



UNIVERSIDAD DE OVIEDO

Escuela Politécnica Superior de Ingeniería de Gijón

Ingenieros Industriales

Curso 2008-2009

Apuntes de Mecánica de Fluidos: 2ª parte

II.3. FLUJO EXTERNO.



Vórtices de Karman en las islas Canarias

Julián Martínez de la Calle
Área de Mecánica de Fluidos
Gijón enero 2008

II.3. FLUJO EXTERNO.

- 3.1. Capa límite.
 - 3.1.1. Espesor de capa límite y espesor de desplazamiento.
 - 3.1.2. Ecuaciones de capa límite de Prandtl.
 - 3.1.3. Capa límite laminar y capa límite turbulenta.
- 3.2. Capa límite sin gradiente de presión: placa plana.
 - 3.2.1. Análisis de von Karman.
 - 3.2.2. Flujo laminar: solución analítica de Blasius.
 - 3.2.3. Flujo turbulento.
- 3.3. Capa límite con gradiente de presión: desprendimiento de capa límite y estela turbulenta.
- 3.4. Flujo convergente-divergente.
- 3.5. Problemas resueltos.

3.1. CAPA LÍMITE.

En **flujo externo** se tiene el movimiento de un objeto en el seno de un fluido; conforme el objeto va penetrando en el fluido, las partículas son arrastradas y adquieren unas determinadas distribuciones de velocidad y de presión.

En un sistema de referencia inercial fijo al objeto, se tendría un flujo uniforme que se dirige al objeto, y que alrededor de él, se divide en dos regiones: una **región viscosa** en las proximidades de la superficie del objeto; y una **región exterior no viscosa** (sin tensiones tangenciales por ser nulo el correspondiente gradiente de velocidad).

La región viscosa, se denomina **CAPA LÍMITE**, se inicia en las proximidades del borde de ataque, y su extensión va aumentando aguas abajo. El espesor de la capa límite es creciente, y normalmente de poca extensión, dependiendo de la geometría del objeto y del número de Reynolds; aunque se puede tener el desprendimiento de la capa límite y la formación de la estela transitoria, que puede ocupar una amplia región a partir del punto de desprendimiento.

3.1.1. ESPESOR DE CAPA LÍMITE Y ESPESOR DE DESPLAZAMIENTO.

En la capa límite, la distribución de velocidades es monótona creciente, desde cero en la superficie de contacto del fluido con el objeto, hasta alcanzar el valor de la velocidad uniforme de la corriente exterior. En una determinada posición (entre el borde de ataque y el borde de estela), se define el **espesor de la capa límite δ** , como la posición (normal a la sección) en donde se alcanza la velocidad de la corriente exterior. Por el carácter asintótico de la distribución de velocidades, se suele definir experimentalmente el espesor de la capa límite, por la posición en donde se alcanza el 99% de la velocidad de la corriente exterior.

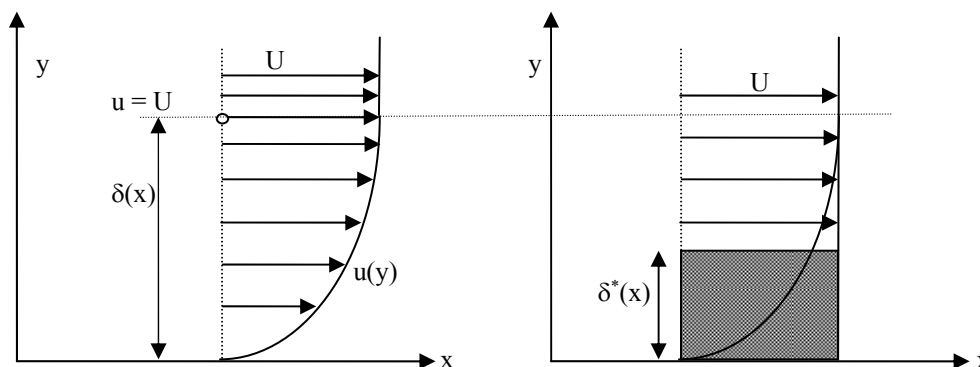


Fig.31. Definición del espesor de la capa límite (δ) y del espesor de desplazamiento (δ^*)

$$\delta(x) = y \quad / \quad \text{teóricamente: } u = U; \quad \text{experimentalmente: } u = 0,99 U$$

Se define **espesor de desplazamiento** δ^* , como el espesor adicional, que debería tener el objeto en una determinada sección, para poder considerar una única región no viscosa.

$$\delta^*(x) = y \quad / \quad \int_{y=0}^{y=\delta} u \cdot dy = U(\delta - \delta^*) \quad \Rightarrow \quad \delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

Tanto el espesor de la capa límite como el de desplazamiento, dependen de la geometría y del número de Reynolds. Así para flujo sobre una placa plana (y en general para objetos que oponen poca área frontal), el espesor de la capa límite es muy pequeño, y por tanto también el espesor de desplazamiento, por lo que se puede despreciar el efecto de desplazamiento y la distribución de presiones a lo largo de la placa se puede determinar con la ecuación de Euler de flujo no viscoso, como si la capa límite no existiese.

Para objetos que oponen gran área frontal al flujo, aunque la capa límite sigue siendo relativamente pequeña, se tienen puntos de separación de la capa límite, que originan su desprendimiento de la superficie y la formación de una estela turbulenta, de alta vorticidad y de carácter no estacionario. No se tiene la solución analítica, y sólo con determinados modelos de turbulencia y con técnicas numéricas, es posible resolver el problema.

3.1.2. ECUACIONES DE CAPA LÍMITE DE PRANDTL.

Para flujo bidimensional¹, estacionario e incompresible, las ecuaciones de Navier-Stokes son:

Ec. Continuidad: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

Ec. Movimiento en dirección tangencial a la pared: $-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)$

Ec. Movimiento en dirección normal a la pared: $-\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right)$

Prandtl, estableció las siguientes hipótesis en la capa límite:

velocidades: $u \gg v$

gradientes: $\frac{\partial u}{\partial y} \gg \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \gg \frac{\partial v}{\partial x}$

Número de Reynolds: $Re_x = \frac{Ux}{\nu} \gg 1$

La ecuación de movimiento en la dirección normal queda reducida a: $\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0 \quad \equiv \quad p = p(y)$

Con lo que la presión no varía en la dirección normal de la capa límite, solo a lo largo de ella, y viene determinada por la Ec. de Euler aplicable a la corriente exterior:

$$p = p(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx}$$

Ec. Euler dirección x: $-\frac{dp}{dx} = \rho U \frac{dU}{dx}$

¹ En una pared curva, la coordenada x representa la longitud a lo largo de la pared, siendo y la coordenada normal local; la velocidad de la corriente exterior, viene dada por la solución no viscosa, y puede variar en cada posición x : $U=U(x)$.

La ecuación de movimiento en la dirección tangencial, queda como:

$$\rho U \frac{dU}{dx} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Para poder aplicarla, tanto a flujo laminar como a turbulento, Prandtl expuso el término viscoso, en función de la tensión de rozamiento:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad \left| \quad \begin{array}{ll} \tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} & \text{flujo laminar} \\ \tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} & \text{flujo turbulento} \end{array} \right.$$

Con todo, se tienen las dos ecuaciones de la capa límite de Prandtl, para flujos bidimensionales e incompresibles:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0}$$

$$\boxed{\rho U \frac{dU}{dx} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)}$$

$$\left| \quad \begin{array}{ll} \tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} & \text{flujo laminar} \\ \tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} & \text{flujo turbulento} \end{array} \right.$$

Las dos ecuaciones se deben resolver, para determinar la distribución de velocidades en la capa límite: $u=u(x,y)$; $v=v(x,y)$, conocida la distribución de la velocidad de la corriente exterior no viscosa $U(x)$, y con las condiciones de contorno:

$$\text{No deslizamiento en la pared:} \quad u(x,0) = v(x,0) = 0$$

$$\text{Acoplamiento de la capa límite y la corriente exterior:} \quad u(x,\delta(x)) = U(x)$$

3.1.3. CAPA LÍMITE LAMINAR Y TURBULENTA.

Al inicio de la capa límite a partir del borde de ataque, la velocidad es prácticamente tangencial, moviéndose las partículas totalmente guiadas por la geometría: se tiene la denominada capa límite laminar, en donde el campo de velocidad es: $u=u(x,y)$; $v=0$.

