

Ejercicios resueltos

Boletín 2

Campo gravitatorio y movimiento de satélites

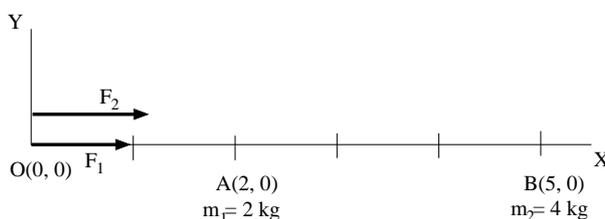
Ejercicio 1

En el punto A(2,0) se sitúa una masa de 2 kg y en el punto B(5,0) se coloca otra masa de 4 kg. Calcula la fuerza resultante que actúa sobre una tercera masa de 5 kg cuando se coloca en el origen de coordenadas y cuando se sitúa en el punto C(2,4).

Solución 1

En una distribución de masas la fuerza resultante que actúa sobre una de ellas es la suma vectorial de las fuerzas con las que actúan las demás masas sobre ella.

a) Al colocar la masa de $m = 5$ kg en O (0,0). Las masas $m_1 = 2$ kg y $m_2 = 4$ kg interaccionan con la masa $m = 5$ kg con unas fuerzas que tienen de dirección el eje X y sentido hacia las masas m_1 y m_2 .



Aplicando la ley de gravitación universal:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{G \cdot m_1 \cdot m}{r_1^2} \vec{i} + \frac{G \cdot m_2 \cdot m}{r_2^2} \vec{i} = G \cdot m \left(\frac{m_1}{r_1^2} + \frac{m_2}{r_2^2} \right) \vec{i}$$

Sustituyendo:

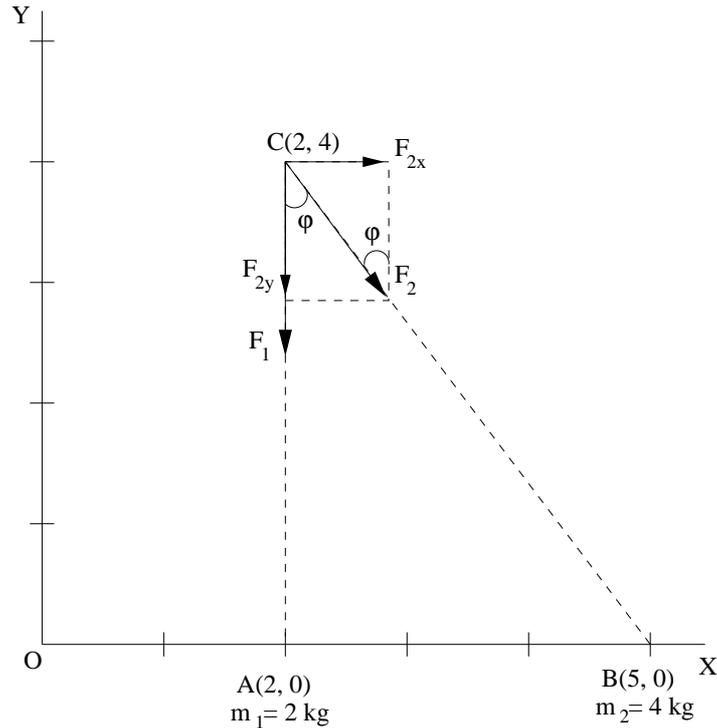
$$\vec{F} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5 \left(\frac{2}{2^2} + \frac{4}{5^2} \right) \vec{i} = 2,20 \cdot 10^{-10} \vec{i} \text{ N}$$

b) Al colocar la masa $m = 5$ kg en C(2,4). Las fuerzas que actúan sobre la masa m tienen de dirección las rectas que unen la citada masa con las otras dos y por sentido hacia las masas m_1 y m_2 .

$$\vec{F}_1 = \frac{G \cdot m_1 \cdot m}{r_1^2} (-\vec{j}) = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 5}{4^2} \vec{j} = -4,17 \cdot 10^{-11} \vec{j} \text{ N}$$

El módulo de la fuerza con la que actúa la masa $m_2 = 4$ kg es:

$$F_2 = \frac{G \cdot m_2 \cdot m}{r_2^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 4 \cdot 5}{(\sqrt{3^2 + 4^2})^2} = 5,34 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$



De la figura se deduce que $\cos \varphi = 4/5$ y $\sin \varphi = 3/5$ por lo que las componentes de la fuerza que ejerce la masa m_2 son:

$$\vec{F}_{2x} = F_2 \cdot \sin \varphi \vec{i} = 5,34 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{3}{5} \vec{i} = 3,20 \cdot 10^{-11} \vec{i} \text{ N}$$

$$\vec{F}_{2y} = F_2 \cdot \cos \varphi (-\vec{j}) = -5,34 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{4}{5} \vec{j} = -4,27 \cdot 10^{-11} \vec{j} \text{ N}$$

