UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

PROYECTO FINAL DE CARRERA

CALCULO DEL FLUJO POTENCIAL COMPRESIBLE ALREDEDOR DE PERFILES AERODINÁMICOS

Alumno: María Virgil Naranjo NIA: 100049242
Tutor: Immaculada Iglesias Estradé
Titulación: Ingeniería Industrial

A mi padre, mi madre y mi hermano,
por darme todo su apoyo y confianza.

A mi abuela y a los que no se encuentran entre nosotros,
siempre os llevaré en mi memoria.

A Jesús,
por estar siempre ahí en los momentos que más lo necesitaba.

A Julia y Carlos,
por confiar siempre en mí, nunca os olvidaré.

A mi tutora Immaculada Iglesias
por su apoyo y dedicación.

CONTENIDO

Contenido II

Nomenglatura V

Resumen VII

Relación de Figuras y Tablas VIII

Introducción XI

CAPÍTULO 1: GENERACIÓN DEL MALLADO

1.1 Definición y caracterización de los perfiles aerodinámicos 1

1.1.1 Terminología de un perfil aerodinámico 2

1.1.2 Clasificación de los perfiles aerodinámicos 3

1.2 Método numérico del cálculo del mallado 6

1.2.1 Condición interior Γ_1 12

1.2.2 Condición exterior Γ_2 12

1.2.3 Condición frontera Γ_3 y Γ_4 12

1.3 Resultados 13

CAPÍTULO 2: FLUJO POTENCIAL

2.1 Introducción 17

2.2 Hipótesis previas 18

2.2 Potencial de velocidades y función de corriente 20

2.4 Teoría del flujo potencial 22

2.4.1 Adimensionalización 23

2.4.2 Transformación de las coordenadas 24

2.5 Condiciones de contorno 26

2.5.1 Frontera interior 27

2.5.2 Frontera exterior 27
2.5.3 Circulación y condición de Kutta 28

CAPÍTULO 3: COEFICIENTES AERODINÁMICOS

3.1 Introducción 33
3.2 Distribución de presiones 34
3.3 Efecto de la compresibilidad 37
3.4 Fuerza resultante sobre un perfil 39
3.4.1 Resistencia 40
3.4.2 Sustantación 43
3.4.3 Coeficientes de sustantación y resistencia 45
3.5 Cálculo de los coeficientes aerodinámicos 48

CAPÍTULO 4: MÉTODO DE CÁLCULO

4.1 Introducción 49
4.2 Cálculo del mallado 51
4.3 Flujo potencial 52
4.3.1 Ecuación potencial 53
4.3.2 Condiciones de contorno 59
4.3.3 Circulación del perfil: determinación de Γ 59
4.4 Cálculo de velocidades y líneas de corriente 60
4.4.1 Frontera exterior 61
4.4.2 Frontera interior 62
4.5 Método de cálculo 62

CAPÍTULO 5: DESARROLLO DEL PROGRAMA

5.1 Diagrama de flujo del programa 64
5.2 Algoritmos para el programa de cómputo 67
5.2.1 Algoritmo de la función programa 67

5.2.2 Algoritmo del perfil 68
5.2.3 Algoritmo de la malla 68
5.2.4 Algoritmo de la función potencial 69
5.2.5 Algoritmo del campo de velocidades 71
5.2.6 Algoritmo de la función de corriente 71
5.2.7 Algoritmo de la líneas isóbaras 72
5.2.8 Algoritmo de los coeficientes aerodinámicos 73

CAPÍTULO 6: RESULTADOS

6.1 Estudio del perfil NACA 0012 74
6.2 Estudio del perfil NACA 2412 80
6.3 Analisis de la influencia del ángulo de ataque 84
6.4 Análisis de la influencia del número de Mach 87

CONCLUSIONES 92
TRABAJOS FUTUROS 94

REFERENCIAS 95

ANEXO 1: Código de la programación 97

ANEXO 2: Transformación de las ecuaciones 111

ANEXO 3: Gráficos para la comprobación de resultados 114

NOMENCLATURA

a_k	Coeficiente regulador de la atracción/repulsión de una línea coordenada
b_l	Coeficiente regulador de la atracción/repulsión de un punto
c	Cuerda del perfil
C_D	Coeficiente de resistencia
C_L	Coeficiente de sustentación
c_k	Coeficiente regulador de la extensión de aplicación de la atracción/repulsión para una línea
C_p	Coeficiente de presión
c_p	Capacidad calorífica a presión constante
D	Resistencia del perfil
d_l	Coeficiente regulador de la extensión de aplicación de la atracción/repulsión para un punto
F	Fuerza aerodinámica
g^{11}, g^{12} g^{22}, g^{21}	Tensor métrico de elementos en la transformación directa
g_{11}, g_{12} g_{22}, g_{21}	Tensor métrico de elementos en la transformación indirecta
h	Envergadura del perfil
H/H_0	Entalpía / Entalpía de remanso
J	Jacobiano
L	Sustentación del perfil
n	Número de iteración
$N \times M$	Densidad de la malla. N puntos en la dirección ξ y M puntos en la dirección η
M	Número de Mach
p	Presión
Re	Número de Reynolds
R_g	Constante universal de los gases ideales
r_u	Rugosidad de la superficie
t	Espesor máximo del perfil/Tiempo
T	Temperatura
V_∞	Velocidad de la corriente
(u,v)	Componentes de la velocidad en coordenadas cartesianas
(U,V)	Contravariantes de la velocidad en coordenadas curvilíneas
x_s	Distancia a lo largo de la cuerda
x_c	Abscisa de la línea media
x_L	Abscisa del lado de presión o intradós
x_U	Abscisa del lado de succión o extradós
y	Distancia perpendicular a la cuerda
y_c	Ordenada de la línea media
y_L	Ordenada del lado de presión o intradós

y_t	Ordenada de la distribución de espesor simétrica
y_U	Ordenada del lado de succión o extradós

Símbolos griegos

α	Ángulo de ataque del perfil
ϕ	Función potencial
γ	Coeficiente adiabático del aire
ξ, η	Coordenadas curvilíneas
$\Delta\xi, \Delta\eta$	Incrementos de la malla en las direcciones ξ y η
θ	Posición angular de los nodos
μ	Viscosidad dinámica
ρ	Densidad del aire
ψ	Función de corriente
ω	Factor de relajación
τ	Esfuerzo cortante
Γ	Circulación del perfil
ζ	Vorticidad

Notas:

- El subíndice '0' corresponde a los valores de las variables en el punto de remanso
- El subíndice '∞' corresponde a los valores de las variables en la frontera exterior lejos del perfil aerodinámico
- Se ha empleado la notación $x_\xi, y_{\eta\eta}...$ para indicar las derivadas $\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}...$

RESUMEN

El objetivo de este proyecto es el desarrollo de un programa mediante MATLAB que permita calcular el flujo alrededor de una superficie aerodinámica. Permite calcular mediante las coordenadas *(x,y)* de la superficie alar y el ángulo de ataque de la corriente incidente, la distribución de velocidades, las líneas isóbaras y las fuerzas de sustentación y resistencia características del perfil.

En el desarrollo del programa se han tenido en cuenta las posibles variaciones de densidad del fluido por lo que se ha desarrollado un modelo de flujo potencial compresible a altos números de Reynolds en el cual los esfuerzos cortantes debidos a la viscosidad se consideran despreciables.

Para ello se resuelve la ecuación de Laplace para el potencial de velocidad en un sistema de coordenadas adaptado a la geometría del perfil. A partir del potencial de velocidades se realiza el cálculo de las componentes de la velocidad en coordenadas cartesianas y las líneas de corriente. Teniendo en cuenta la ecuación de Bernoulli y las ecuaciones de gas isentrópico se obtiene el coeficiente de presión alrededor del perfil y las fuerzas de sustentación y resistencia.

La comparación de los resultados obtenidos se realiza mediante del libro 'Theory of wing sections' donde se incluye un anexo con datos experimentales de los coeficientes aerodinámicos para diferentes perfiles.

RELACIÓN DE FIGURAS Y TABLAS

Relación de imágenes

Figura 1.1.1 *Nomenglatura del perfil* 2

Figura 1.1.2 *Construcción geométrica del perfil NACA* 4

Figura 1.2.1 *Perfil alar en una malla rectangular. Referencia [2]* 6

Figura 1.2.2 *Sistema de coordenadas del perfil en (a): Plano físico (b): Plano computacional. Referencia [2]* 7

Figura 1.2.3 *Esquema de las condiciones de contorno en (a): Plano físico (b): Plano computacional. Referencia [2]* 11

Figura 1.2.4 *Ejemplo de la disposición de los nodos* 13

Figura 1.3.1 *Superficie del perfil NACA 2412* 13

Figura 1.3.21 *Superficie del perfil NACA 0006* 14

Figura 1.3.3 *Superficie del perfil NACA 0012* 14

Figura 1.3.2 *Mallado del perfil (a): general* 14

Figura 1.3.3 *Mallado del perfil (b): superficie del perfil* 15

Figura 1.3.4 *Mallado del perfil (c): borde de salida* 16

Figura 2.2.1 *Esquema de un perfil aerodinámico* 20

Figura 2.5.1 *Flujo alrededor de una superficie curva. Referencia [6]* 28

Figura 2.5.2 *Fluido ideal (sin viscosidad) alrededor de un perfil. Referencia [9]* 27

Figura 2.5.3 *Fluido real (con viscosidad) alrededor de un perfil con la corriente desprendida dando lugar a un torbellino con circulación* Γ *. Referencia [9]* 28

Figura 2.5.4 *Fluido real (con viscosidad) alrededor de un perfil que por reacción crea una corriente igual a* Γ *y de sentido contrario. Referencia [9]* 29

Figura 2.5.5 *Flujo alrededor de un perfil aerodinámico en estado estacionario. Referencia [9]* 29

Figura 2.5.6 *Condición de Kutta para el cálculo de la circulación* 31

Figura 2.5.7 *Posición de los puntos de remanso según el valor de la circulación* 32

Figura 3.1.1 *Esquema de las fuerzas de sustentación y resistencia* *33*

Figura 3.1.2 *Perfiles aerodinámicos bidimensionales (a): Simétrico (b): Curvado. Referencia [3]* *34*

Figura 3.3.1 *Flujo subsónico alrededor de un perfil* *37*

Figura 3.3.2 *transónico alrededor de un perfil* *38*

Figura 3.4.1 *Distribución de presiones y esfuerzos cortantes sobre un perfil aerodinámico. Referencia [3]* *39*

Figura 3.4.2 *Geometría de las fuerzas elementales sobre un perfil aerodinámico. Referencia [3]* *40*

Figura 3.4.3 *Estela formada por un flujo alrededor de un perfil aerodinámico con la capa límite adherida* *41*

Figura 3.4.4 *Perfil en pérdida con un ángulo de ataque grande. La capa límite se separa cerca de la superficie frontal* *43*

Figura 3.4.5 *Distribución de presiones de un perfil alar simétrico* *44*

Figura 3.4.6 *Distribución de presiones de un perfil alar no simétrico* *44*

Figura 3.4.7 *Distribución de las áreas frontal y proyectada. Referencia [3]* *46*