A partir de cierta posición (dependiendo de la geometría del objeto, de la rugosidad de la superficie y del Re), se tienen partículas que no solamente avanzan en la dirección tangencial, sino que también tienen componente normal de aproximarse o alejarse de la superficie: $u=u(x,y)$; $v=v(x,y)$.

En la capa límite laminar, la distribución de velocidad es próxima a la marcada por el flujo de Poiseuille, es decir una distribución parabólica; aunque la solución exacta se puede obtener por integración de la Ecs. De Prandtl: es la denominada solución de Blasius.

En la capa límite turbulenta, la distribución de velocidad tiene perfiles no parabólicos, con velocidades medias muy próximas a la de la región exterior, y de imposible resolución analítica.

3.2. CAPA LÍMITE SIN GRADIENTE DE PRESIÓN: PLACA PLANA.

Consideremos el flujo en la capa límite, de una corriente uniforme que incide sobre una placa plana, a presión constante, con lo que la presión no varía en la dirección del flujo, es decir se tiene un gradiente de presión nulo: $dp/dx = 0$.

Para determinar el espesor de la capa límite a lo largo de la placa: $\delta = \delta(x)$, se define el espesor de cantidad de movimiento de Karman, que permite obtener una expresión alternativa a la tensión en la pared de la ley de Newton de viscosidad; a partir de las dos expresiones de dicha tensión en la pared, se obtiene la Ec. diferencial del espesor de la capa límite.

ESPESOR DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO de von KARMAN. Consideremos el volumen de control formado por la solera de la placa y de la superficie de corriente que pasa por el borde de la capa límite en una determinada posición "x", y se inicia en el borde de ataque ($x=0$):

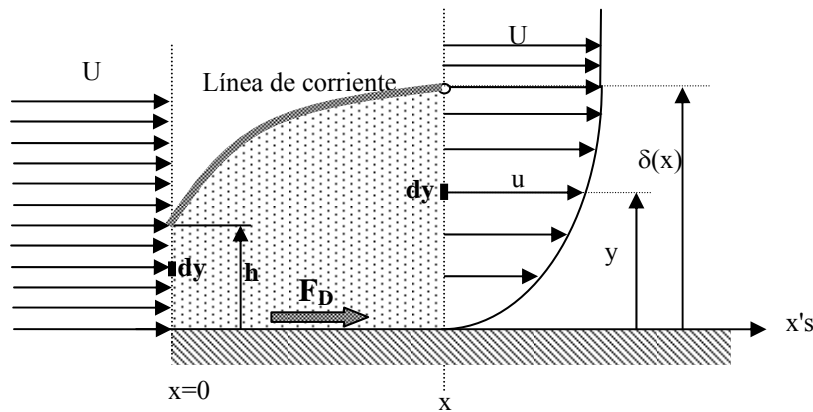


Fig. 3.2. Volumen de control entre el borde de ataque y una posición genérica "x"

La fuerza de arrastre que el fluido hace sobre la placa, viene dada por la ecuación integral de cantidad de movimiento aplicada al volumen de control considerado; en donde el flujo entra por la vertical del borde de ataque (desde $y=0$ a $y=h$) y sale por la vertical en la posición genérica x (desde $y=0$ a $y=\delta$); evidentemente el fluido no puede transvasar ni la solera ni la superficie de corriente:

$$F_D = \int_0^h \rho U (U \cdot b dy) - \int_0^\delta \rho u (u \cdot b dy) = \rho b U^2 h - \int_0^\delta \rho b u (u dy)$$

La altura "h" de intersección de la línea de corriente con la vertical del borde de ataque, se obtiene a partir de la igualdad del caudal que entra por el borde de ataque (de 0 a h), y del caudal que sale (de 0 a δ):

$$\left. \begin{aligned} Q_{\text{ENTRADA}} &= \int_0^h U \cdot b dy = b U \cdot h \\ Q_{\text{SALIDA}} &= \int_0^\delta u \cdot b dy \end{aligned} \right| \Rightarrow h = \int_0^\delta \frac{u}{U} dy$$

Con lo que la fuerza de arrastre es: $F_D = \rho b U^2 \int_0^\delta \rho \frac{u}{U} (u dy) - \int_0^\delta \rho b u (u dy) = \rho b U^2 \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$

La integral, se denomina *espesor de cantidad de movimiento de Karman*:

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

La fuerza de arrastre queda como: $F_D = \rho b U^2 \cdot \theta$

Una forma alternativa de obtener la fuerza de arrastre sobre la placa, es integrar la fuerza de rozamiento elemental que sobre un elemento de área de la solera ($b \cdot dx$) ejerce el fluido, a través del conocimiento de la tensión de rozamiento en la pared:

$$F_D = \int_0^x \tau_w \cdot b dx \quad \Rightarrow \quad \tau_w = \frac{1}{b} \frac{dF_D}{dx} = \frac{1}{b} \frac{d(\rho b U^2 \theta)}{dx} = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} \quad \boxed{\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx}}$$

3.2.1. ANÁLISIS DE VON KARMAN PARA FLUJO LAMINAR: desde el borde de ataque, hasta la zona de transición, el flujo es **laminar**, con lo que puede expresar la tensión en la pared, a partir de la ley de Newton de viscosidad:

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$$

Que se puede obtener, a partir del conocimiento del perfil de velocidades. Von KARMAN considero una distribución parabólica de velocidades: $u = a + by + cy^2$; y con las condiciones de contorno: $u(x,0)=0$; $u(x,\delta)=U$; $(\partial u / \partial y)_{y=\delta} = 0$; se obtiene:

$$u(x, y) = U \left(\frac{2y}{\delta(x)} - \left(\frac{y}{\delta(x)} \right)^2 \right)$$

Con lo que la tensión de rozamiento en la pared, en una determinada posición longitudinal "x", es:

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu \left(\frac{\partial \left(U \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right) \right)}{\partial y} \right)_{y=0} = \dots = \mu U \frac{2}{\delta}$$

También se puede obtener la tensión en la pared, a partir del espesor de cantidad de movimiento:

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy = \int_0^\delta \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right) \left(1 - \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right) \right) dy = \dots = \frac{2}{15} \delta$$

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} = \rho U^2 \frac{d(2\delta/15)}{dx} = \frac{2}{15} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}$$

Igualando las dos expresiones de la tensión en la pared, se tiene la ecuación diferencial que permite obtener el espesor de la capa límite:

$$\tau_w = \frac{2}{15} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} = \mu U \frac{2}{\delta} \quad \Rightarrow \quad \delta \cdot d\delta = 15 \frac{\mu}{\rho U} dx \quad \Rightarrow \quad \delta = \sqrt{\frac{30\mu}{\rho U} x}$$

Que suele reescribirse, en términos de δ/x :

$$\frac{\delta}{x} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{\rho U x / \mu}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{Re_x}} \quad \boxed{\frac{\delta}{x} = \frac{5,477}{\sqrt{Re_x}}}$$

El espesor de desplazamiento, vendrá dado por:

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy = \int_0^\delta \left(1 - \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right) \right) dy = \dots = \frac{1}{3} \delta = \sqrt{\frac{10\mu}{3\rho U} x} \quad \boxed{\frac{\delta^*}{x} = \frac{1,826}{\sqrt{Re_x}}}$$

Una vez, obtenida el espesor de la capa límite, la fuerza de arrastre desde el borde de ataque, hasta una posición longitudinal genérica “x” será:

$$F_D = \rho b U^2 \cdot \theta = \rho b U^2 \cdot \frac{2\delta}{15} = \frac{2}{15} \rho b U^2 \sqrt{\frac{30\mu}{\rho U}} x = b \sqrt{\frac{8}{15}} \rho U^3 \mu x \quad \boxed{F_D = 0,73b\sqrt{\rho U^3 \mu x}}$$

En la posición “x” la tensión de rozamiento viscoso es: $\tau_w = \mu U \frac{2}{\delta} = \mu U \frac{2}{\sqrt{30\mu x / \rho U}} = \dots = \sqrt{\frac{2\rho U^3 \mu}{15x}}$

Que se suele expresar adimensionalizada por la presión dinámica de la corriente exterior; dando lugar al coeficiente de fricción:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{\sqrt{\frac{2\rho U^3 \mu}{15x}}}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \dots = \sqrt{\frac{8}{15}} \frac{\mu}{\rho U x} \quad \boxed{C_f = \frac{0,730}{\sqrt{Re_x}}}$$

La adimensionalización de la fuerza de arrastre, por la presión dinámica de la corriente exterior y el área mojada (desde el borde de ataque hasta la posición longitudinal “x”), da el coeficiente de arrastre:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 (bx)} = \frac{b\sqrt{\frac{8}{15}} \rho U^3 \mu x}{\frac{1}{2}\rho U^2 (bx)} = \dots = \sqrt{\frac{32}{15}} \frac{\mu}{\rho U x} \quad \boxed{C_D = \frac{1,461}{\sqrt{Re_x}} = 2C_f}$$

3.2.2. SOLUCIÓN ANÁLITICA DE BLASIUS PARA FLUJO LAMINAR: a partir de las ecuaciones de Prandtl de la capa límite, Blasius obtuvo la solución analítica del perfil de velocidades para flujo laminar; con la dificultad de que es una solución por integración numérica, obteniendo que u se aproxima en una asíntota vertical a U ; con lo que el espesor de la capa límite no se puede obtener con la condición $u=U$.

No obstante la condición de que $u = 0,99U$, se alcanza aproximadamente con $y = \frac{5}{\sqrt{\rho U / \mu x}}$.

Con lo que definiendo el espesor de capa límite, en esa posición vertical, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\boxed{\frac{\delta}{x} = \frac{5,0}{\sqrt{Re_x}}}$$

$$\boxed{\frac{\delta^*}{x} = \frac{1,721}{\sqrt{Re_x}}}$$

$$\boxed{C_f = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}}}$$

$$\boxed{C_D = \frac{1,328}{\sqrt{Re_x}} = 2C_f}$$

3.2.3. FLUJO TURBULENTO: no existe solución analítica de las ecuaciones de Prandtl de capa límite turbulenta, por el desconocimiento de los esfuerzos turbulentos de Reynolds; no obstante a partir de las consideraciones de Prandtl de ajuste de los perfiles turbulentos en flujo sin gradiente de presión, a funciones potenciales, se suele considerar como distribución de velocidades en la capa límite turbulenta:

$$u = U \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7}$$

Con esta distribución, el espesor de desplazamiento y de cantidad de movimiento, son respectivamente:

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy = \int_0^{\delta} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \right) dy = \dots = \frac{1}{8} \delta$$

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy = \int_0^{\delta} \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \right) dy = \dots = \frac{7}{72} \delta$$

La tensión en la pared es: $\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} = \frac{7}{72} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}$

Prandtl (ver problema P9.2), obtuvo el coeficiente de fricción en función del espesor de la capa límite:

$$C_f = 0,02 (\text{Re}_{\delta})^{-1/6}$$

Con lo que la tensión en la pared también se puede expresar por:

$$\tau_w = C_f \frac{1}{2} \rho U^2 = 0,02 \left(\frac{\rho U \delta}{\mu} \right)^{-1/6} \frac{1}{2} \rho U^2 = 0,01 \rho U^2 \left(\frac{\rho U \delta}{\mu} \right)^{-1/6}$$

Igualando las dos expresiones de la tensión en la pared, queda la ecuación diferencial, que permite obtener el espesor de la capa límite:

$$\delta^{1/6} d\delta = 0,103 \left(\frac{\rho U}{\mu} \right)^{-1/6} dx \quad \text{integrando} \quad \boxed{\frac{\delta}{x} = \frac{0,16}{(\text{Re}_x)^{1/7}}}$$

Los coeficientes de fricción y de arrastre, en función del Re_x , son:

$$\boxed{C_f = \frac{0,027}{(\text{Re}_x)^{1/7}}} \quad \boxed{C_D = \frac{0,031}{(\text{Re}_x)^{1/7}} = \frac{7}{6} C_f}$$

ZONA DE TRANSICIÓN: en el flujo sobre una placa plana lisa, el régimen laminar se extiende hasta $\text{Re}=5 \cdot 10^5$; y el régimen turbulento se inicia en $\text{Re}=8 \cdot 10^7$; en la zona de transición de laminar a turbulento, consideraremos la expresión del coeficiente de arrastre dada por Schlichting:

zona laminar: $\text{Re} < 5 \cdot 10^5$ Ec. Blasius: $C_D = \frac{1,328}{(\text{Re}_L)^{1/2}}$

zona de transición: $5 \cdot 10^5 < \text{Re} < 8 \cdot 10^7$ Ec. Schlichting: $C_D = \frac{0,031}{(\text{Re}_L)^{1/7}} - \frac{1440}{\text{Re}_L}$

zona turbulenta: $8 \cdot 10^7 < \text{Re}$ Ec. Prandtl: $C_D = \frac{0,031}{(\text{Re}_L)^{1/7}}$

3.3. CAPA LÍMITE CON GRADIENTE DE PRESIÓN: DESPRENDIMIENTO

Consideremos que en el flujo de capa límite, se tiene un gradiente de presión no nulo en la dirección del flujo: $dp/dx \neq 0$. Lo que tiene dos consecuencias:

1. En la **corriente exterior la velocidad no es constante**, a partir de Euler:
$$\frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\rho U} \frac{dp}{dx} \neq 0$$

Como la variación de la velocidad de la corriente exterior es de signo contrario al gradiente de presión: si el gradiente de presión es negativo, la velocidad de la corriente exterior va aumentando en la dirección del flujo; si el gradiente de presión es positivo, la velocidad de la corriente exterior va disminuyendo.

2. En la **capa límite** se puede tener un **punto de inflexión en el perfil de velocidades**. A partir de las ecuaciones de Prandtl para la capa límite en la pared ($u=v=0$), se tiene que el signo de la derivada segunda de la distribución de velocidades en la pared viene dado por el signo del gradiente de presión. Además, como el perfil de velocidades del borde de la capa límite debe ajustarse “suavemente” a la corriente exterior, se tiene en dicho borde una derivada segunda negativa.

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=\delta} < 0$$

Si el **gradiente de presión es negativo**, en la pared se tiene una derivada segunda de signo negativo, con lo que la pendiente del perfil de velocidades es monótona creciente, sin ningún punto de inflexión. Si el **gradiente de presión es positivo**, en la pared se tiene una derivada segunda positiva, y en el borde de la capa límite negativa, con lo cual en algún punto intermedio se debe tener un punto de inflexión (PI) con derivada segunda nula.