La fuerza resultante que actúa sobre la partícula de masa m tiene de componentes:

$$\vec{F}_x = \vec{F}_{2x} = 3,20 \cdot 10^{-11} \vec{i} \text{ N}$$

$$\vec{F}_y = \vec{F}_1 + \vec{F}_{2y} = -4,17 \cdot 10^{-11} \vec{j} - 4,27 \cdot 10^{-11} \vec{j} = -8,44 \cdot 10^{-11} \vec{j} \text{ N}$$

Su módulo es:

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(3,20 \cdot 10^{-11})^2 + (8,44 \cdot 10^{-11})^2} = 9,03 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

Ejercicio 2

Calcula el módulo del campo gravitatorio terrestre a una distancia de 100 km sobre la superficie de la Tierra. Datos: $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $R_T = 6370 \text{ km}$

Solución 2

Aplicando la definición de intensidad del campo gravitatorio y como la Tierra se comporta como una partícula con su masa concentrada en su centro, se tiene:

$$g = \frac{G \cdot M_T}{r^2} = \frac{G \cdot M_T}{(R_T + h)^2}$$

Sustituyendo:

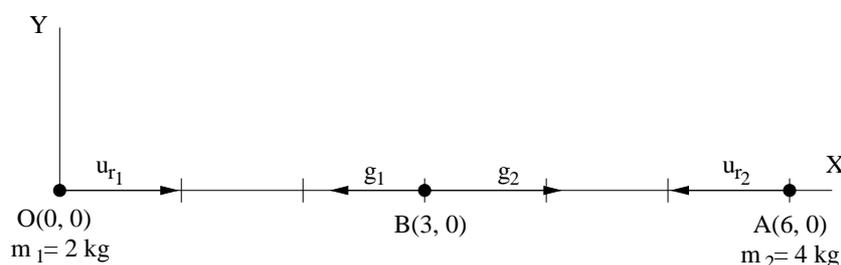
$$g = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{(6,37 \cdot 10^6 + 10^5)^2} = 9,53 \text{ N/kg}$$

Ejercicio 3

Una partícula de masa $m_1 = 2$ kg está situada en el origen de un sistema de referencia y otra partícula de masa $m_2 = 4$ kg está colocada en el punto A(6,0). Calcula el campo gravitatorio en los puntos de coordenadas B(3,0) y C(3,4) y la fuerza que actúa sobre una partícula de 3 kg de masa situada en el punto C.

Solución 3

Aplicando el principio de superposición, el campo gravitatorio en un punto es igual a la suma vectorial de los campos individuales que actúan en ese punto.



a) Campo gravitatorio en el punto B(3,0).

$$\vec{g}_1 = -G \frac{m_1}{r_1^2} \vec{u}_{r1} = -G \frac{2}{3^2} \vec{i} = -G \frac{2}{9} \vec{i}$$

$$\vec{g}_2 = -G \frac{m_2}{r_2^2} \vec{u}_{r2} = -G \frac{4}{3^2} (-\vec{i}) = G \frac{4}{9} \vec{i}$$

Sumando:

$$\vec{g}_B = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = -G \frac{2}{9} \vec{i} + G \frac{4}{9} \vec{i} = G \frac{2}{9} \vec{i} = 1,48 \cdot 10^{-11} \vec{i} \text{ N/kg}$$

b) Campo gravitatorio en el punto C(3,4). El punto C está situado a la misma distancia de cada una de las partículas, aplicando el teorema de Pitágoras: $d = 5$ m. Los módulos de los campos creados por cada una de las partículas son:

$$g_1 = G \frac{m_1}{r_1^2} = G \frac{2}{5^2} = G \frac{2}{25}$$

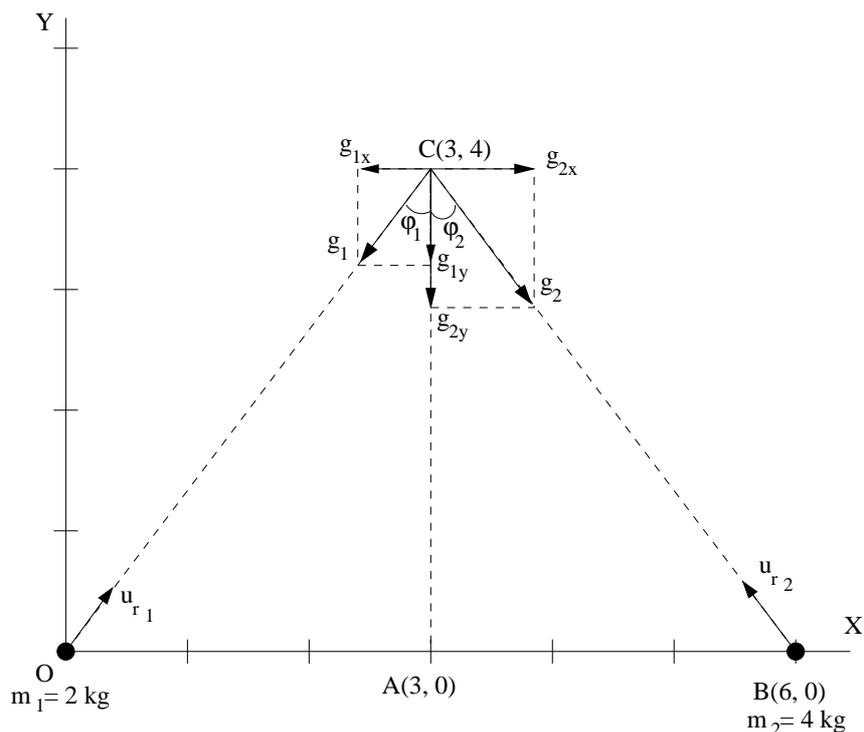
$$g_2 = G \frac{m_2}{r_2^2} = G \frac{4}{5^2} = G \frac{4}{25}$$