Figura 4.1.1 *Esquema del método de resolución del problema* *48*

Figura 4.3.1 *Esquema del mallado escalonado* *53*

Figura 4.3.2 *Nodos empleados en el cálculo de la velocidad* *54*

Figura 4.3.3 *Nodos empleados en el cálculo de los parámetros necesarios en el cálculo de la densidad* *58*

Figura 5.1.1 *Diagrama de flujo del programa* *66*

Figura 6.1.1 *Líneas equipotenciales NACA 0012* *75*

Figura 6.1.2 *Líneas de corriente NACA 0012* *76*

Figura 6.1.3 *Líneas isóbaras NACA 0012 (a)* *76*

Figura 6.1.4 *Líneas isóbaras NACA 0012 (b)* *77*

Figura 6.1.5 *Contornos de Mach NACA 0012 (a)* *78*

Figura 6.1.6 *Contornos de Mach NACA 0012 (b)* *78*

Figura 6.1.7 *Presión ejercida sobre la superficie NACA 0012* *79*

Figura 6.2.1 *Líneas equipotenciales NACA 2412* *80*

Figura 6.2.2 *Líneas de corriente NACA 2412* *81*

Figura 6.2.3 *Líneas isóbaras NACA 2412 (a)* *81*

Figura 6.2.4 *Líneas isóbaras NACA 2412 (b)* *82*

Figura 6.2.5 *Contornos de Mach NACA 2412 (a)* *82*

Figura 6.2.6 *Contornos de Mach NACA 2412 (b)* *83*

Figura 6.2.7 *Presión ejercida sobre la superficie NACA 2412* *83*

Relación de tablas

Tabla 4.1.1 *Aproximaciones en diferencias finitas de segundo orden. Los subíndices (i,j) indican la posición espacial dentro de la malla, con* Δx *la distancia entre dos nodos según la coordenada x* *51*

Tabla 4.3.1 *Variaciones de las coordenadas cartesianas respeto de las arbitrarias necesarias para la transformación de las ecuaciones* *57*

Tabla 5.2.1 *Algoritmo de la función programa* *67*

Tabla 5.2.2 *Algoritmo de la función perfil* *68*

Tabla 5.2.3 *Algoritmo de la función malla* *69*

Tabla 5.2.4 *Algoritmo de la función potencial* *70*

Tabla 5.2.5 *Algoritmo de la función velocidad* *71*

Tabla 5.2.6 *Algoritmo de la función presiones* *71*

Tabla 5.2.7 *Algoritmo de la función corriente* *72*

Tabla 5.2.8 *Algoritmo de la función coeficientes* *73*

Tabla 6.1.1 *Condiciones para el estudio del perfil NACA 0012* *74*

Tabla 6.1.2 *Resultados obtenidos en el estudio del perfil NACA 0012* *79*

Tabla 6.2.1 *Condiciones para el estudio del perfil NACA 2412* *80*

Tabla 6.2.2 *Resultados obtenidos en el estudio del perfil NACA 2412* *83*

Tabla 6.3.1 *Influencia del ángulo de ataque en diferentes perfiles* 84

Tabla 6.4.1 *Coeficientes aerodinámicos y circulación para* $\alpha = 2^o, 4^o, 6^o, 8^o$ *y distintas velocidades* *87*

INTRODUCCIÓN

El estudio de los flujos externos es de particular importancia para el ingeniero aeronáutico en el análisis del flujo de aire alrededor de los diversos componentes de una aeronave. En realidad, gran parte del conocimiento actual de los flujos externos ha sido obtenido en estudios motivados por tales problemas aerodinámicos. Existe, sin embargo, un interés sustancial por parte de otros ingenieros en flujos externos: el flujo alrededor de las aspas de una turbina, automóviles, edificios,…

Es difícil determinar el campo de flujo externo de un cuerpo y la distribución de la presión en la superficie, incluso en la geometría más simple. Para analizar este tema, tenemos que tener diferenciar los flujos con número de Reynolds bajo (Re<5 aprox.) y flujos con número de Reynolds alto (Re>1000). Los flujos con número de Reynolds bajo rara vez ocurren en aplicaciones de ingeniería (flujo alrededor de gotas de rocío y glóbulos rojos de la sangre, flujo en medios porosos) y no se presentarán en este proyecto. Vamos a dirigir nuestra atención a los flujos con Reynolds elevado.

El perfil aerodinámico que vamos a estudiar a lo largo del proyecto se encontrará funcionando a números de Reynolds muy altos y con ángulos de ataque moderados. De esta forma dispondrá de una fina capa límite adherida en todo su contorno sin producirse ninguna separación de manera que permitirá aplicar la teoría de flujo potencial.

El problema se calculará en un sistema de coordenadas adaptado a la superficie del perfil el cual se generará numéricamente en el capítulo 1. Una vez determinado el mallado, el flujo se calculará resolviendo la ecuación de Laplace para el potencial de velocidades. Su desarrollo se encuentra en el capítulo 2 junto con la teoría de la función de corriente y el cálculo de las velocidades.

Como ya veremos en el capítulo 3, alrededor del perfil se genera una circulación del campo de velocidades y se van a se desarrollar dos tipos de fuerzas: una sustentadora en dirección perpendicular a la corriente fluida denominada sustentación, y otra paralela a la corriente denominada resistencia.

La programación de las ecuaciones se desarrollará en MATLAB pero como gran parte de ellas presentan derivadas parciales, será necesario un método de discretización. Todas las discretizaciones necesarias de los capítulos anteriores se encuentran reflejadas en el capítulo 4.

En el capítulo 5 se explica paso a paso el desarrollo empleado en la programación de cada una de las funciones y los resultados obtenidos se comentarán en el último capítulo.

CAPÍTULO 1:

GENERACIÓN DEL MALLADO

El presente capítulo consta de una definición y caracterización de los perfiles aerodinámicos que nos permitirá definir la superficie del perfil alar y las ecuaciones necesarias a partir de las cuales obtendremos una malla curvilínea tipo O en coordenadas arbitrarias, adaptada a la superficie del perfil aerodinámico.

1.1 Definición y caracterización de los perfiles aerodinámicos

Para comenzar a hablar acerca del presente tema es preciso realizar una breve introducción a los perfiles aerodinámicos para poder comprender el significado de los términos que utilizaremos en la determinación de la forma del perfil. Un perfil alar corresponde a una sección del ala diseñada para obtener mejores características aerodinámicas. Permite generar una fuerza de sustentación debido a las diferencias de presión que actúan en el extradós (parte superior del ala) y en el intradós (parte inferior del ala), y que se debe a la diferente longitud del camino recorrido por las moléculas del aire sobre dichas superficies. La longitud del extradós, al ser curvo, es mayor que la longitud del intradós produciéndose así una presión mayor la cual genera una fuerza sustentadora.

Las características geométricas que describen el perfil expuestas a continuación corresponden con la nomenclatura establecida por la NACA pues muchos de estos perfiles son comúnmente utilizados en la actualidad.

1.1.1 Terminología de un perfil aerodinámico

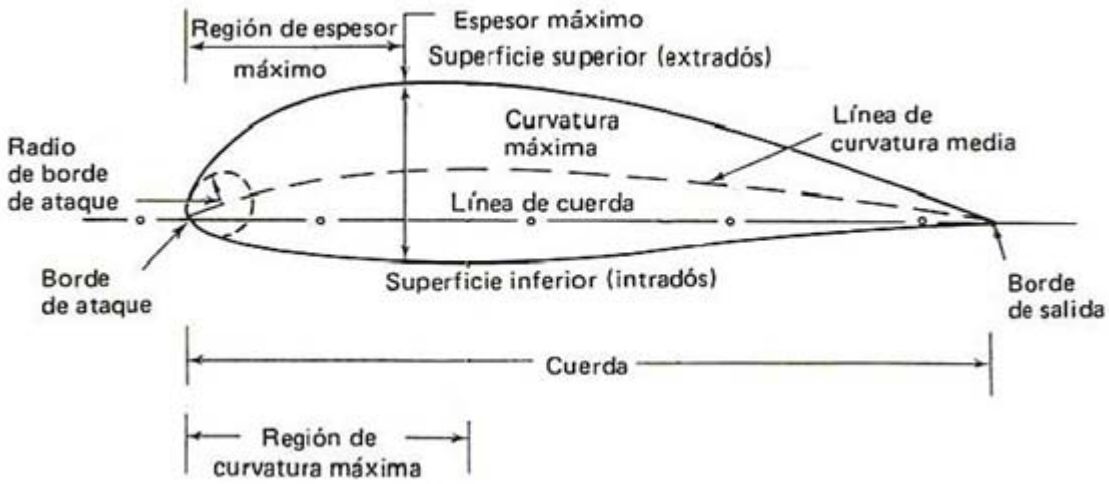


Figura 1.1.1 *Nomenclatura del perfil*

- *Borde de ataque:* borde delantero del perfil (B.A).
- *Borde de salida:* borde trasero del perfil (B.S).
- *Cuerda:* línea recta que une el borde de ataque con el borde de salida. Es una dimensión característica del perfil.
- *Línea de curvatura media:* lugar geométrico de los puntos que equidistan de la curva que define el extradós y el intradós. Esta línea fija la curvatura del perfil. Si la línea de curvatura media queda sobre la cuerda geométrica (como en la figura 1.1) se dice que la curvatura es positiva, si es por debajo, negativa, y de doble curvatura si un tramo va por encima y otro por debajo.
- *Curvatura máxima:* es la máxima distancia entre la línea de curvatura media y la cuerda del perfil. Este valor y su posición a lo largo de la cuerda ayudan a definir la forma de la línea de curvatura media. El valor de la ordenada máxima y su posición suelen darse en forma de % sobre la cuerda.
- *Espesor máximo*: es la máxima distancia entre el lado de succión y el lado de presión, medida perpendicularmente a la cuerda. El valor máximo y su posición

se expresan en % de la cuerda. El valor del espesor varía desde un 3% en los muy delgados hasta un 18% en los muy gruesos.

- *Radio de curvatura del borde de ataque:* radio del círculo tangente a las curvas de intradós y extradós y con su centro situado en la línea tangente en el origen a la línea de curvatura media.

  Su magnitud define la agudeza del borde de ataque y tiene efectos importantes en las características de pérdida. Un radio de curvatura del borde de ataque pequeño significa un borde de ataque agudo que puede causar una separación temprana de la capa límite cerca del borde de ataque.

- *Ángulo de ataque:* ángulo que forma la velocidad de la corriente incidente con la cuerda geométrica.

1.1.2 Clasificación de los perfiles aerodinámicos

La NACA (National Advisory Comimitee for Aeronautics), llevó a cabo investigaciones sistemáticas de diferentes perfiles, y los clasificó en familias, son los conocidos perfiles NACA.

Existen otro tipo de perfiles como los de la serie NASA (antecesora a la NACA), Göttinger, Clark, etc. que incluyen en su nomenclatura, no solo características geométricas sino también su comportamiento aerodinámico.

Dentro de los perfiles NACA se encuentran la serie de 4 dígitos, 5 dígitos y las modificadas de 4 y 5 dígitos que fueron generadas usando ecuaciones analíticas que describen la curvatura de la línea media del perfil así como la distribución de su espesor a lo largo de la longitud del perfil. Existen otras familias posteriores que utilizan otras formas más complicadas que permiten diseñar perfiles a partir de unas condiciones de sustentación deseadas.