En función de la intensidad del gradiente de presión positivo, el punto de inflexión se tiene más o menos alejado de la pared: con gradientes débiles el punto de separación esta cerca de la pared (si es tan débil, que es nulo, el punto de inflexión está en la propia pared, y tenemos el caso de flujo sin gradiente de presión); con gradientes fuertes, el punto de inflexión se aleja de la pared.

Otra consideración muy importante, es el signo de la primera derivada de la velocidad (pendiente) en el contacto fluido-sólido, que viene determinada por la tensión en la pared. Para flujo con gradiente de presión negativo, dicha pendiente siempre es positiva y va disminuyendo en la dirección del flujo: es decir se tienen cada vez menores tensiones de rozamiento en la pared. Para flujo con gradiente de presión positivo, la pendiente en la pared va aumentando, pudiendo llegarse a una posición en donde dicha pendiente es infinita, y a partir de la cual, la pendiente cambia de signo debido al retroceso del flujo: dando lugar a un flujo inverso en las proximidades de la pared, con el correspondiente **desprendimiento de la capa límite**.

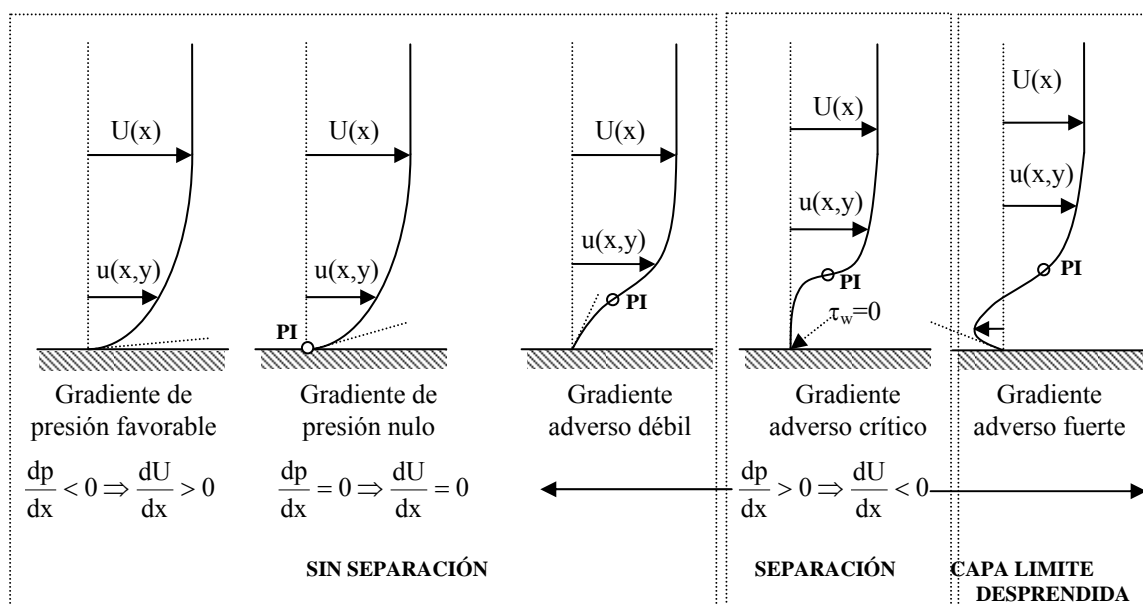


Fig. 3.3. Efecto del gradiente de presión en la distribución de velocidades en la capa límite

El desprendimiento se origina en el punto de separación, en donde se tiene tensión nula en la pared, aguas arriba, en la pared la pendiente del perfil de velocidades es positivo, y aguas abajo es negativo. La teoría de Prandtl de la capa límite es válida hasta el punto de separación; a partir del cual, se tiene la formación de la estela turbulenta con grandes interacciones con el flujo.

3.4. FLUJO CONVERGENTE- DIVERGENTE.

Para visualizar los conceptos anteriores, consideremos un objeto que se inicia en el borde de ataque (BA), se extiende hasta una sección de espesor medio (EM) y finaliza en el borde de estela (BE); con lo que tendremos tres zonas del flujo exterior en su avance:

- Zona de flujo convergente, desde el borde de ataque (BA) hasta el espesor máximo (EM).
- Zona de flujo divergente, desde el espesor máximo (EM) al borde de estela (BE).
- Zona de flujo de estela, a partir del borde de ataque.

3.4.1. ZONA DE FLUJO CONVERGENTE: la sección de paso del fluido va disminuyendo en la dirección del flujo, con lo que por continuidad de la corriente exterior, su velocidad va aumentando:

$$\left. \begin{array}{l} \text{continuidad : } UA = \text{cte.} \Rightarrow \frac{dU}{dx} + \frac{dA}{dx} = 0 \\ \text{zona convergente : } \frac{dA}{dx} < 0 \end{array} \right\} \frac{dU}{dx} > 0$$

Como en la región exterior, se cumple la Ec. de Euler, la geometría provoca un gradiente de presión negativo en la dirección del flujo:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Euler : } -\frac{dp}{dx} = \rho U \frac{dU}{dx} \\ \text{zona convergente : } \frac{dU}{dx} > 0 \end{array} \right\} \frac{dp}{dx} < 0$$

En la región viscosa de la capa límite, la Ec. de Prandtl, aplicada en la pared, da el signo negativo de la derivada segunda del campo de velocidad:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ec. Prandtl en pared (u = v = 0) } -\frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0 \\ \text{zona convergente : } \frac{dp}{dx} < 0 \end{array} \right\} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} < 0$$

En el borde de la capa límite, el signo de la derivada segunda es siempre negativa, por la condición de máxima velocidad, con lo que en ésta zona convergente del flujo, el perfil de velocidad no tiene ningún punto de inflexión, y es imposible que se desprenda la capa límite. Por lo que al gradiente de presión negativo, se le suele denominar **gradiente de presión favorable**, por el no desprendimiento de la capa límite.

Lo que si puede tener lugar, es el paso de capa límite laminar a turbulenta, sobre todo en función de la rugosidad de la superficie y del número de Reynolds de la corriente exterior.

Otra consideración, es que conforme el fluido avanza, como la velocidad de la corriente exterior va aumentando, el perfil de velocidad en la capa límite desde la pared al borde de la capa límite, se va ensanchando, es decir, la primera derivada en la pared va disminuyendo, y con ella la tensión en la pared.

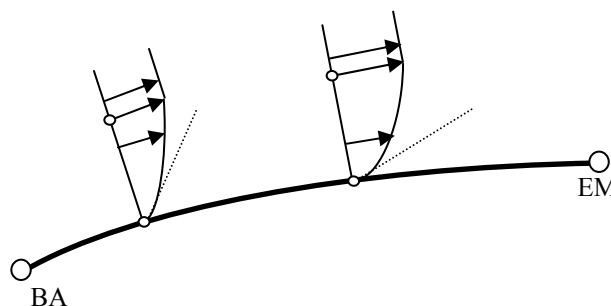


Fig. 3.4. Evolución de la capa límite en zona de flujo convergente

3.4.2. ZONA DE FLUJO DIVERGENTE: la sección de paso del fluido va aumentando en la dirección del flujo, con lo que por continuidad de la corriente exterior, su velocidad va disminuyendo:

$$\left. \begin{array}{l} \text{continuidad : } UA = \text{cte.} \Rightarrow \frac{dU}{dx} + \frac{dA}{dx} = 0 \\ \text{zona divergente : } \frac{dA}{dx} > 0 \end{array} \right\} \frac{dU}{dx} < 0$$

Como en la región exterior, se cumple la Ec. de Euler, la geometría provoca un gradiente de presión positivo en la dirección del flujo:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Euler : } -\frac{dp}{dx} = \rho U \frac{dU}{dx} \\ \text{zona divergente : } \frac{dU}{dx} < 0 \end{array} \right\} \frac{dp}{dx} > 0$$

En la región viscosa de la capa límite, la Ec. de Prandtl, aplicada en la pared, da el signo positivo de la derivada segunda del campo de velocidad:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ec. Prandtl en pared (u = v = 0) } -\frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0 \\ \text{zona divergente : } \frac{dp}{dx} > 0 \end{array} \right\} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} > 0$$

En el borde de la capa límite, el signo de la derivada segunda es siempre negativa, por la condición de máxima velocidad; es decir la derivada segunda del perfil de velocidades se inicia en la pared con signo positivo y finaliza en el borde de la capa límite con signo negativo, con lo cual en un punto intermedio ($0 < y < \delta$) debe tener valor nulo, con lo que es un punto de inflexión (PI). Con lo que es perfil de velocidad desde la pared hasta el punto de inflexión, es de pendiente decreciente, lo que tiene su mayor valor en la pared, lo que provoca grandes tensiones en la pared.