Teniendo en cuenta la figura para determinar las relaciones trigonométricas de los respectivos ángulos y aplicando el principio de superposición, se tiene:

$$\vec{g}_{1x} = \vec{g}_1 \cdot \sin \varphi_1 \cdot (-\vec{i}) = -G \frac{2}{25} \frac{3}{5} \vec{i} = -G \frac{6}{125} \vec{i}$$

$$\vec{g}_{2x} = \vec{g}_2 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \vec{i} = G \frac{4}{25} \frac{3}{5} \vec{i} = G \frac{12}{125} \vec{i}$$

$$\vec{g}_x = G \frac{6}{125} \vec{i}$$



$$\vec{g}_{1y} = \vec{g}_1 \cdot \cos \varphi_1 \cdot (-\vec{j}) = -G \frac{2}{25} \frac{4}{5} \vec{j} = -G \frac{8}{125} \vec{j}$$

$$\vec{g}_{2y} = \vec{g}_2 \cdot \cos \varphi_2 \cdot (-\vec{j}) = -G \frac{4}{25} \frac{4}{5} \vec{j} = -G \frac{16}{125} \vec{j}$$

$$\vec{g}_y = -G \frac{24}{125} \vec{j}$$

Sustituyendo:

$$\vec{g}_C = \vec{g}_x + \vec{g}_y = (3,20 \cdot 10^{-12} \vec{i} - 12,8 \cdot 10^{-12} \vec{j}) \text{ N/kg}$$

$$|\vec{g}_C| = \sqrt{g_x^2 + g_y^2} = \sqrt{(3,20 \cdot 10^{-12})^2 + (12,8 \cdot 10^{-12})^2} = 1,32 \cdot 10^{-11} \text{ N/kg}$$

c) La fuerza que actúa sobre la partícula colocada en el punto C es:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g}_C = 3 \cdot (3,20 \cdot 10^{-12} \vec{i} - 12,8 \cdot 10^{-12} \vec{j}) = 9,6 \cdot 10^{-12} \vec{i} - 38,4 \cdot 10^{-12} \vec{j} \text{ N/kg}$$

$$|\vec{F}| = m \cdot |\vec{g}_C| = 3 \cdot 1,32 \cdot 10^{-11} = 3,96 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

Ejercicio 4

Demuestra la validez de la expresión $m \cdot g \cdot h$ para la variación de energía potencial gravitatoria en puntos próximos a la superficie terrestre.

Solución 4

La variación de la energía potencial al trasladar un objeto de masa m desde la superficie de la Tierra hasta un punto situado a una altura h , con $h \ll R_{Tierra}$, es:

$$\Delta E_p = E_{p,h} - E_{p,T} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T + h} - \left(-\frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T} \right) = G \cdot M_T \cdot m \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h} \right)$$

Operando, y como $g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2}$, se tiene:

$$\Delta E_p = g_0 \cdot m \cdot R_T^2 \frac{h}{R_T (R_T + h)}$$

Si la distancia h es mucho menor que el radio de la Tierra, entonces se puede realizar la aproximación $R_T \cdot (R_T + h) \approx R_T^2$ y por tanto: $\Delta E_p = m \cdot g \cdot h$

Ejercicio 5

Dos partículas de masas $m_1 = 4$ kg y $m_2 = 0,5$ kg que están situadas a una distancia de 20 cm se separan hasta una distancia de 40 cm. calcula la energía potencial asociada a las dos posiciones relativas y el trabajo realizado durante el proceso.

Solución 5

a) La energía potencial asociada a las dos posiciones relativas es:

$$E_{p, inicial} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r_{inicial}} = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{4 \cdot 0,5}{0,2} = -6,67 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

$$E_{p, final} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r_{final}} = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{4 \cdot 0,5}{0,4} = -3,335 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

b) Aplicando la ley de la energía potencial, el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria es:

$$W_{F_g} = -\Delta E_p = -(E_{p, final} - E_{p, inicial}) = -(-3,35 \cdot 10^{-10} - (-6,67 \cdot 10^{-10})) = -3,335 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

El trabajo que realiza la fuerza gravitatoria tiene el signo negativo, como corresponde a una transformación no espontánea, aumentando la energía potencial de la distribución.