En este caso se ha elegido un perfil NACA de 4 cifras. El primer dígito expresa la curvatura máxima *(m)*, expresada en porcentaje de la cuerda, el segundo multiplicado por 10 expresa la posición de la curvatura máxima *(p)* en porcentaje de la cuerda y medida a partir del borde de ataque y las dos últimas cifras expresan el espesor máximo *(t)* del perfil en porcentaje de la cuerda. Por ejemplo, para el caso expuesto en el programa del

Anexo se ha utilizado un perfil NACA 1210 que tiene por espesor máximo un 10% de la cuerda, con una curvatura máxima del 1% y localizada un 20% por detrás del borde de ataque del perfil. Con estos valores de *m*, *p* y *t* podemos determinar las coordenadas *(x,y)* del perfil alar utilizando las ecuaciones mostradas a continuación:

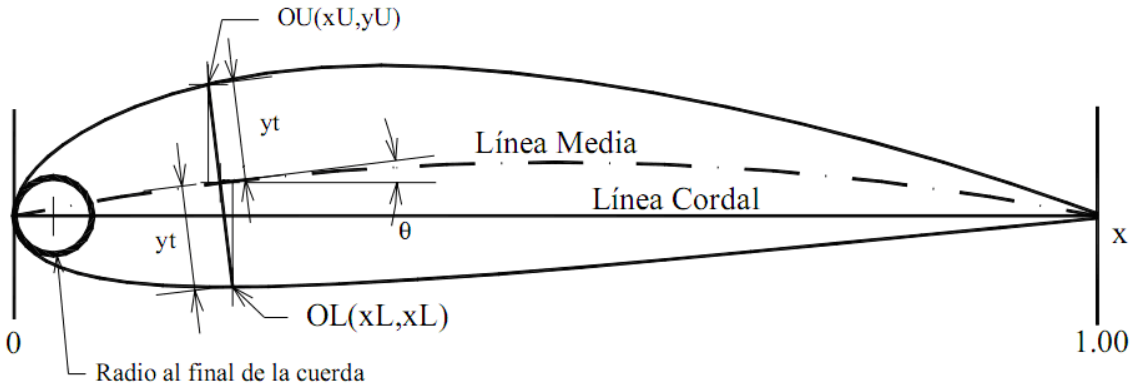


Figura 1.1.2 *Construcción geométrica del perfil NACA*

1. Elegir valores de *x* desde 0 hasta la cuerda máxima *c*. Por sencillez vamos a utilizar valores entre 0 y 1 y una vez obtenidas las coordenadas *(x,y)* utilizaremos el valor de la cuerda para escalarlas. Como la forma del perfil es redondeada en el borde de ataque y afilada en el borde de salida se aplica la ecuación siguiente para obtener una distribución de puntos regular sobre la superficie.

$$x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(180 \cdot \vartheta)\right) \text{ con } 0 < \vartheta < 1$$

2. Calcular las coordenadas de la línea de curvatura media introduciendo los valores de *m* y *p* dentro de las siguientes ecuaciones

$$y_c = \frac{m}{p^2}\left(2px - x^2\right) \quad \text{desde } x = 0 \quad \text{hasta } x = p \qquad (1.1)$$

$$y_c = \frac{m}{(1-p)^2}\left[(1-2p) + 2px - x^2\right] \quad \text{desde } x = p \quad \text{hasta } x = 0 \qquad (1.2)$$

3. Calcular la distribución de espesores por encima y por debajo de la línea media introduciendo el valor de t dentro de la siguiente ecuación.

$$\pm y_t = \frac{t}{0.2}\left(0.2969\sqrt{x} - 0.1260x - 0.2516x^2 + 0.2843x^3 - 0.1015x^4\right) \qquad (1.3)$$

Los signos "+" y "–" indican que existe simetría con respecto a la línea media.

4. Determinar el ángulo que forman las tangentes a la línea de curvatura media con la línea de cuerda para cada punto. Para ello derivamos las ecuaciones de la curvatura media con respecto a x:

$$\theta = arctg\left(\frac{dy_c}{dx}\right) \qquad (1.4)$$

$$\frac{dy_c}{dx} = \frac{2m}{p^2}(p - x) \quad \text{desde } x = 0 \quad \text{hasta } x = p \qquad (1.5)$$

$$\frac{dy_c}{dx} = \frac{2m}{(1-p)^2}(p - x) \quad \text{desde } x = p \quad \text{hasta } x = 0 \qquad (1.6)$$

5. Determinar las coordenadas finales de la superficie superior (x_U, y_U) y de la superficie inferior (x_L, y_L) usando las relaciones siguientes:

$$x_U = x - y_t \sin\theta \qquad (1.7)$$

$$y_U = y_c + y_t \cos\theta \qquad (1.8)$$

$$x_L = x + y_t \sin\theta \qquad (1.9)$$

$$y_L = y_c - y_t \cos\theta \qquad (1.10)$$

1.2 Método numérico del cálculo del mallado

En la figura 1.2.1 se observa una malla rectangular en las coordenadas x e y superpuesta a un perfil alar. En ella se puede observar como los puntos de la malla no

coinciden con la superficie a estudiar por lo que no permitiría aplicar las condiciones necesarias en la frontera interior.

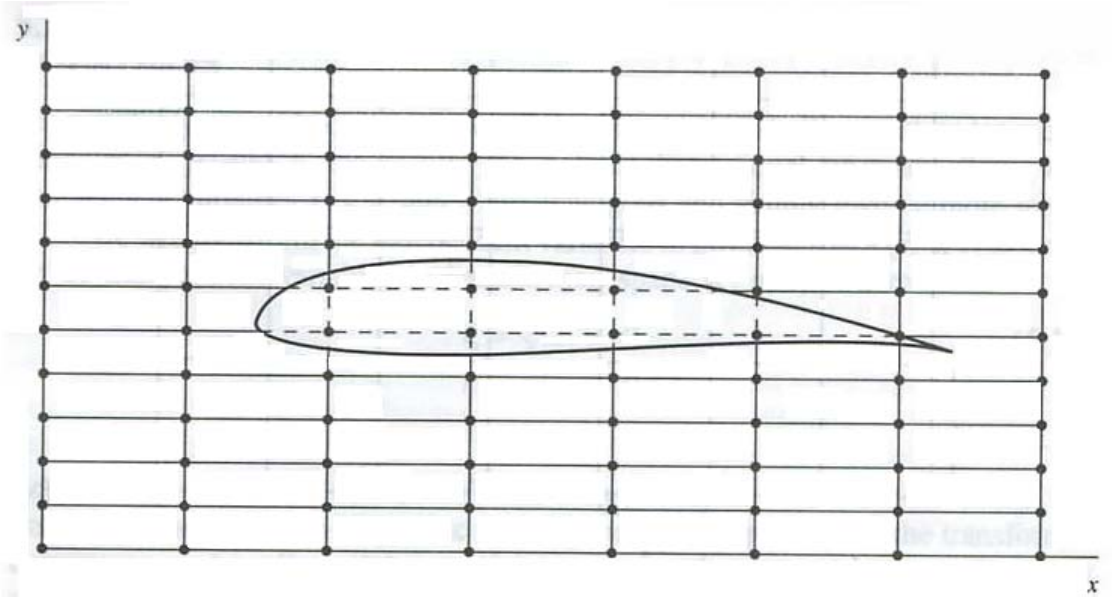


Figura 1.2.1: *Perfil alar en una malla rectangular. Referencia [2].*

Como conclusión de lo dicho anteriormente, una malla rectangular no es una buena solución en nuestro problema. Es necesario buscar una malla en la que los nodos se encuentren dentro del perfil por lo que se procederá a calcular una malla curvilínea adaptada a las fronteras exterior e interior. Se puede observar en la figura siguiente una malla curvilínea en la que las nuevas coordenadas ξ y η están definidas mediante la superficie, obteniendo así una línea coordenada $\eta = cte$. Esta malla no es rectangular y no está espaciada uniformemente, es decir, $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$ pero $\Delta x \neq \Delta y \neq 1$.

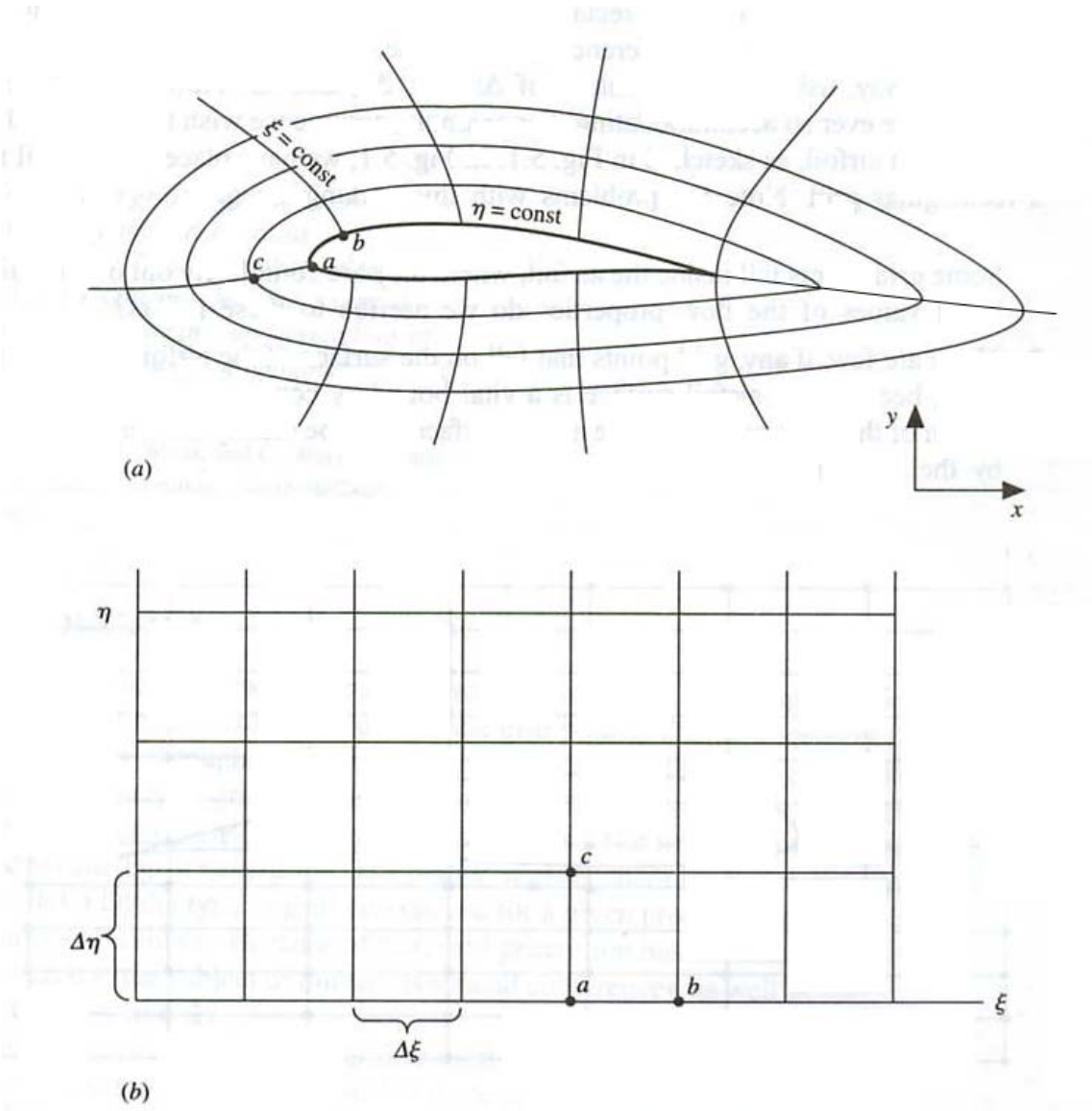


Figura 1.2.2: *Sistema de coordenadas del perfil en:* (a)*: Plano físico* (b)*: Plano computacional. Referencia [2].*

En la figura 1.2.2a se observa una malla curvilínea en el plano físico donde los puntos a, b y c corresponden a los puntos a, b y c del plano computacional de la figura 1.2.2b.