Conforme el fluido avanza, la velocidad de la corriente exterior va disminuyendo, el perfil de velocidad en la capa límite se va estrechando, y la pendiente en la pared va aumentando, pudiendo llegar a la posición, en donde se tiene una pendiente infinita, que corresponde a una parada del fluido, no solo en la pared, sino también en puntos próximos; ésta posición es la de **separación de la capa límite (PS)**, a partir de la cual, el gradiente de presión obliga al fluido en las proximidades de la pared, a invertir su sentido de avance, se provoca un flujo en sentido contrario al de la corriente exterior, que se extiende desde la pared hasta determinada posición normal, a partir de la cual, el flujo retoma su sentido de avance y llega a alcanzar la velocidad de la corriente exterior.

En las secciones posteriores al punto de separación de la capa límite, se provoca un flujo rotacional, de sentido de giro determinado por: velocidad nula en la pared, retroceso cerca de la pared y avance cerca del borde de la capa límite. Son los denominados **vórtices de Karman**.

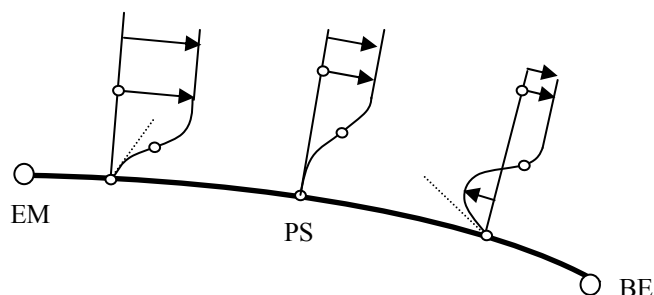


Fig. 3.5. Evolución de la capa límite en zona de flujo divergente

P 9.1. Análisis de von Karman para flujo laminar. En el flujo laminar de capa límite sobre una placa plana, la distribución de velocidad en la capa límite, permite obtener el espesor de cantidad de movimiento, a partir del cual se determina la distribución del espesor de la capa límite a lo largo de la placa. Considere las distribuciones de velocidad: a) lineal y b) senoidal,; y para cada una de ellas:

- DETERMINE:
1. Constantes de la distribución de velocidad.
 2. Espesor de cantidad de movimiento.
 3. Tensión de rozamiento en la pared, a partir del espesor de cantidad de movimiento.
 4. Tensión de rozamiento en la pared, para flujo laminar.
 5. Distribución del espesor de la cantidad de movimiento a lo largo de la placa: $\delta = \delta(x)$.
 6. Distribución de la tensión en la pared a lo largo de la placa: $\tau_w = \tau_w(x)$.
 7. Fuerza de arrastre, desde el borde de ataque hasta una posición longitudinal "x".
 8. Coeficientes de fricción y de arrastre: $C_f(x)$, $C_D(x)$.
 9. A partir de los datos numéricos, represente: $\delta = \delta(x)$; $C_D = C_D(Re)$.

DATOS: Flujo: velocidad corriente exterior (constante por flujo sin gradiente de presión) : $U = 1,5$ m/s
 Fluido: aire: densidad: $\rho = 1,2$ kg/m³; viscosidad: $\mu = 0,018$ mPa·s
 Placa: anchura: $b = 600$ mm.

RESOLUCIÓN:

a) DISTRIBUCIÓN DE VELOCIDAD LINEAL: $u = A + B \cdot y$;

1) Las constantes A y B, se determinan a partir de las condiciones de contorno en la capa límite: en una determinada posición longitudinal "x", la velocidad en la placa ($y=0$) es nula ($u=0$); y la velocidad en el borde de la capa límite ($y=\delta$) es la de la corriente exterior ($u=U$):

$$\begin{array}{l} y = 0 \quad (\text{condición de no deslizamiento}) \Rightarrow u = 0 = A + B \cdot 0 \\ y = \delta \quad (\text{borde de la capa límite}) \Rightarrow u = U = A + B \cdot \delta \end{array} \quad \left| \quad A = 0; \quad B = U / \delta \quad \Rightarrow \quad \boxed{u = U \frac{y}{\delta}} \right.$$

2) El espesor de cantidad de movimiento viene definido por: $\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^\delta \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta}\right) dy = \dots = \frac{\delta}{6}$$

3) La tensión de rozamiento en la pared, se puede obtener a partir de la fuerza de arrastre sobre el volumen de control que se tiene entre el plano vertical del borde de ataque ($x=0$), el plano vertical de la posición longitudinal (x), la solera de la placa plana, y la superficie de corriente que pasa por el borde de la capa límite (ver 9.2.): obteniéndose:

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} = \rho U^2 \frac{d(\delta/6)}{dx} = \frac{1}{6} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}$$

4) Para flujo laminar, la tensión de rozamiento viene determinada por la ley de Newton de viscosidad, con lo que en la pared ($y=0$), se tendrá:

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{y=0} = \mu \left(\frac{\partial(Uy/\delta)}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{y=0} = \frac{\mu U}{\delta}$$

5) La distribución del espesor de la capa límite ($\delta(x)$), se obtiene por la igualdad de las expresiones de la tensión en la pared:

$$\tau_w = \frac{1}{6} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} = \frac{\mu U}{\delta} \quad \Rightarrow \quad \delta \cdot d\delta = \frac{6\mu}{\rho U} dx \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta^2}{2} = \frac{6\mu}{\rho U} x + k$$

La capa límite se inicia en el borde de ataque ($x=0$, $\delta=0$; $k=0$); con lo que su espesor es:

$$\boxed{\delta(x) = \sqrt{\frac{12\mu}{\rho U} x}}$$

que se suele expresar como: $\frac{\delta(x)}{x} = \sqrt{\frac{12\mu x}{\rho U x^2}} = \sqrt{\frac{12\mu}{\rho U x}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\rho U x / \mu}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{Re_x}}$

$$\boxed{\frac{\delta(x)}{x} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{Re_x}}}$$

6) Una vez obtenida la distribución del espesor de la capa límite, se puede determinar la tensión en la pared (ver apartado 4):

$$\tau_w = \frac{\mu U}{\delta} = \frac{\mu U}{\sqrt{12\mu x / \rho U}} = \dots = \sqrt{\frac{\rho \mu U^3}{12x}}$$

7) La fuerza de arrastre, se puede obtener a partir de la integración de la fuerza de rozamiento sobre un área mojada elemental $b \cdot dx$:

$$F_D = \int_0^x \tau_w (b \cdot dx) = \int_0^x \sqrt{\frac{\rho \mu U^3}{12x}} (b \cdot dx) = b \sqrt{\frac{\rho \mu U^3}{12}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x}} = b \sqrt{\frac{\rho \mu U^3}{12}} 2\sqrt{x} = b \sqrt{\frac{\rho \mu U^3}{3}} x$$