Ejercicio 6

La gráfica adjunta representa la energía potencial gravitatoria asociada a la posición de una masa de 1 kg en puntos próximos a la superficie de un planeta de 5000 km de radio. Determina la intensidad del campo gravitatorio en su superficie.

Solución 6

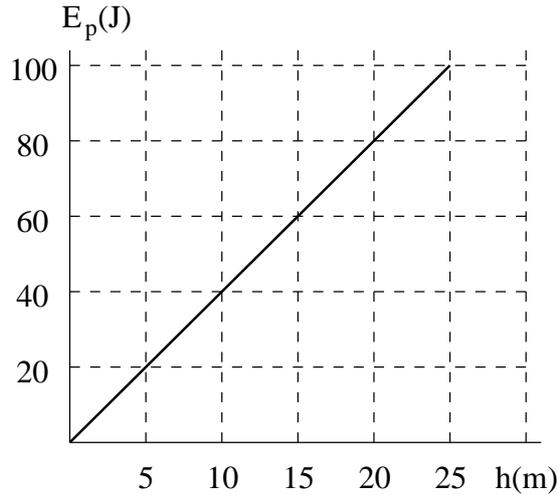
Si se elige como origen del sistema de referencia la superficie del planeta, entonces para puntos próximos a dicha superficie la energía potencial gravitatoria asociada a la posición de un objeto de masa m es $E_p = m \cdot g \cdot h$

El valor de la pendiente de la representación gráfica es igual al producto $m \cdot g$. Por tanto:

$$pendiente = \frac{100 \text{ J}}{25 \text{ m}} = 4 \text{ N} = m \cdot g = 1 \cdot g$$

Despejando:

$$g = 4 \text{ N/kg}$$



Ejercicio 7

Una partícula de masa $m_1 = 2$ kg está situada en el origen de un sistema de referencia y otra partícula de masa $m_2 = 4$ kg está colocada en el punto A(6,0). Calcula el potencial gravitatorio en los puntos de coordenadas B(3,0) y C(3,4). ¿Qué trabajo se realiza al transportar una masa de 5 kg desde el punto B hasta el punto C?

Solución 7

aplicando el teorema de Pitágoras, el punto C está situado a 5 m de cada una de las dos masas.

a) El potencial gravitatorio en un punto es igual a la suma de los potenciales creados por cada una de las masas.

$$V_B = V_1 + V_2 = -\frac{G \cdot m_1}{r_1} - \frac{G \cdot m_2}{r_2} = -G \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5} \right) = -1,334 \cdot 10^{-10} \text{ J/kg}$$

$$V_C = V_1 + V_2 = -\frac{G \cdot m_1}{r_1} - \frac{G \cdot m_2}{r_2} = -G \left(\frac{2}{5} + \frac{4}{5} \right) = -8,004 \cdot 10^{-11} \text{ J/kg}$$

b) Aplicando la relación entre el trabajo de la fuerza conservativa y la energía potencial:

$$\begin{aligned} W_{B \rightarrow C} &= -\Delta E_p = -m \cdot \Delta U = -m \cdot (V_C - V_B) = \\ &= -5 \cdot (-8,004 \cdot 10^{-11} - (-1,334 \cdot 10^{-10})) = -2,668 \cdot 10^{-10} \text{ J} \end{aligned}$$

El trabajo que realiza la fuerza gravitatoria tiene el signo negativo por lo que el proceso no es espontáneo, ya que el sistema evoluciona hacia una situación de mayor energía potencial.

Ejercicio 8

Considerando a la Tierra y a la Luna aisladas de toda influencia exterior se desea saber el potencial gravitatorio en el punto en el que se anula el campo gravitatorio. La masa de la Tierra es igual a $5,98 \cdot 10^{24}$ kg y equivale a 81 veces la de la Luna y la distancia desde la Tierra hasta la Luna es de 384000 km.

Solución 8

Sea d la distancia Tierra-Luna y P el punto pedido, que supongamos está a una distancia x del centro de la Tierra. En ese punto los módulos de los campos gravitatorios creados por cada astro son iguales, $g_T = g_L$.

$$\frac{G \cdot M_T}{x^2} = \frac{G \cdot M_L}{(d-x)^2}$$

$$\frac{G \cdot 81 \cdot M_L}{x^2} = \frac{G \cdot M_L}{(d-x)^2} \Rightarrow \frac{9^2}{x^2} = \frac{1}{(d-x)^2}$$

Por tanto:

$$9 \cdot (d-x) = x$$

;

$$9d = 10x \Rightarrow x = \frac{9}{10} \cdot 384 \cdot 10^6 \text{ m} = 3,456 \cdot 10^8 \text{ m}$$