A continuación vamos a considerar el problema bidimensional y estacionario por lo que consideraremos la transformación de las variables independientes en el plano físico (x, y) en las variables dependientes (ξ, η) según:

$$\xi = \xi(x, y) \tag{1.11}$$

$$\eta = \eta(x, y) \tag{1.12}$$

Existen varias técnicas de discretización utilizadas en la generación de mallas estructuradas como por ejemplo:

- Métodos algebraicos: se basa en la interpolación entre los lados del dominio de modo que la generación de los nodos internos depende del contorno a discretizar.
- Métodos basados en EDP's: es un método de discretización que permite ajustar la distribución de los nodos.
- Crecimiento estructurado: método de discretización volumétrica que se desarrolla a partir de la malla generada de la base. Se utiliza en volúmenes cilíndricos o toroidales.
- Mediante superposición-deformación de la retícula: utiliza una retícula cuadrada la cual se superpone con el contorno de la superficie a discretizar. Eliminan los cuadrados que no intersectan el dominio y deforman los cuadrados del contorno para ajustarse a él.

En el presente proyecto hemos utilizado una la transformación mediante el cálculo numérico de una serie de ecuaciones en derivadas parciales utilizando como condición de contorno la geometría del contorno del dominio que se pretende discretizar. Con ello se pretende obtener una buena regularidad en el mallado y un mejor control de la densidad de la malla.

Esta técnica de mallado estructurado puede ser considerado como un método algebraico donde las coordenadas de los nodos interiores vienen determinadas por la resolución de estas EDP's, que relacionan las coordenadas del dominio real (x, y) con las del dominio arbitrario (ξ, η).

El tipo de ecuación o ecuaciones diferenciales empleadas influye directamente en la malla generada. Para que la malla tenga una buena regularidad se emplea la ecuación de Laplace.

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = 0 \tag{1.13}$$

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = 0 \tag{1.14}$$

Para poder obtener discretizaciones con densidad de mallado variable, de modo que exista una mayor concentración de elementos alrededor de una zona determinada, se puede utilizar la ecuación de Poisson:

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi,\eta) \tag{1.15}$$

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi,\eta) \tag{1.16}$$

Donde *P* y *Q* controlan la distribución de los nodos en la malla de la siguiente forma:

- *P*: produce atracción/repulsión sobre las líneas $\xi = cte$
- *Q*: produce atracción/repulsión sobre las líneas $\eta = cte$

Las funciones P y Q tienen la forma:

$$P(\xi,\eta) = -\sum_{k=1}^{K} a_k \, sign(\xi - \xi_k)\exp(-c_k|\xi - \xi_k|) - \sum_{l=1}^{L} b_l \, sign(\xi - \xi_l)\exp\left(-d_l\sqrt{(\xi - \xi_l)^2 + (\eta - \eta_l)^2}\right) \tag{1.17}$$

$$Q(\xi,\eta) = -\sum_{k=1}^{K} a_k \, sign(\eta - \eta_k)\exp(-c_k|\eta - \eta_k|) - \sum_{l=1}^{L} b_l \, sign(\eta - \eta_l)\exp\left(-d_l\sqrt{(\xi - \xi_l)^2 + (\eta - \eta_l)^2}\right) \tag{1.18}$$

El primer término de la función P produce atracción/repulsión hacia las líneas ξ_k, el segundo término de la función P produce atracción/repulsión hacia el punto (ξ_l, η_l). Para la función Q es análogo teniendo en cuenta que la atracción/repulsión se produce en las líneas η_k.

La atracción/repulsión viene determinada mediante los signos de las constantes a_k, b_l:

- $a_k, b_l > 0$: producen atracción

- $a_k, b_l < 0$: producen repulsión

La magnitud de la atracción/repulsión esta controlada mediante la magnitud de dichas constantes. Las constantes c_k, d_l regulan la extensión de las líneas que se ven afectadas por la atracción/repulsión.

En el programa no se considera necesaria la atracción de la línea coordenada ξ mientras que si consideramos la atracción sobre la superficie del perfil $(\eta_k = M)$ $(\xi_l = 1, \eta_l = M)$ quedándonos las ecuaciones 1.15 y 1.16 como:

$$P(\xi,\eta) = 0 \tag{1.19}$$

$$Q(\xi,\eta) = -a_k \, sign(\eta - \eta_k) \exp(-c_k |\eta - \eta_k|) \tag{1.20}$$

El objetivo final consiste en obtener las funciones que relacionan *x* e *y* con (ξ,η), por lo que es necesario invertir el sistema y resolver las EDP's acopladas resultantes mediante algún método iterativo:

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = -J^2 (P x_\xi + Q x_\eta) \tag{1.21}$$

$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = -J^2 (P y_\xi + Q y_\eta) \tag{1.22}$$

Donde los parámetros α, β, γ y *J* corresponden a las expresiones:

$$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2 \tag{1.23}$$

$$\beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \tag{1.24}$$

$$\gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2 \tag{1.25}$$

$$J = x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta \tag{1.26}$$

La solución de estas ecuaciones requiere la especificación de las condiciones en el contorno que encierra al dominio. Se puede observar en la figura siguiente la posición genérica de las condiciones en las fronteras:

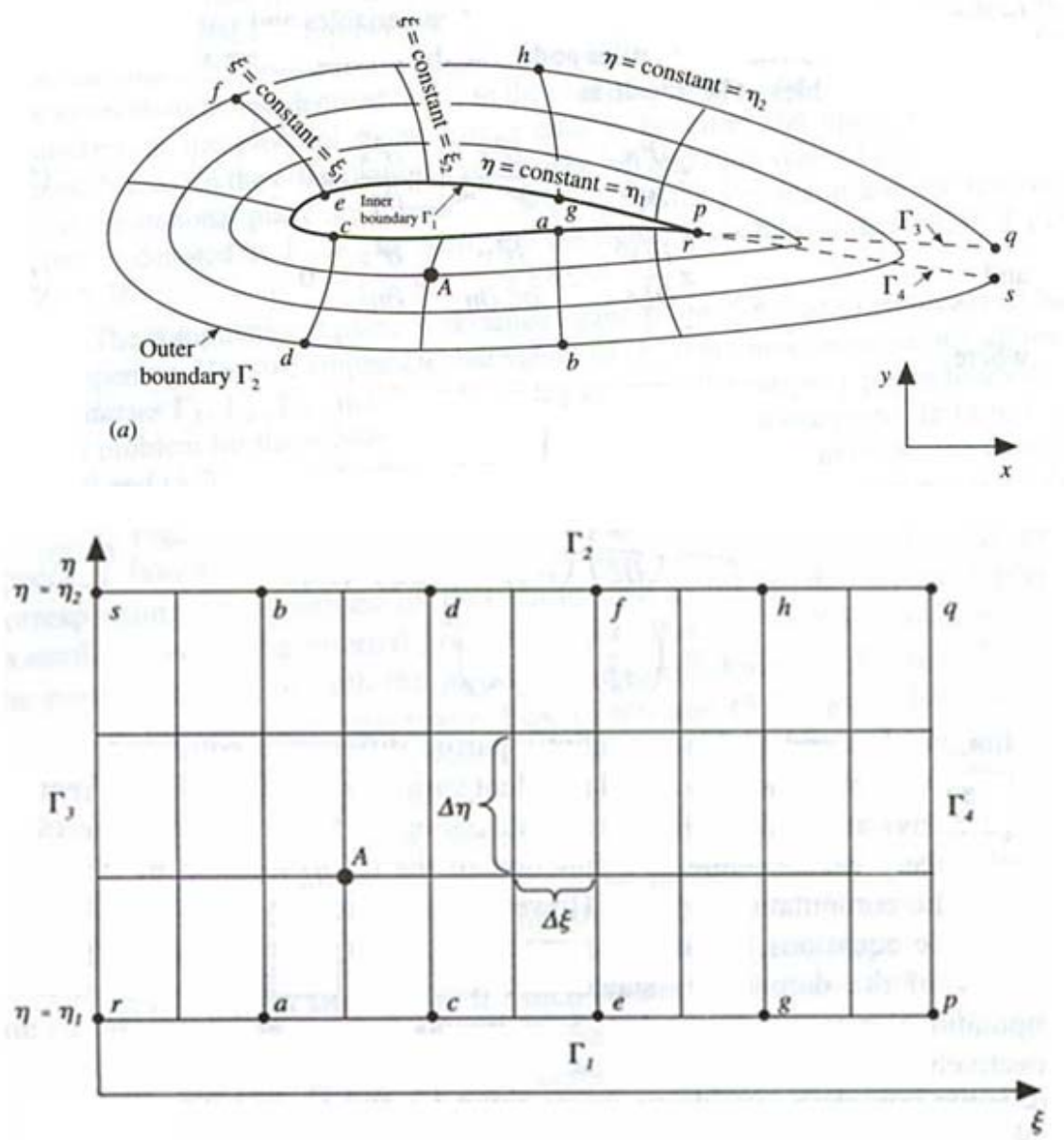


Figura 1.2.3: *Condiciones de contorno:* (a)*: Plano físico* (b)*: Plano computacional. Referencia [2].*

1.2.1 Condición interior Γ_1

Para la condición interior del mallado consideramos los puntos en coordenadas cartesianas obtenidos con las ecuaciones expuestas en la generación de la superficie del perfil.