Aunque, es más inmediato a partir del espesor de cantidad de movimiento (ver apartado de teoría 9.2.):

$$F_D = \rho b U^2 \cdot \theta = \rho b U^2 \cdot \frac{\delta}{6} = \rho b U^2 \cdot \frac{\sqrt{12\mu x / \rho U}}{6} = b \sqrt{\frac{12\mu \rho^2 U^4}{36\rho U}} x = b \sqrt{\frac{\rho \mu U^3}{3}} x$$

8) La adimensionalización de la tensión en la pared y de la fuerza de arrastre, se hace a partir de la presión dinámica de la corriente exterior:

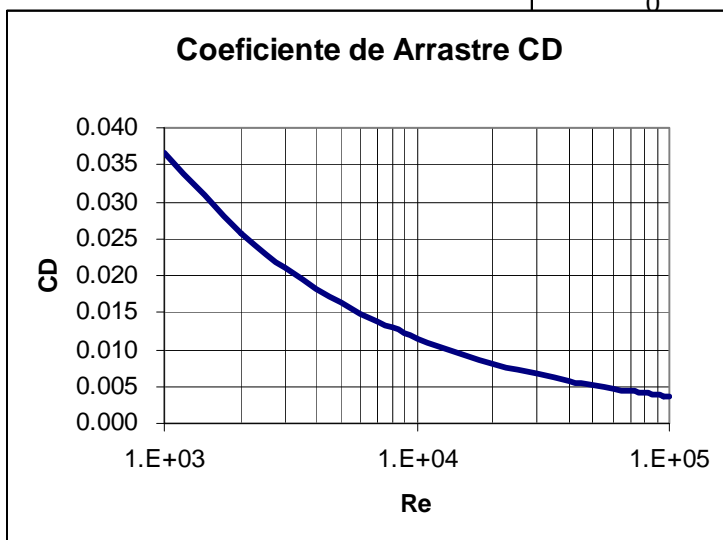
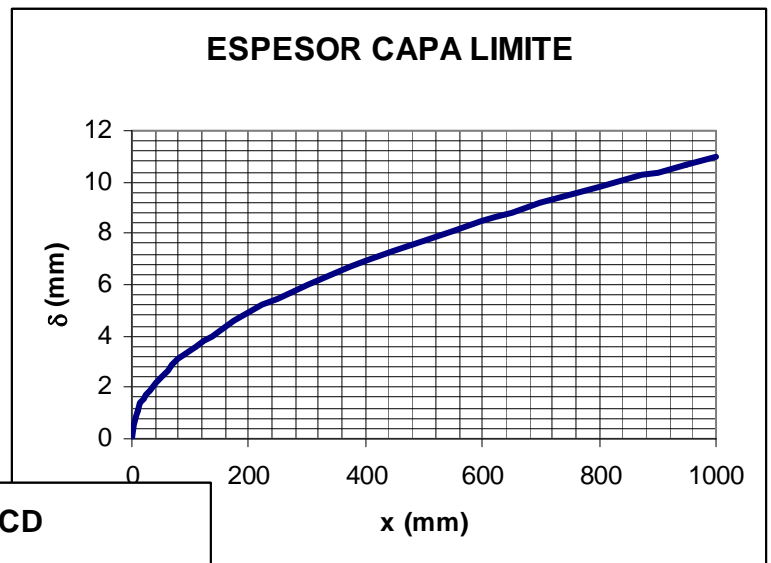
Coefficiente de fricción: $C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{\sqrt{\rho \mu U^3 / 12x}}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \sqrt{\frac{4\rho \mu U^3}{\rho^2 U^4 12x}} = \sqrt{\frac{\mu}{3\rho U x}} = \frac{\sqrt{1/3}}{\sqrt{\rho U x / \mu}} = \frac{0,577}{\sqrt{Re_x}}$

Coefficiente de arrastre: $C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 b x} = \frac{b \sqrt{\rho \mu U^3 x / 3}}{\frac{1}{2}\rho U^2 b x} = \sqrt{\frac{4\rho \mu U^3 x}{3\rho^2 U^4 x^2}} = \sqrt{\frac{4\mu}{3\rho U x}} = \frac{\sqrt{4/3}}{\sqrt{\rho U x / \mu}} = \frac{1,155}{\sqrt{Re_x}}$

9) Con los datos numéricos: $U=1,5$ m/s; $\rho = 1,2$ kg/m³; $\mu = 0,018$ mPa·s; $b = 0,6$ m; las gráficas del espesor de la capa límite y del coeficiente de arrastre son:

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{12\mu}{\rho U}} \sqrt{x} = \sqrt{\frac{12 \cdot 0,018 \cdot 10^{-3}}{1,2 \cdot 1,5}} \sqrt{x}$$

$$\delta(x) = 10,954 \cdot 10^{-3} \sqrt{x}$$



$$Re_x = \frac{\rho U}{\mu} x = \frac{1,2 \cdot 1,5}{0,018 \cdot 10^{-3}} x = 10^5 x$$

$$C_D(x) = \frac{1,155}{\sqrt{Re_x}}$$

b) DISTRIBUCIÓN DE VELOCIDAD SENOIDAL: $u = C \cdot \text{sen}(D \cdot y)$

1) Las constantes C y D, se determinan a partir de las condiciones de contorno en la capa límite: en una determina posición longitudinal "x", la velocidad en la placa ($y=0$) es nula ($u=0$); y la velocidad en el borde de la capa límite ($y=\delta$) es la de la corriente exterior ($u=U$).

La condición de no deslizamiento, no aporta información sobre las constantes: en $y=0$, $u=0=C \cdot \text{sen}(D \cdot 0)$, ya que el paréntesis del seno siempre es nulo, independientemente de los valores de C y D. Por ello es necesario tener una condición de contorno adicional. Esta condición, es que el borde de la capa límite cuando se alcanza la corriente exterior no viscosa, la tensión de rozamiento viscoso debe ser nula; con lo que al ser el flujo laminar, se debe cumplir que sea nulo el gradiente de velocidad, es decir:

$$\tau(y = \delta) = 0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{y=\delta} = \mu \left(\frac{\partial(C \text{sen}(Dy))}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial x} \right)_{y=\delta} = \mu C D \cos(D\delta) \Rightarrow \cos(D\delta) = 0 \Rightarrow D = \frac{\pi}{2\delta}$$

La condición de contorno, de alcanzar la velocidad de la corriente exterior en el borde de la capa límite, permite obtener la constante C:

$$u(x, \delta) = U = C \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2\delta} \delta\right) = C \Rightarrow C = U$$

Con lo que el perfil de velocidades en la capa límite es:

$$u(x, y) = U \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2\delta(x)} y\right)$$

2) El espesor de cantidad de movimiento viene definido por: $\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^\delta \text{sen}\left(\frac{\pi}{2\delta} y\right) \left(1 - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2\delta} y\right)\right) dy = \dots = \frac{4 - \pi}{2\pi} \delta$$

3) La tensión de rozamiento en la pared, se puede obtener a partir de la fuerza de arrastre sobre el volumen de control que se tiene entre el plano vertical del borde de ataque ($x=0$), el plano vertical de la posición longitudinal (x), la solera de la placa plana, y la superficie de corriente que pasa por el borde de la capa límite (ver 9.2): obteniéndose:

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} = \rho U^2 \frac{d\left(\frac{4 - \pi}{2\pi} \delta\right)}{dx} = \frac{4 - \pi}{2\pi} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}$$

4) Para flujo laminar, la tensión de rozamiento viene determinada por la ley de Newton de viscosidad, con lo que en la pared ($y=0$), se tendrá:

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{y=0} = \mu \left(\frac{\partial(U \text{sen}(\pi y / 2\delta))}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial x} \right)_{y=0} = \mu U \frac{\pi}{2\delta} \cos\left(\frac{\pi}{2\delta} 0\right) = \mu U \frac{\pi}{2\delta}$$

5) La distribución del espesor de la capa límite ($\delta(x)$), se obtiene por la igualdad de las expresiones de la tensión en la pared:

$$\tau_w = \frac{4 - \pi}{2\pi} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} = \frac{\pi}{2} \frac{\mu U}{\delta} \Rightarrow \delta \cdot d\delta = \frac{\pi^2}{4 - \pi} \frac{\mu}{\rho U} dx \Rightarrow \frac{\delta^2}{2} = \frac{\pi^2}{4 - \pi} \frac{\mu}{\rho U} x + k$$

La capa límite se inicia en el borde de ataque ($x=0$, $\delta=0$; $k=0$); quedando:

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{(2\pi^2 / (4 - \pi)) \mu}{\rho U} x}$$

que se suele expresar como: $\frac{\delta(x)}{x} = \sqrt{\frac{22,995\mu x}{\rho U x^2}} = \sqrt{\frac{22,995\mu}{\rho U x}} = \frac{4,795}{\sqrt{\rho U x / \mu}} = \frac{4,795}{\sqrt{Re_x}}$

$$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{4,795}{\sqrt{Re_x}}$$

6) Una vez obtenida la distribución del espesor de la capa límite, se puede determinar la tensión en la pared (ver apartado 4):

$$\tau_w = \mu U \frac{\pi}{2\delta} = \frac{\mu U \pi}{2 \cdot 4,795 \sqrt{\mu x / \rho U}} = \dots = \sqrt{\frac{\rho \mu U^3}{91,981 x}}$$

7) La fuerza de arrastre, se puede obtener a partir del espesor de cantidad de movimiento (ver apartado 9.2.):

$$F_D = \rho b U^2 \cdot \theta = \rho b U^2 \cdot \frac{4-\pi}{2\pi} \delta = \rho b U^2 \cdot \frac{4-\pi}{2\pi} \sqrt{\frac{(2\pi^2 / (4-\pi)) \mu x}{\rho U}} = \dots = b \sqrt{\frac{\rho \mu U^3}{2/(4-\pi)}} x = 0,655 b \sqrt{\rho \mu U^3 x}$$

8) La adimensionalización de la tensión en la pared y de la fuerza de arrastre, se hace a partir de la presión dinámica de la corriente exterior:

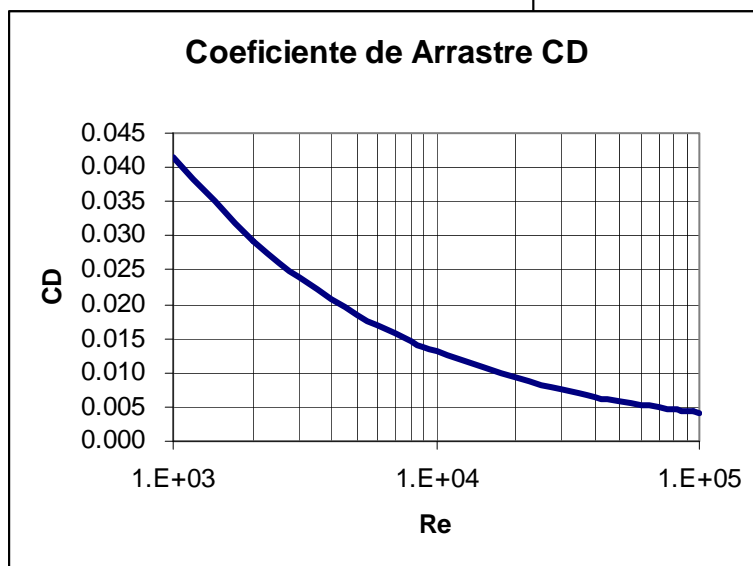
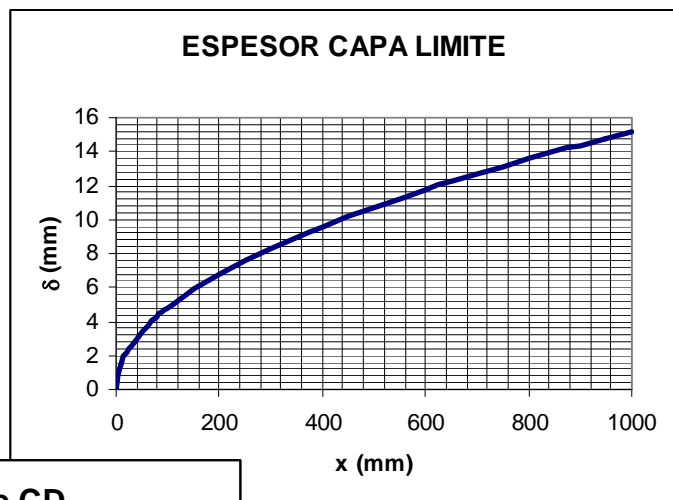
$$\text{Coeficiente de fricción: } C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{\sqrt{\rho \mu U^3 / 91,981 x}}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \dots = \frac{0,209}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\text{Coeficiente de arrastre: } C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho U^2 b x} = \frac{0,655 b \sqrt{\rho \mu U^3 x}}{\frac{1}{2} \rho U^2 b x} = \dots = \frac{1,310}{\sqrt{Re_x}}$$

9) Con los datos numéricos: $U=1,5$ m/s; $\rho = 1,2$ kg/m³; $\mu = 0,018$ mPa·s; $b = 0,6$ m; las gráficas del espesor de la capa límite y del coeficiente de arrastre son:

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{22,995 \mu}{\rho U}} \sqrt{x} = \sqrt{\frac{22,995 \cdot 0,018 \cdot 10^{-3}}{1,2 \cdot 1,5}} \sqrt{x}$$

$$\delta(x) = 15,164 \cdot 10^{-3} \sqrt{x}$$



$$Re_x = \frac{\rho U}{\mu} x = \frac{1,2 \cdot 1,5}{0,018 \cdot 10^{-3}} x = 10^5 x$$

$$C_D(x) = \frac{1,310}{\sqrt{Re_x}}$$

P 9.2. Análisis de Prandtl para flujo turbulento. En el flujo turbulento de capa límite sobre una placa plana, la distribución de velocidad en la capa límite, se puede asimilar a la ley logarítmica que se tiene en flujo turbulento en conductos: $u=u^*(A \cdot \ln(u^*y/v)+B)$. A partir de esta hipótesis, Prandtl obtuvo una expresión implícita para el coeficiente de fricción en función del número de Reynolds asociado al espesor de la capa límite.

DETERMINE: 1. A partir de la velocidad de fricción (u^*), la ecuación $f(C_f, Re_\delta)=0$
 2. Ajuste a la función anterior, la función potencial: $C_f = a \cdot (Re_\delta)^b$.