El potencial gravitatorio en ese punto es el debido a la Tierra y a la Luna:

$$V_P = V_T + V_L = -\frac{G \cdot M_T}{x} - \frac{G \cdot M_L}{d-x} = -\frac{G \cdot M_T}{9/10 d} - \frac{G \cdot M_T/81}{d-9/10 d}$$

Operando:

$$V_P = -\frac{G \cdot 10 \cdot M_T}{9 d} - \frac{G \cdot 10 \cdot M_T}{81 d} = -\frac{100}{81} \frac{G \cdot M_T}{d}$$

Sustituyendo:

$$V_P = -\frac{100}{81} 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{5,98 \cdot 10^{24}}{3,84 \cdot 10^8} = -1,3 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

Ejercicio 9

Un meteorito de 1000 kg de masa se encuentra en reposo a una distancia sobre la superficie de la Tierra de cinco veces el radio terrestre. ¿Cuál es el valor de la energía mecánica asociada al meteorito en esa posición? Justifica el signo obtenido. Prescindiendo de la fricción con el aire, calcula la velocidad con la que impactará contra la superficie de la Tierra. ¿Dependerá esa velocidad de la trayectoria que siga el meteorito?

Dato: $R_T = 6370 \text{ km}$.

Solución 9

a) El meteorito está situado a una distancia $6 R_T$ del centro de la Tierra y en reposo, por lo que la energía mecánica asociada a su posición es exclusivamente potencial gravitatoria.

$$E_{\text{mecánica}} = E_{\text{potencial}} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m_m}{6 \cdot R_T}$$

Multiplicando y dividiendo por R_T , como

$$g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2}$$

y sustituyendo, resulta que:

$$E_{mecánica} = -\frac{g_0 \cdot R_T \cdot m_m}{6} = -\frac{9,8 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \cdot 1000}{6} = -1,04 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

El signo negativo significa que el meteorito está ligado al campo gravitatorio terrestre.

b) Al prescindir de la fricción con el aire, la única fuerza que actúa sobre el meteorito es la que aplica el campo gravitatorio terrestre, por lo que la energía mecánica asociada a la posición del meteorito se conserva durante su caída.

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \Rightarrow E_{c, inicial} + E_{p, inicial} = E_{c, superficie} + E_{p, superficie}$$

La energía potencial gravitatoria asociada a la posición inicial del meteorito se transforma en energía potencial gravitatoria y energía cinética en la superficie de la Tierra.

$$0 - \frac{G \cdot M_T \cdot m_m}{6 R_T} = \frac{1}{2} m_m v_{superficie}^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m_m}{R_T}$$

Simplificando, multiplicando y dividiendo por R_T y como

$$g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2}$$

se tiene:

$$\frac{1}{2} v^2 = -\frac{1}{6} g_0 \cdot R_T + g_0 \cdot R_T = \frac{5}{6} g_0 \cdot R_T \Rightarrow v = \sqrt{\frac{5}{3} g_0 \cdot R_T}$$

Sustituyendo:

$$v = \sqrt{\frac{5}{3} 9,8 \cdot 6,37 \cdot 10^6} = 10200 = 10,2 \text{ km/s}$$

El campo gravitatorio es conservativo, por lo que el trabajo que realizan las fuerzas del campo para modificar la posición del meteorito es independiente de la trayectoria seguida. Por tanto, la velocidad con que llega a la superficie de la Tierra es independiente de la trayectoria que recorra.

Ejercicio 10

Se lanza verticalmente, desde la superficie de la Tierra, un objeto con una velocidad inicial de 5 km/s. ¿Hasta qué altura subirá, si se prescinde del rozamiento con el aire?

Dato: $R_T = 6370 \text{ km}$.

Solución 10

Si se prescinde del rozamiento con el aire, la única fuerza que actúa sobre el objeto es la atracción gravitatoria, por lo que la energía mecánica se conserva.

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \Rightarrow E_{c, superficie} + E_{p, superficie} = E_{c, final} + E_{p, final}$$

La energía cinética y potencial en la superficie de la Tierra se transforman en energía potencial gravitatoria asociada a su posición final.

$$\frac{1}{2} \cdot m_s \cdot v_{superficie}^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_T} = 0 - \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_T + h}$$

Operando:

$$\frac{v_{superficie}^2 \cdot R_T - 2 \cdot G \cdot M_T}{2 R_T} = -\frac{G \cdot M_T}{R_T + h} \Rightarrow \frac{R_T + h}{G \cdot M_T} = \frac{2 \cdot R_T}{2 \cdot G \cdot M_T - v_{superficie}^2 \cdot R_T}$$

Despejando:

$$h = \frac{2 \cdot G \cdot M_T \cdot R_T}{2 \cdot G \cdot M_T - v_{superficie}^2 \cdot R_T} - R_T = \frac{v_{superficie}^2 \cdot R_T^2}{2 \cdot G \cdot M_T - v_{superficie}^2 \cdot R_T}$$