Para la programación tenemos que tener cuidado en situar los puntos en coordenadas cartesianas en sus respectivas posiciones en coordenadas generalizadas:

- La superficie del perfil corresponde a la posición $\eta = M$
- En el borde de de salida se encuentran los puntos. $(\xi, \eta) = (1, M), (N, M)$

1.2.2 Condición exterior Γ_2

Los puntos de la frontera externa del flujo se han considerado fijos los para simplificar los cálculos, pues nuestro objetivo se centra en el análisis del fluido alrededor de la superficie a estudiar. La malla comienza con la forma alar de la superficie interior y se adapta hasta obtener forma de circunferencia en el exterior.

$$x(\xi,1) = R \cdot \cos\theta \qquad \text{con } \theta = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$y(\xi,1) = R \cdot sen\theta$$

1.2.3 Condición frontera Γ_3 y Γ_4

En la línea que sale del borde de salida tenemos que tener en cuenta que:

$$x(1,\eta) = x(N,\eta)$$
$$y(1,\eta) = y(N,\eta)$$

Al realizar iteraciones en la coordenada $\xi = N$ se tiene que: 0

$$x(N+1,\eta) = x(2,\eta)$$
$$y(N+1,\eta) = y(2,\eta)$$

Esto se puede entender fácilmente observando la siguiente figura:

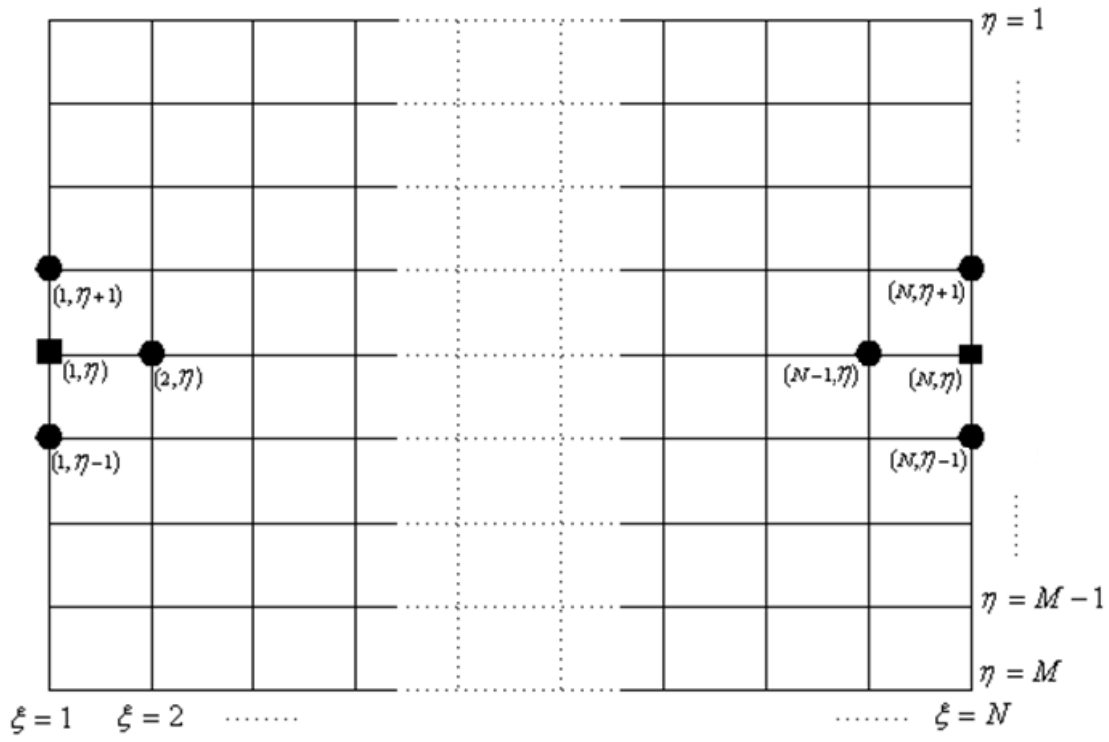


Figura 1.2.4: *Ejemplo de la disposición de los nodos*

1.3 Resultados

A continuación se representa los perfiles NACA 2412, 0006 y 0012 obtenidos de la programación de las ecuaciones desarrolladas en el capítulo 1.1.2. El resto de los cálculos que se realizarán en los próximos capítulos utilizarán una de estas superficies para analizar tanto la influencia de la simetría como el grosor del perfil.

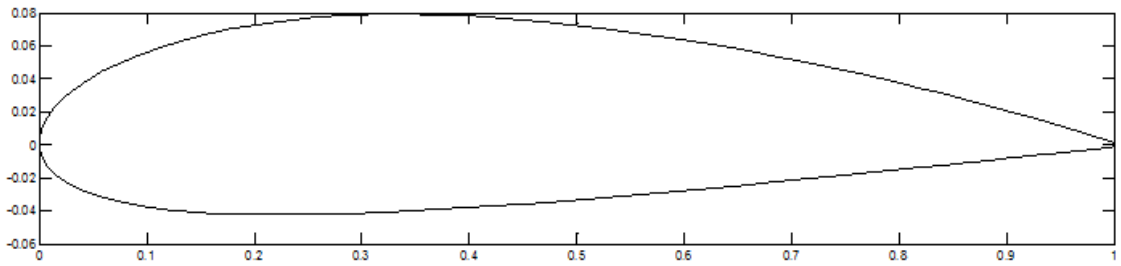


Figura 1.3.1: *Superficie del perfil NACA 2412*

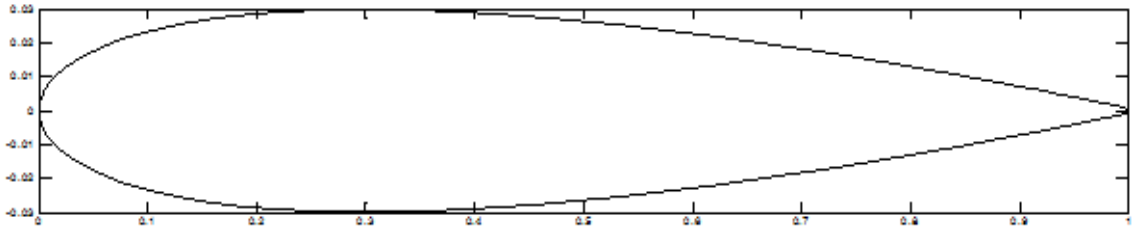


Figura 1.3.2: *Superficie del perfil NACA 0006*

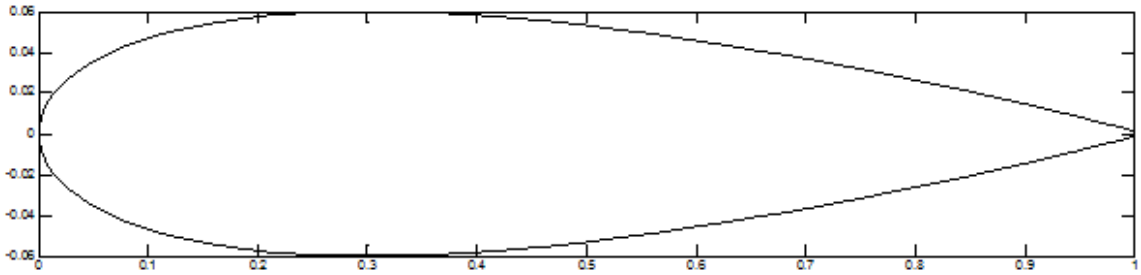


Figura 1.3.3: *Superficie del perfil NACA 0012*

La malla generada a partir del perfil aerodinámico NACA 2412 aparece representada en las siguientes figuras. Las ecuaciones discretizadas utilizadas en la programación del mallado se encuentran desarrolladas en el capítulo 4 y los pasos seguidos en su programación se encuentran en las tablas 5.2.2 y 5.2.3 del capítulo 5.

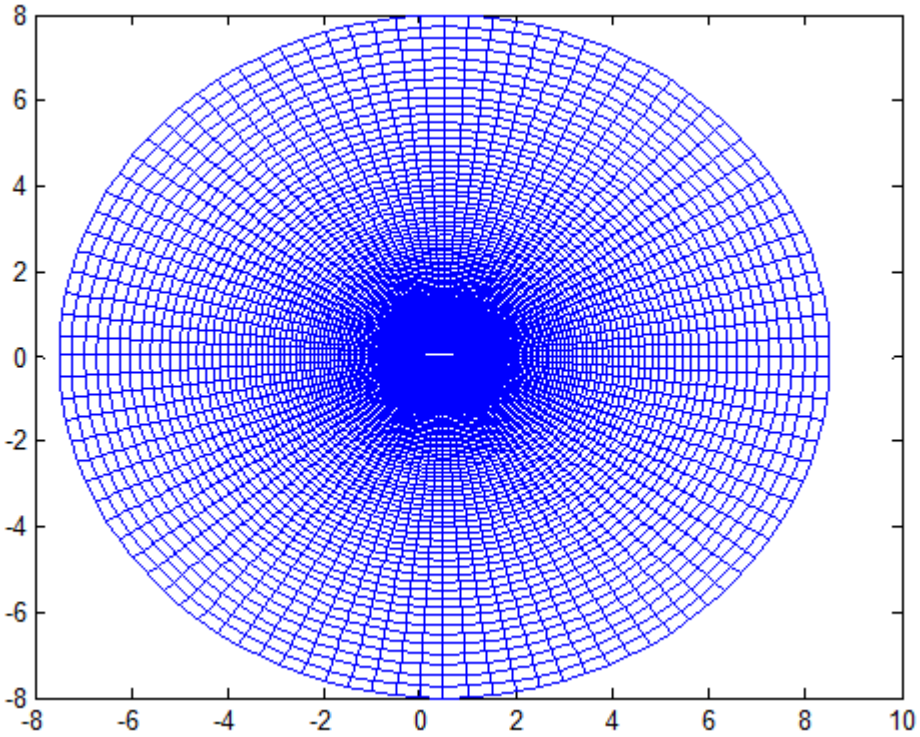


Figura 1.3.2: *Mallado del perfil (a): general*

En la figura del mallado (a) se observa como la distribución de los nodos es regular y se adapta perfectamente tanto a la frontera exterior como a la superficie aerodinámica (figura 1.3.3).

En las figuras siguientes se puede observar una mayor densidad de líneas sobre la superficie del perfil y el borde de salida. Las magnitudes de las variables que determinan la densidad del mallado utilizado en la programación son:

- Superficie aerodinámica, $\eta_k = M$: $a_k = 20, c_k = 0.2$

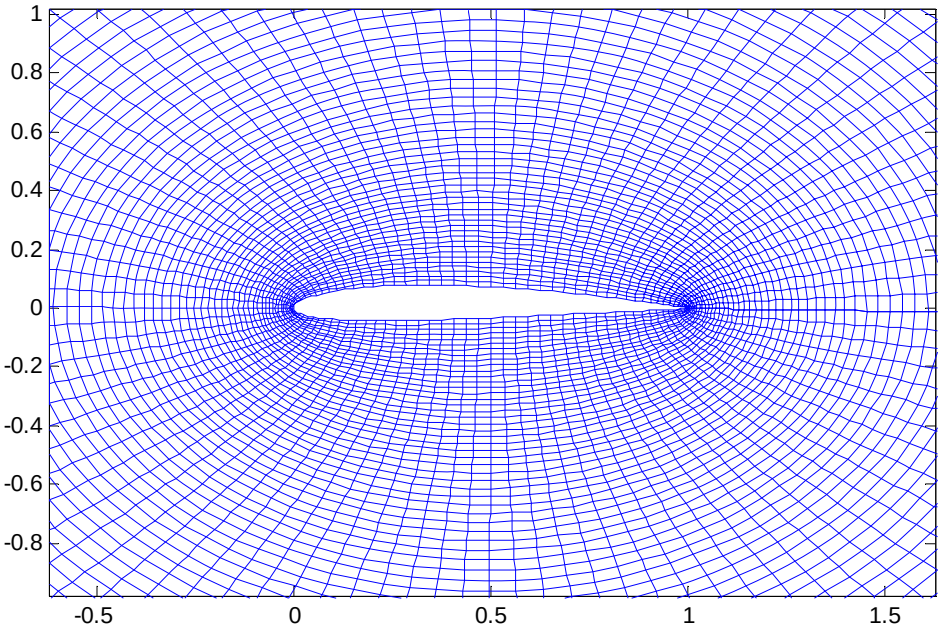


Figura 1.3.3: *Mallado del perfil (b): superficie del perfil*

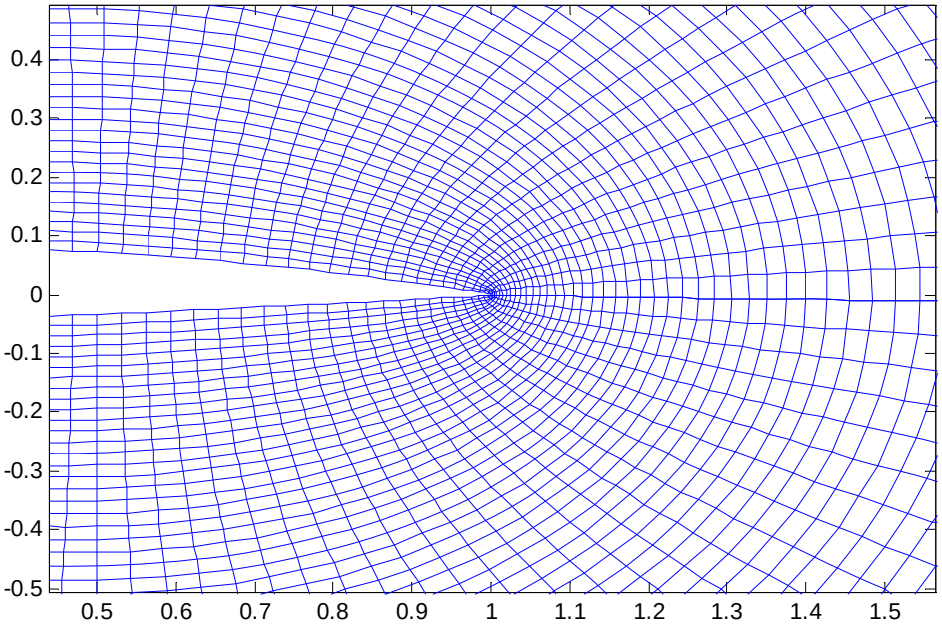


Figura 1.3.4: *Mallado del perfil (c): borde de salida*

CAPÍTULO 2:

FUNCIÓN POTENCIAL

El presente capítulo se desarrolla la teoría de flujo potencial en el caso de un movimiento fluido alrededor de un obstáculo bidimensional, en nuestro caso el perfil alar. Las ecuaciones en coordenadas cartesianas se transformarán a coordenadas generalizadas que nos permiten hacer uso del mallado generado en el capítulo anterior.

2.1 Introducción

Las ecuaciones de Navier-Stokes son ecuaciones diferenciales parciales acopladas y no lineales que se aplican tanto para flujo turbulento como para flujo laminar. Excepto para unos cuantos flujos especiales y muy simplificados, estas ecuaciones se han resistido a ser solucionadas.

Hay varias maneras de simplificar las ecuaciones, una de ellas es cuando se ignorara el esfuerzo cortante y el flujo se considera no viscoso. En este caso se obtienen las ecuaciones de Euler. Si el flujo también es irrotacional se tiene una solución general en la ecuación de Bernoulli. Estamos hablando de flujos potenciales. Como muchos fluidos (los más importantes: el aire y el agua) tienen valores relativamente pequeños de viscosidad, parece que casi siempre se podría emplear con éxito un modelo de flujo no viscoso.

Desafortunadamente el modelo de flujo no viscoso no es completamente correcto. No importa lo pequeña que sea la viscosidad, existe siempre una región cerca de la pared donde el gradiente de velocidad es lo suficientemente grande como para que el esfuerzo cortante no sea despreciable. Además, si tenemos en cuenta de la paradoja de D'Alembert, que dice que en un fluido potencial y estacionario no hay resistencia aerodinámica, se contradice con la observación.

La solución a estas paradojas es que nuestro flujo no es potencial, por lo menos no lo es en algunas zonas. Para avanzar en la comprensión de estos fenómenos hemos de separar el flujo en regiones, una región externa, donde podríamos hablar de flujo potencial, y un flujo cercano al objeto donde los efectos de la viscosidad hacen que la vorticidad cambie localmente y tengamos circulación y turbulencias. Esto es el fenómeno de capa límite, que dice que lo que pasa es que los efectos de la viscosidad hay que contarlos en una zona muy delgada alrededor del perfil.

Se analizará la región externa suponiendo que todas las fuerzas debidas a esfuerzos cortantes son cero y que el flujo es irrotacional. Como aproximación, se supone que la capa límite es tan delgada que se puede ignorar su presencia. El campo de velocidad para un flujo irrotacional se puede establecer a partir del gradiente de una función potencial de velocidad escalar, por tanto a la región exterior se le denomina flujo potencial. El análisis del flujo potencial produce el patrón de líneas de corriente en la región que se extiende desde cerca de la superficie hasta las fronteras exteriores del campo de flujo y la presión de distribución para todo el flujo, incluyendo aquélla sobre la superficie misma.

2.2 Hipótesis previas

Se va a partir de un fluido no viscoso, por lo que éste será irrotacional y nos va a permitir aplicar las ecuaciones de Euler y Bernoulli. Para que exista una velocidad angular que impida que el flujo sea irrotacional, es necesaria la formación de un esfuerzo cortante que genera un par de torsión sobre la partícula. Al no existir viscosidad, el esfuerzo cortante es nulo y obtenemos así un flujo irrotacional. La rotación del fluido está cuantificada por la vorticidad, para un flujo irrotacional ésta será cero en todo el espacio ocupado por el fluido.

$$\nabla \times \vec{v} = 0 \tag{2.1}$$

El fluido se ha considerado compresible, un gas perfecto. Para la resolución de las fórmulas que comentaremos más adelante es necesaria la determinación de la densidad, la entalpía y la presión de remanso. Tomaremos inicialmente como fluido el aire.

La densidad, la entalpía y la presión de remanso se determinarán a partir de las condiciones del flujo lejos del perfil $(T_\infty, p_\infty, V_\infty, \gamma, c_p)$:

$$\rho_\infty = \frac{P_\infty}{R_g T_\infty} \quad \text{con} \quad R_g = c_p \frac{\gamma - 1}{\gamma}$$

$$H_\infty = c_p T_\infty \tag{2.2}$$

El movimiento del fluido se realiza sin adición de calor, de manera que la entropía de cada partícula se conserva. Además el proceso se considera estacionario por lo que las propiedades y los parámetros del flujo se consideran independientes del tiempo y las fuerzas másicas son despreciables. Realizando estas simplificaciones y haciendo uso de la ecuación de Bernoulli y la condición isentrópica se obtienen las magnitudes de remanso:

$$H_0 = H_\infty + \frac{V_\infty^{\ 2}}{2} \tag{2.3}$$

$$\frac{\rho_\infty}{\rho_0} = \left(1 - \frac{V_\infty^{\ 2}}{2H_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{2.4}$$

$$\frac{p_0}{p_\infty} = \left(\frac{\rho_0}{\rho_\infty}\right)^{\gamma} \tag{2.5}$$

Además el flujo se considera estacionario por lo que El perfil se considera bidimensional, es decir, se considera una envergadura infinita de forma que colocándonos en cualquier punto siempre veremos el perfil exactamente igual que en el resto de dicha ala. De esta manera las características del perfil solo dependen de las componentes paralela y perpendicular a la cuerda.

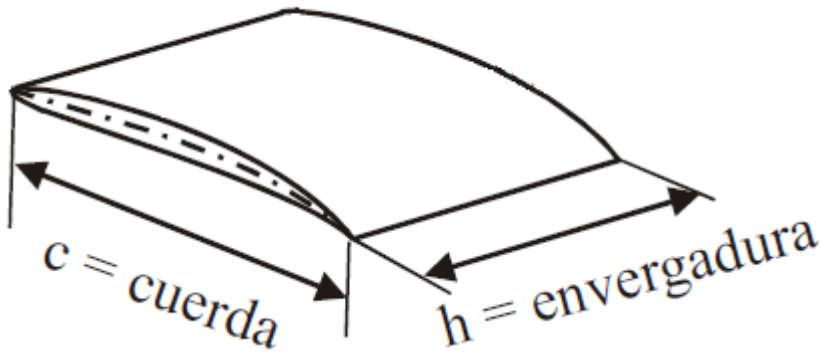


Figura 2.2.1: *Esquema de un perfil aerodinámico*

Resumiendo las simplificaciones asumidas, el flujo se considera irrotacional, estacionario, de viscosidad despreciable y bidimensional. Las fuerzas másicas y la tensión superficial también se consideran despreciables.

2.3 Potencial de velocidades y función de corriente

Para el caso de flujos irrotacionales la velocidad puede derivarse de un potencial de velocidad adimensional ϕ, definido por:

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\phi \tag{2.6}$$

En la que ϕ se denomina a la función potencial de velocidad. Para flujos bidimensionales y en coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Si sustituimos la ecuación (2.3) en la ecuación de continuidad obtenemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \vec{\nabla} \phi\right) = 0 \tag{2.8}$$

Se puede definir también una segunda función escalar relacionada a través de la velocidad con el potencial. Se denomina función de corriente y cumple que:

$$\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$
$$\rho v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{2.9}$$

Si sustituimos las velocidades en la ecuación de continuidad, vemos que esta se satisface de manera automática.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0 \tag{2.10}$$

En caso estacionario queda:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \tag{2.11}$$

Como el flujo es irrotacional, el valor de la vorticidad (ζ) es nulo:

$$\zeta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} \tag{2.12}$$

Simplificando para flujo bidimensional se obtiene:

$$\zeta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2.13}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior las definiciones de velocidad de la ecuación (2.5) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)=0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\psi\right)=0 \tag{2.14}$$

Así que tanto la función de corriente como la función potencial satisfacen la ecuación de Laplace.

2.4 Teoría de flujo potencial

La forma conservativa del modelo potencial se obtiene a partir de la ecuación de continuidad dada por:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{\nabla}\phi\right)=0 \tag{2.15}$$

El flujo se considera isentrópico para así poder hacer uso del teorema de Kelvin en el cual un fluido ideal compresible o incompresible isentrópico donde las partículas generan un camino cerrado, resulta que la circulación alrededor de dichas partículas es siempre la misma. Haciendo uso de la hipótesis de flujo isentrópico se expresa la densidad como función de la velocidad, o sea del gradiente del potencial:

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\left[1-\frac{\left(\vec{\nabla}\phi\right)^2}{2H_0}\right]^{1/(\gamma-1)} \tag{2.16}$$

Los parámetros ρ_0 y H_0 corresponden a los valores de densidad y entalpía de remanso.

$$H_0=H+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2} \tag{2.17}$$

La ecuación 2.13 se puede demostrar utilizando las relaciones de gas isentrópico y la ecuación anterior:

$$\frac{T_0}{T}=\left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\gamma-1}=\left(\frac{H_0}{H}\right)=1+\frac{\gamma-1}{2}M^2 \tag{2.18}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{H}{H_0}=1-\dfrac{\Delta\phi^2}{2H_0}\\ \left(\dfrac{\rho_0}{\rho}\right)^{\gamma-1}=\left(\dfrac{H_0}{H}\right)\end{array}\right\}\frac{\rho}{\rho_0}=\left[1-\frac{\left(\vec{\nabla}\phi\right)^2}{2H_0}\right]^{1/(\gamma-1)}$$

Las condiciones de contorno del problema se encuentran en el apartado 2.6

En la programación de las ecuaciones para la resolución del flujo potencial se hará uso de la ecuación de Laplace para el potencial de velocidades aunque también sería posible su resolución a partir de la función de corriente.