DATOS: Ley logarítmica de la capa límite turbulenta: velocidad de fricción: $u^* = \sqrt{\tau_w / \rho}$
 $A=1/\kappa$; constante de Karman: $\kappa = 0,41$, $B = 5,0$
 Número de Reynolds, en el borde de la capa límite: $Re_\delta = U\delta/v$
 Coeficiente de fricción: $C_f = \tau_w / (1/2\rho U^2)$

RESOLUCIÓN:

1) La velocidad de fricción, se puede expresar en función del coeficiente de fricción:

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \sqrt{\frac{C_f \cdot \frac{1}{2} \rho U^2}{\rho}} = U \sqrt{C_f / 2}$$

En el borde de la capa límite: $y=\delta, u=U$, con estos valores en la distribución logarítmica de velocidad.

$$U = u^* \left(A \cdot \ln \frac{u^* \delta}{v} + B \right)$$

Expresando la velocidad de fricción, en función del coeficiente de fricción, se tiene:

$$U = \left(U \sqrt{C_f / 2} \right) \left(A \cdot \ln \left(\frac{U \sqrt{C_f / 2} \delta}{v} \right) + B \right) \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{C_f}} = A \cdot \ln \left(\frac{U \sqrt{C_f / 2} \delta}{v} \right) + B$$

En el numerador del neperiano, se tiene el número de Reynolds, asociado al borde de la capa límite: $Re_\delta = \frac{U\delta}{v}$

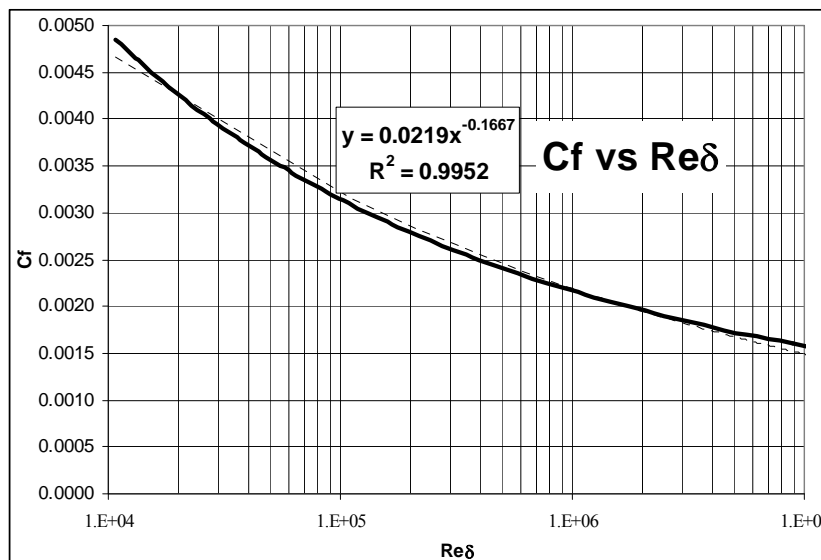
Con lo que se tiene la ecuación implícita: $\sqrt{\frac{2}{C_f}} = A \cdot \ln(Re_\delta \sqrt{C_f / 2}) + B$

La constante A es la inversa de la constante de Karman: $A = 1/\kappa = 1/0,41 = 2,44$; quedando:

$$f(C_f, Re_\delta) = \sqrt{\frac{2}{C_f}} - 2,44 \cdot \ln(Re_\delta \sqrt{C_f / 2}) + 5 = 0$$

2) A partir de la ecuación anterior se puede despejar el Re_δ : $Re_\delta = \sqrt{\frac{2}{C_f}} \cdot e^{\frac{\sqrt{2/C_f} - 5}{2,44}}$

Dando valores al coeficiente de fricción, se puede obtener el correspondiente número de Reynolds. La



representación de C_f vs Re_δ , permite obtener una curva, a la que se le ajusta una función potencial: $C_f = a \cdot (Re_\delta)^b$. En el intervalo: $10^4 < Re_\delta < 10^7$, la función potencial de ajuste da: $C_f = 0.0219(Re_\delta)^{-0.1667}$, con un coeficiente de correlación del 99,76%. El exponente, es prácticamente $-1/6$, quedando la ecuación de Prandtl, para el coeficiente de fricción en capa límite turbulenta:

$$C_f = 0.02 \cdot (Re_\delta)^{-1/6}$$

P 9.3. Espesor de desplazamiento y líneas de corriente en flujo turbulento. Considere el flujo turbulento sobre una placa plana, desde la posición longitudinal con $Re_x=10^6$, a la posición longitudinal $Re_x=10^7$. Por esta última posición, pasa una línea de corriente tocando el borde de la capa límite; aguas arriba, se puede obtener la altura de esa línea de corriente a partir del espesor de desplazamiento.

DETERMINE: 1. La ecuación del espesor de desplazamiento: $\delta^* = \delta^*(x)$
 2. La relación entre la altura de la línea de corriente y los espesores de desplazamiento.
 3. A partir de los datos numéricos, la capa límite, el espesor de desplazamiento y la línea de corriente, entre las dos secciones (sección 1: $Re=10^6$; sección 2: $Re=10^7$)

DATOS: Flujo en capa límite turbulenta: perfil de velocidades de Prandtl: $u = U(y/\delta)^{1/7}$

$$\text{Espesor capa límite: } \frac{\delta}{x} = \frac{0,16}{(Re_x)^{1/7}}$$

Fluido: agua: densidad: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$; viscosidad absoluta: $\mu = 1 \text{ mPa}\cdot\text{s}$
 Velocidad de la corriente exterior: $U = 10 \text{ m/s}$

1). El espesor de desplazamiento, viene definido por: $\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$

En flujo turbulento, el perfil de velocidades viene dado por la ley potencial de Prandtl, $u = U(y/\delta)^{1/7}$

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right) dy = \int_0^\delta dy - \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} dy = \delta - \frac{1}{\delta^{1/7}} \frac{1}{1/7+1} \delta^{1/7+1} = \delta - \frac{7}{8} \delta = \frac{\delta}{8}$$

La distribución del espesor de la capa límite para flujo turbulento (ver punto de teoría 9.2.3.) es:

$$\delta = \frac{0,16 \cdot x}{(\rho U x / \mu)^{1/7}} = \dots = \frac{0,16}{(\rho U / \mu)^{1/7}} x^{6/7}$$

Con lo que el espesor de desplazamiento es: $\delta^* = \frac{\delta}{8} = \frac{0,16/8}{(\rho U / \mu)^{1/7}} x^{6/7} = \frac{0,02}{(\rho U / \mu)^{1/7}} x^{6/7}$

2) En una determinada sección (entre la 1 y la 2), la línea de corriente que pasa por el borde de la capa límite en la sección 2, tendrá una altura $h(x)$ de tal forma que el caudal que pase por la sección (desde $y=0$ a $y=h$), sea el caudal que pasa por la sección 2 (desde $y=0$ a $y=\delta_2$):

$$U \cdot (h - \delta) + \int_0^\delta u dy = \int_0^{\delta_2} u dy \quad \Rightarrow \quad h = \delta + \int_0^{\delta_2} \frac{u}{U} dy - \int_0^\delta \frac{u}{U} dy$$

Las integrales, se pueden expresar en función del espesor de desplazamiento: $\int_0^\delta \frac{u}{U} dy = \delta - \delta^*$

Con lo que la altura de la línea de corriente es: $h = \delta + (\delta_2 - \delta_2^*) - (\delta - \delta^*)$ $h(x) = (\delta_2 - \delta_2^*) + \delta^*(x)$

3) Las ecuaciones del espesor de la capa límite, el de desplazamiento y la altura de la línea de corriente son:

$$\delta = \frac{0,16}{(\rho U / \mu)^{1/7}} x^{6/7} = \frac{0,16}{(1000 \cdot 10 / 10^{-3})^{1/7}} x^{6/7} = 0,016 \cdot x^{6/7} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta = 0,016 \cdot x^{6/7}} \quad \boxed{\delta^* = \frac{\delta}{8} = 0,002 \cdot x^{6/7}}$$

$$h = (0,016 \cdot x_2^{6/7} - 0,002 \cdot x_2^{6/7}) + 0,002 \cdot x^{6/7} \quad x_2 = \frac{Re_2 \mu}{\rho U} = \frac{10^7 \cdot 10^{-3}}{1000 \cdot 10} = 1 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = 0,014 + 0,002 \cdot x^{6/7}}$$