Como

$$g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2}$$

se tiene que:

$$h = \frac{v_{superficie}^2}{2 \cdot g_0 - \frac{v_{superficie}^2}{R_T}} = \frac{v_{superficie}^2 \cdot R_T}{2 \cdot g_0 \cdot R_T - v_{superficie}^2}$$

Sustituyendo:

$$h = \frac{(5000)^2 \cdot 6,37 \cdot 10^6}{2 \cdot 9,8 \cdot 6,37 \cdot 10^6 - (5000)^2} = 1,59 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Ejercicio 11

El radio de la Tierra es de 6400 km y el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie es de $9,8 \text{ m/s}^2$; la masa de la Luna es $1/81$ veces la de la Tierra y su radio $1/4$ veces el radio terrestre. Con estos datos, determina la velocidad de escape desde la superficie de la Luna. Con el resultado obtenido, ¿se podría explicar la ausencia de atmósfera en la Luna?

Solución 11

Una partícula se desliga de la Luna cuando su energía mecánica es igual a cero.

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{escape}^2 - \frac{G \cdot M_L \cdot m}{R_L} = 0 \Rightarrow v_{escape} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_L}{R_L}}$$

Sustituyendo:

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_T / 81}{R_T / 4}} = \frac{2}{9} \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R_T}} = \frac{2}{9} v_{escapeTierra}$$

Operando, y como

$$g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2}$$

se tiene:

$$v_{escape} = \frac{2}{9} \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot R_T}$$

Sustituyendo:

$$v_{escape} = \frac{2}{9} \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 6,4 \cdot 10^6} = 2,5 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Este valor es menor que el de la velocidad media de agitación de las partículas gaseosas, por lo que la Luna no es capaz de retener una atmósfera.

Ejercicio 12

En la Tierra un saltador de altura alcanza los 2 m con un brinco que le comunica una velocidad inicial adecuada. Calcula el radio máximo que debe tener un asteroide esférico (de densidad igual a la terrestre), para que el saltador, al dar en el asteroide el mismo brinco que en la Tierra, salga despedido de éste escapando de su acción gravitatoria.

Dato: radio medio de la Tierra, $R = 6,37 \cdot 10^6$ m

Solución 12

La velocidad con que salta el atleta en la superficie de la Tierra es:

$$v = \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot h} = \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot 2} = 2 \sqrt{g_0}$$

Para que el atleta se desligue del asteroide su energía mecánica tiene que ser como mínimo igual a cero.

Sea m la masa del atleta, M_A la del asteroide y R_A su radio.

$$E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot m \cdot M_A}{R_A} = 0$$

Simplificando y sustituyendo:

$$\frac{1}{2} (2 \sqrt{g_0})^2 = G \frac{M_A}{R_A} \Rightarrow 2 \cdot g_0 = G \frac{M_A}{R_A}$$

Las densidades de los astros son iguales, entonces:

$$\frac{M_T}{R_T^3} = \frac{M_A}{R_A^3} \Rightarrow \frac{M_A}{R_A} = \frac{M_T}{R_T^3} R_A^2$$

Como

$$g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2}$$

se tiene que:

$$2 \cdot g_0 = G \frac{M_A}{R_A} \Rightarrow 2 \cdot G \frac{M_T}{R_T^2} = G \frac{M_T}{R_T^3} R_A^2 \Rightarrow R_A^2 = 2 R_T$$

Por tanto, el radio del asteroide es:

$$R_A = \sqrt{2 R_T} = 3569 \text{ m}$$

Ejercicio 13

Un vehículo explorador recorre una órbita de radio r alrededor de un planeta. ¿Qué ocurre si accidentalmente se encienden los motores de forma que la velocidad lineal del vehículo se multiplica por $\sqrt{2}$?

Solución 13

La velocidad de un objeto en órbita alrededor de un planeta es:

$$v_{\text{órbita}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{planeta}}}{r}}$$

Al encenderse los motores la velocidad del vehículo pasa a ser:

$$v = \sqrt{2} \cdot v_{\text{órbita}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{\text{planeta}}}{r}}$$

La energía mecánica del vehículo espacial es igual a la suma de su energía cinética y potencial gravitatoria.

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M_{\text{planeta}} \cdot m}{r}$$

Sustituyendo la velocidad por su nuevo valor, se tiene:

$$E = \frac{1}{2} m \cdot \frac{2 \cdot G \cdot M_{\text{planeta}}}{r} - \frac{G \cdot M_{\text{planeta}} \cdot m}{r} = 0$$

Por lo que el vehículo espacial deja de orbitar al planeta quedando desligado de él.

Para cualquier objeto puesto en órbita alrededor de un astro cuya velocidad lineal se multiplique por $\sqrt{2}$, su energía mecánica es igual a cero y se desliga del astro.