2.4.1 Adimensionalización

Para realizar la adimensionalización del potencial primero identificamos las variables de las que depende:

$$\phi=\phi\left(\vec{x};\alpha,V_\infty,R_g,c,T_\infty,p_\infty,c_p\right)$$

Donde:

c	La cuerda del perfil
α	El ángulo de ataque
T_∞, p_∞	Condiciones del aire
c_p	Capacidad calorífica a presión constante
V_∞	La velocidad incidente relativa al perfil
R_g	Constante universal de los gases

Como tenemos cuatro parámetros independientes en total obtendremos: 7-4=3 parámetros adimensionales. Para aplicar el teorema Π primero agrupamos en una matriz las dimensiones de las variables dependientes.

$$\begin{array}{cccc} L & M & T & \theta \\ \phi & 2 & 0 & -1 & 0 \\ T_\infty & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 & 0 & 0 \\ R_g & 2 & 0 & -2 & -1 \\ V_\infty & 1 & 0 & -1 & 0 \\ c_p & 2 & 0 & -2 & -1 \\ p_\infty & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\Pi_0 = \frac{R_g}{c_p} = \frac{c_p - c_v}{c_p} = 1 - \frac{1}{\gamma} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rightarrow \Pi_0 = \gamma$$

$$\Pi_1 = \frac{V_\infty}{R_g^{1/2} T_\infty^{1/2}} \rightarrow \Pi_1 = \frac{V_\infty^2}{\gamma R_g T_\infty} = M$$

Finalmente el potencial vendrá definido mediante:

$$\frac{\phi}{V_\infty c} = f\left(\frac{x}{c}, \frac{y}{c}; \alpha, M, \gamma\right)$$

2.4.2 Transformación de las ecuaciones

La transformación de las coordenadas esta dada por:

$$\xi = \xi(x, y)$$
$$\eta = \eta(x, y)$$

La ecuación potencial escrita en esas coordenadas queda:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho J) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho J U) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho J V) = 0 \qquad (2.19)$$

Utilizando la simplificación de flujo estacionario obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\rho JU)+\frac{\partial}{\partial \eta}(\rho JV)=0 \tag{2.20}$$

Donde la obtención de la ecuación anterior se encuentra demostrada en el Anexo 2.

Aplicando la definición de función de corriente a la ecuación anterior obtenemos que:

$$\begin{aligned} \rho JU &= \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \\ \rho JV &= -\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \end{aligned} \tag{2.21}$$

Las componentes de la velocidad en coordenadas arbitrarias U y V se pueden definir en función de las componentes de la velocidad en coordenadas cartesianas u y v como:

$$U=\frac{d\xi}{dt}=\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=\xi_x u+\xi_y v=\xi_x \phi_x+\xi_y \phi_y \tag{2.22}$$

$$V=\frac{d\eta}{dt}=\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=\eta_x u+\eta_y v=\eta_x \phi_x+\eta_y \phi_y \tag{2.23}$$

Como los valores del mallado obtenidos en el capítulo anterior están dados como:

$$\begin{aligned} x &= x(\xi,\eta) \\ y &= y(\xi,\eta) \end{aligned}$$

Se opta por una transformación inversa de las variables con el jacobiano:

$$J=\begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{vmatrix}=x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \tag{2.24}$$

Y el tensor métrico de elementos:

$$g_{11} = x_\xi^2 + y_\xi^2$$
$$g_{12} = g_{21} = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta$$
$$g_{22} = x_\eta^2 + y_\eta^2 \tag{2.25}$$

Para obtener la transformación directa del tensor basta con aplicar las siguientes relaciones:

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{J^2}$$
$$g^{12} = -\frac{g_{21}}{J^2}$$
$$g^{22} = \frac{g_{11}}{J^2} \tag{2.26}$$

Para transformar las ecuaciones se utilizan las siguientes relaciones:

$$\xi_x = \frac{1}{J} y_\eta \qquad \eta_x = -\frac{1}{J} y_\xi$$
$$\xi_y = \frac{1}{J} x_\eta \qquad \eta_y = \frac{1}{J} x_\xi \tag{2.27}$$

Utilizando estas transformaciones se obtienen las siguientes relaciones para las velocidades en las coordenadas arbitrarias:

$$U = g^{11}\phi_\xi + g^{12}\phi_\eta \tag{2.28}$$

$$V = g^{21}\phi_\xi + g^{22}\phi_\eta \tag{2.29}$$

2.5 Condiciones de contorno

El dominio seleccionado está limitado mediante las condiciones en la superficie del perfil y en la frontera exterior pero además es necesario aplicar unas condiciones para el flujo potencial.

2.5.1 Condición de contorno en la superficie

En la superficie del perfil alar se aplicarán condiciones de contorno Neumann donde la velocidad normal a la frontera es nula. Como el sistema de coordenadas arbitrarias no es ortogonal, se hará uso de la siguiente ecuación para determinar la componente normal de la velocidad en la superficie:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \hat{n} \cdot \nabla \phi = \frac{g' \hat{e}_x - \hat{e}_y}{\left(1 + g'^2\right)^{1/2}} \cdot \left(\phi_x \hat{e}_x + \phi_y \hat{e}_y\right) \tag{2.30}$$

Donde $f(x, y) = g(x) - y$ corresponde a la forma de la superficie en coordenadas cartesianas y $g' = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$

Aplicando la regla de la cadena y posteriormente las transformaciones expuestas en (2.23) obtenemos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\phi_\xi \left(g' y_\eta + x_\eta\right) - \phi_y \left(g' y_\xi + x_\xi\right)}{J\left(1 + g'^2\right)^{1/2}} \tag{2.31}$$

Teniendo en cuenta que la superficie se encuentra en una línea $\eta = constante$

$$g' = \frac{y_\xi}{x_\xi}$$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial n}\right|_{d\eta=0} = \frac{-1}{\left(g^{22}\right)^{1/2}} \left(\phi_\xi g^{21} + \phi_\eta g^{22}\right) \tag{2.32}$$

2.5.2 Condición de contorno en la frontera exterior

En problemas de flujo externo, el potencial en la frontera exterior del dominio esta formado por un término debido al flujo uniforme, ϕ_{V_∞}, otro término debido a la singularidad del vórtice que introduce el efecto de la circulación alrededor del perfil, ϕ_Γ y por último una constante arbitraria ϕ_0:

$$\phi = \phi_{V_\infty} + \phi_\Gamma + \phi_0 = \vec{V}_\infty \cdot \vec{x} + \frac{\Gamma}{2\pi} \tan^{-1}\left[\sqrt{1 - M_\infty^2}\, \tan(\theta - \alpha_\infty)\right] + \phi_0 \qquad (2.33)$$

Donde ϑ corresponde con la posición angular del punto del flujo donde estemos calculando el potencial, Γ es la circulación que definiremos a continuación y M_∞ es el número de Mach calculado para la velocidad del fluido incidente, $\vec{V}_\infty$ con su correspondiente ángulo de ataque, α_∞ .

2.5.3 Circulación y condición de Kutta

Como ya se mencionó anteriormente, la circulación en cualquier región conexa de un flujo irrotacional es cero para cualquier trayectoria cerrada. Esto se puede demostrar con la ayuda del teorema de Stokes:

$$\Gamma = \oint_C V \cdot ds = \iint_A (rotV) \cdot dA$$

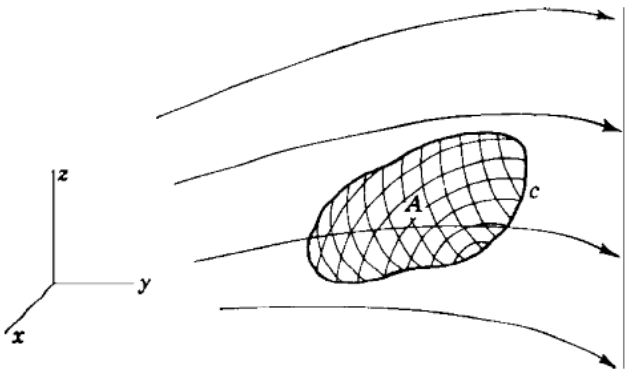


Figura 2.5.1: *Flujo alrededor de una superficie curva. Referencia [6].*

Como al ser el flujo irrotacional $rotV = 0$, entonces $\Gamma = 0$. En realidad, este resultado solo sería cierto si no tenemos en cuenta la capa límite. La disposición que adoptarían las líneas de corriente alrededor del perfil se puede observar en la siguiente figura:

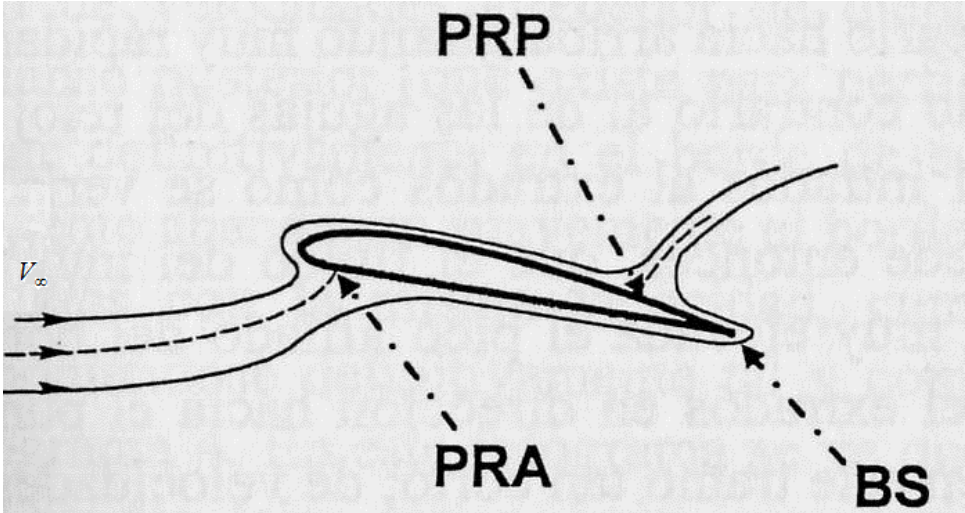


Figura 2.5.2: *Fluido ideal (sin viscosidad) alrededor de un perfil. Referencia [9].*

Si estudiamos un fluido real viscoso, en la etapa transitoria desde que parte del reposo hasta que alcanza el estado estacionario inicialmente la circulación del fluido alrededor del perfil es nula. Esto produce un punto de remanso en la parte posterior del perfil (PRP). Cuando el fluido que circula por el intradós del perfil alcanza el borde de salida, tiende a bordearlo hacia arriba girando muy rápidamente en sentido contrario al de las agujas del reloj para intentar pasar del intradós al extradós como se ve en la figura (2.5.2). En ese tramo, el fluido pasa de velocidades muy altas en el borde de salida a velocidades prácticamente nulas cerca del punto de remanso. Traduciéndolo a presiones se generarían gradientes de presiones adversos al tener que pasar de presiones muy bajas a presiones elevadas cerca del PRP. Por esta razón, la capa límite al no ser capaz de soportar este gradiente adverso de presiones se desprende de la pared del perfil (figura 2.5.3). Al desprenderse la corriente, lo hace generando un torbellino de valor Γ en el borde de salida que se va con la corriente y se aleja del perfil aguas abajo. Esto provoca una reacción sobre el propio perfil, una circulación del mismo valor Γ pero con sentido contrario al del torbellino, tal y como se ve en la figura 2.5.4. De esta manera obtenemos una circulación neta nula alrededor de todo el campo fluido.

