momentos de inercia han sido extraidos de [6]. Para el caso de los triángulos los hemos calculado mediante integración sus momentos de inercia definiendo adecuadamente los límites de integración.

A continuación mostramos el cálculo del momento de inercia de uno de los dos triángulos (ver figura A.2)

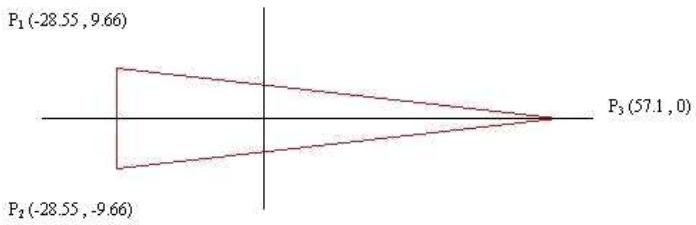

Figura A.2: Cálculo del momento de inercia de uno de los triángulos

$$I = \rho t \int_{-28,55}^{57,1} \int_{R_2}^{R_1} (z^2 + x^2) dz dx = 349949 \rho t \tag{A.5}$$

donde:

- $R_1 = (-0,113x + 6,43)$, es la recta que une los puntos P_1 y P_3 de la figura A.2.
- $R_2 = (0,113x - 6,43)$, es la recta que une los puntos P_2 y P_3 de la figura A.2.

El momento de inercia del otro triángulo es igual a la ecuación A.6 calculada con el mismo procedimiento que el otro triángulo

$$I = 2205,428 \rho t \tag{A.6}$$

Entonces sabiendo que la densidad volumétrica de la madera de balsa es $\rho_{mb} = 020\ g/cm^3$ y que la del aluminio es $\rho_{al} = 2,7\ g/cm^3$, sustituyendo por los datos de espesor y longitud apropiados en cada figura geométrica y aplicando el teorema de los ejes paralelos obtenemos que el momento de inercia del UAV en el eje Y es

$$\underline{\underline{I_y = 15,554 \cdot 10^6\ gcm^2 = 1,5554\ Kgm^2}} \tag{A.7}$$