Ejercicio 14

Un satélite de 250 kg de masa, está en órbita circular en torno a la Tierra a una altura de 500 km sobre su superficie. Calcula su velocidad y su periodo de revolución. ¿Cuál es la energía involucrada en el proceso de poner al satélite en órbita con esa velocidad?

Datos: Radio de la Tierra = 6380 km y $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$

Solución 14

a) Aplicando al satélite la segunda ley de Newton y como la única fuerza que actúa sobre él es la interacción gravitatoria, se tiene:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= m \cdot \vec{a}_N \\ G \frac{M_T \cdot m_s}{r^2} &= m_s \frac{v^2}{r} \end{aligned}$$

Despejando y como

$$g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2}$$

se tiene que la velocidad orbital es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{r}} = \sqrt{\frac{9,8 \cdot (6,38 \cdot 10^6)^2}{6,38 \cdot 10^6 + 500 \cdot 10^3}} = 7,6 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

El periodo de revolución es

$$T = \frac{2 \pi r}{v} = \frac{2 \pi (6,38 \cdot 10^6 + 500 \cdot 10^3)}{7,6 \cdot 10^3} = 5687,9 \text{ s} \approx 1,6 \text{ h}$$

b) Aplicando la ley de la conservación de la energía entre la superficie de la Tierra y la órbita del satélite, se tiene que el trabajo realizado es igual a la variación de la energía mecánica del satélite.

$$W_{realizado} = \Delta E_c + \Delta E_p = E_{mecánica \text{ final}} - E_{mecánica \text{ inicial}} = E_{órbita} - E_{superficie}$$

La energía asociada al satélite en órbita es:

$$E_{órbita} = E_{p,órbita} + E_{c,órbita} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{r} + \frac{1}{2} m_s \cdot v_{orbital}^2$$

Sustituyendo la velocidad orbital por su valor:

$$v_{orbital}^2 = \frac{G \cdot M_T}{r}$$

$$E_{órbita} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{r} + \frac{1}{2} m_s \cdot \frac{G \cdot M_T}{r} = -\frac{1}{2} \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{r}$$

Operando y sustituyendo:

$$E_{órbita} = -\frac{1}{2} \cdot g_0 \cdot R_T^2 \frac{m_s}{r} = -\frac{1}{2} 9,8 \cdot (6,38 \cdot 10^6)^2 \frac{250}{6,38 \cdot 10^6 + 500 \cdot 10^3} = -7,25 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Si se considera que el satélite se lanza siguiendo la vertical, sin aprovechar el movimiento de rotación de la Tierra, la velocidad inicial en la superficie de la Tierra es igual a cero y la energía asociada a la posición del satélite sobre la superficie de la Tierra es solamente potencial:

$$E_{superficie} = E_{p,superficie} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_T} = -g_0 \cdot R_T \cdot m_s$$

Sustituyendo:

$$E_{superficie} = -9,8 \cdot 6,38 \cdot 10^6 \cdot 250 = -1,56 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Por tanto, la energía necesaria para poner el satélite en órbita es:

$$W_{realizado} = \Delta E = E_{órbita} - E_{superficie} = -7,25 \cdot 10^9 - (-1,56 \cdot 10^{10}) = 8,35 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Ejercicio 15

Determina la energía necesaria para colocar en una órbita de radio $r = 3 \cdot R_T$ a un satélite artificial de 65 kg de masa, lanzándolo desde un punto del ecuador terrestre y teniendo en cuenta el movimiento de rotación de la Tierra. ¿Cuál es el periodo del satélite?

Dato: $R_T = 6380 \text{ km}$ y $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$

Solución 15

Debido al movimiento de rotación de la Tierra, los puntos situados sobre el ecuador tienen velocidad máxima. Al lanzar los satélites artificiales desde puntos próximos al ecuador y hacia el este, se aprovecha la energía cinética debida a la rotación de la Tierra.

La velocidad del satélite es la misma que la del punto de lanzamiento, por lo que la energía mecánica asociada al satélite cuando está situado sobre la superficie de la Tierra es:

$$E_{superficie} = E_c + E_p = \frac{1}{2} m_s \cdot v_T^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_T}$$

Como:

$$g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} \Rightarrow E_{superficie} = \frac{1}{2} m_s \cdot v_T^2 - g_0 \cdot m_s \cdot R_T$$

La velocidad del satélite en su órbita se determina aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = m_s \cdot \vec{a}_n$$

$$\frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{r^2} = m_s \frac{v_{órbita}^2}{r} \Rightarrow v_{órbita}^2 = \frac{G \cdot M_T}{r}$$

La energía mecánica asociada al satélite en su órbita es:

$$E_{órbita} = \frac{1}{2} m_s \cdot v_{órbita}^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{r} = \frac{1}{2} m_s \cdot \frac{G \cdot M_T}{r} - \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{r} = -\frac{1}{2} \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{r}$$

Como $r = 3 R_T$, se tiene:

$$E_{órbita} = -\frac{1}{2} \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{3 R_T} = -\frac{1}{6} g_0 \cdot m_s \cdot R_T$$

Aplicando la ley de la conservación de la energía, el trabajo realizado es igual a la variación de la energía mecánica del satélite.

$$W_{poner en órbita} = E_{órbita} - E_{superficie} = -\frac{1}{6} g_0 \cdot m_s \cdot R_T - \left(\frac{1}{2} m_s \cdot v_T^2 - g_0 \cdot m_s \cdot R_T \right)$$

Operando:

$$W_{poner en órbita} = \frac{5}{6} g_0 \cdot m_s \cdot R_T - \frac{1}{2} m_s \cdot v_T^2$$

La velocidad de un punto del ecuador es:

$$v_T = \frac{2 \pi R_T}{T} = \frac{2 \pi 6,38 \cdot 10^6}{24 \cdot 3600} = 464 \text{ m/s}$$

Sustituyendo:

$$W_{poner en órbita} = \frac{5}{6} \cdot 9,8 \cdot 65 \cdot 6,38 \cdot 10^6 - \frac{1}{2} \cdot 65 \cdot (464)^2 = 3,38 \cdot 10^9 \text{ J}$$

b) Aplicando las relaciones entre el periodo y la velocidad, se tiene:

$$v_{órbita} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} \Rightarrow T = \frac{2 \pi r}{v} = \frac{2 \pi r}{\sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}} = 2 \pi \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M_T}}$$

Como $r = 3 R_T$, se tiene:

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{27 R_T^3}{G \cdot M_T}} = 6 \pi \sqrt{\frac{3 R_T}{g_0}} = 26342,6 \text{ s} \approx 7,3 \text{ h}$$

Ejercicio 16

Un satélite artificial de comunicaciones, de 500 kg de masa, describe una órbita circular de 9000 km de radio en torno a la Tierra. En un momento dado, se decide variar el radio de su órbita, para lo cual enciende uno de los cohetes propulsores del satélite, comunicándole un impulso tangente a su trayectoria antigua. Si el radio de la nueva órbita descrita por el satélite, en torno a la Tierra, es de 13000 km, calcula la velocidad del satélite en la nueva órbita y la energía involucrada en el proceso.

Datos: Radio de la Tierra = 6380 km y $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$

Solución 16

a) Aplicando al satélite la segunda ley de Newton y como la única fuerza que actúa sobre él es la interacción gravitatoria, se tiene:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n$$
$$G \frac{M_T \cdot m_s}{r^2} = m_s \frac{v^2}{r}$$

Despejando, como

$$g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2}$$

y sustituyendo, se tiene que:

$$v_{final} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r_{final}}} = \sqrt{g_0 \frac{R_T^2}{r_{final}}} = \sqrt{9,8 \frac{(6,38 \cdot 10^6)^2}{13 \cdot 10^6}} = 5,5 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

b) El trabajo realizado por un agente externo para modificar la órbita del satélite es igual a la variación de su energía mecánica.

$$W_{realizado} = \Delta E_c + \Delta E_p = E_{mecánica,final} - E_{mecánica,inicial}$$

La energía asociada al satélite en órbita es igual a la denominada energía de enlace:

$$E_{órbita} = E_{potencial} + E_{cinética} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{r} + \frac{1}{2} m_s \cdot v_{orbital}^2$$

Sustituyendo la velocidad orbital por su valor:

$$v_{orbital}^2 = \frac{G \cdot M_T}{r}$$
$$E_{órbita} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{r} + \frac{1}{2} m_s \cdot \frac{G \cdot M_T}{r} = -\frac{1}{2} \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{r}$$

Operando y como

$$g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2}$$

se tiene que:

$$E_{órbita} = -\frac{1}{2} \cdot g_0 \cdot R_T^2 \frac{m_s}{r}$$

La energía involucrada en el proceso es la diferencia de las energías mecánicas de las dos órbitas:

$$W_{realizado} = \Delta E = E_{\text{órbita final}} - E_{\text{órbita inicial}} = -\frac{1}{2} \cdot g_0 \cdot R_T^2 \frac{m_s}{r_{final}} + \frac{1}{2} \cdot g_0 \cdot R_T^2 \frac{m_s}{r_{inicial}}$$

Operando:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \cdot g_0 \cdot R_T^2 \cdot m_s \cdot \left(\frac{1}{r_{inicial}} - \frac{1}{r_{final}} \right) = \frac{1}{2} \cdot g_0 \cdot R_T^2 \cdot m_s \cdot \left(\frac{r_{final} - r_{inicial}}{r_{inicial} \cdot r_{final}} \right)$$

Sustituyendo:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot (6,38 \cdot 10^6)^2 \cdot 500 \cdot \left(\frac{13 \cdot 10^6 - 9 \cdot 10^6}{9 \cdot 10^6 \cdot 13 \cdot 10^6} \right) = 3,4 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Que lógicamente es una cantidad positiva.