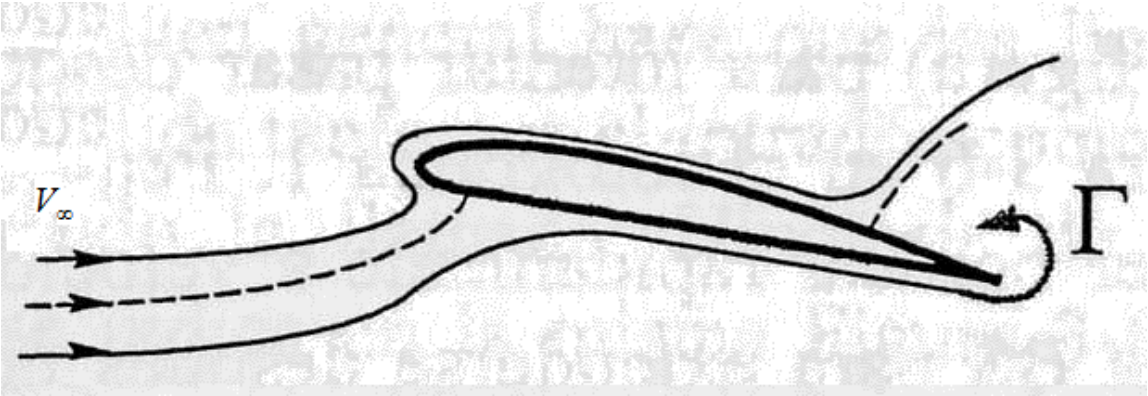


Figura 2.5.3: *Fluido real (con viscosidad) alrededor de un perfil con la corriente desprendida dando lugar a un torbellino con circulación* Γ. *Referencia [9].*

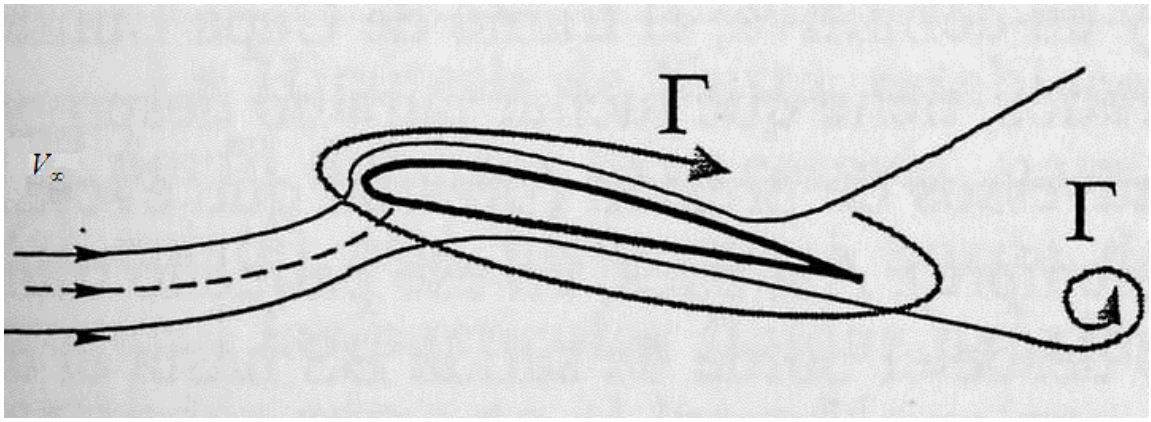


Figura 2.5.4: *Fluido real (con viscosidad) alrededor de un perfil que por reacción crea una corriente igual a* Γ *y de sentido contrario. Referencia [9].*

Cuando nos encontramos en el estado estacionario, el torbellino desprendido se encuentra muy lejos aguas abajo mientras que la circulación que ha aparecido sobre el perfil quedará constantemente alrededor de él.

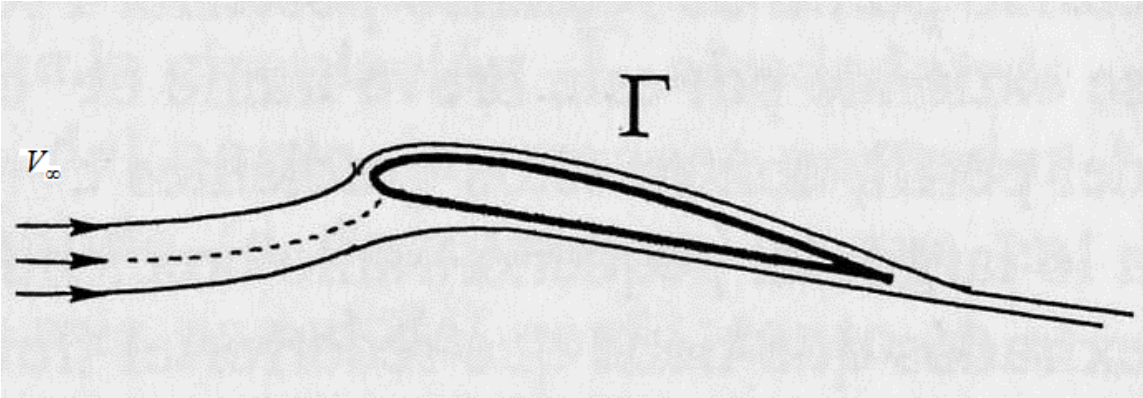


Figura 2.5.5: *Flujo alrededor de un perfil aerodinámico en estado estacionario. Ref. [9]*

La estela de detrás del perfil puede ser tratada matemáticamente como una línea a través de la cual el potencial es discontinuo. El valor de la circulación no puede ser calculado si no se resuelve la capa límite. No obstante, consideraciones físicas sobre el comportamiento de la capa límite suministran un criterio válido, la condición de Kutta-Joukowski, para determinar el valor de la circulación sin necesidad de resolver la capa límite. La hipótesis de Kutta, establece que la circulación alrededor de un perfil debe ser la necesaria para que el punto de remanso posterior se encuentre en el borde de salida (si existe) y que en general las partículas fluidas próximas a la pared del perfil, tanto en el extradós como en el intradós salgan suavemente por el mismo borde de salida, con la misma velocidad. En definitiva, se crea una circulación matemática del campo de velocidades de valor:

$$\Gamma = \phi_A - \phi_B = \phi_P - \phi_{P'} \tag{2.34}$$

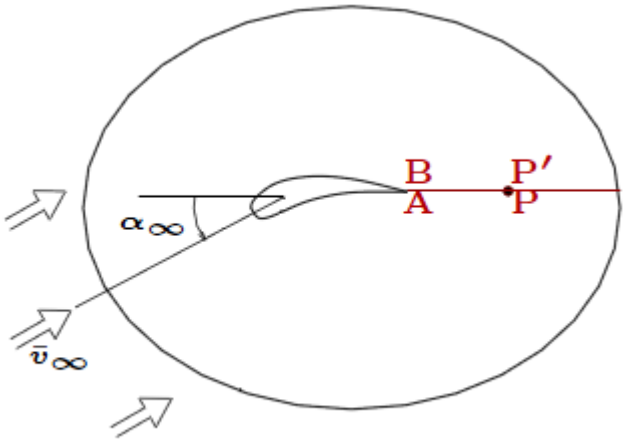


Figura 2.5.6: *Condición de Kutta para el cálculo de la circulación.*

Obsérvese que si el borde de salida del perfil es muy afilado, no es necesario que el borde de salida sea un punto de remanso sino que basta con que las velocidades arriba y abajo sean iguales.

El valor correcto de la circulación Γ_{Kutta} depende de la velocidad incidente, del ángulo de ataque y de la forma del perfil. Si la circulación alrededor del perfil difiere del valor de la circulación de Kutta, el punto de remanso se encontrara en el extradós si $\Gamma < \Gamma_{Kutta}$ o en el intradós si $\Gamma > \Gamma_{Kutta}$:

$$\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{s} \begin{cases} \Gamma < \Gamma_{Kutta} : & \text{Punto de remanso en el extradós} \\ \Gamma = \Gamma_{Kutta} : & \text{Punto de remanso en el borde de salida} \\ \Gamma > \Gamma_{Kutta} : & \text{Punto de remanso en el intradós} \end{cases}$$

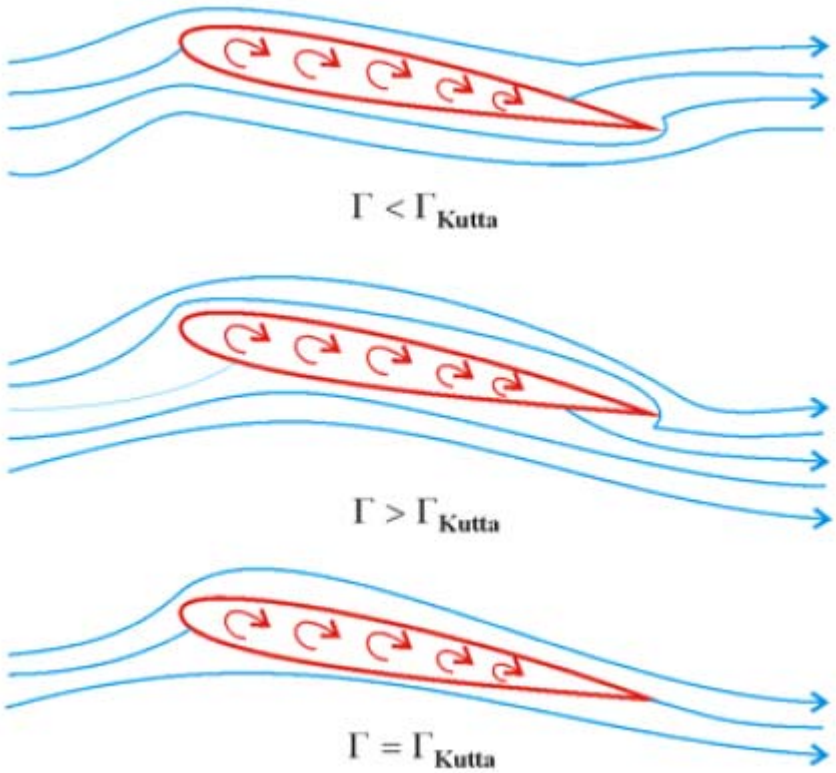


Figura 2.5.7: *Posición de los puntos de remanso según sea el valor de la circulación*

CAPÍTULO 3:

COEFICIENTES AERODINÁMICOS

El presente capítulo se trataran las fuerzas que el fluido ejerce sobre al perfil debido al movimiento relativo entre ambos, estas se conocen como la resistencia y la sustentación del perfil. Su cálculo directo no va a ser posible pues no se conocen las presiones y esfuerzos cortantes por lo que se determinarán los coeficientes adimensionales de resistencia y sustentación.

3.1 Introducción

Todo cuerpo inmerso en una corriente móvil experimenta una fuerza. Teniendo en cuenta que el fluido es bidimensional, tendremos dos componentes de la fuerza. La componente de la fuerza en dirección del flujo se denomina resistencia o arrastre, y la componente de la fuerza perpendicular al flujo se conoce como sustentación.

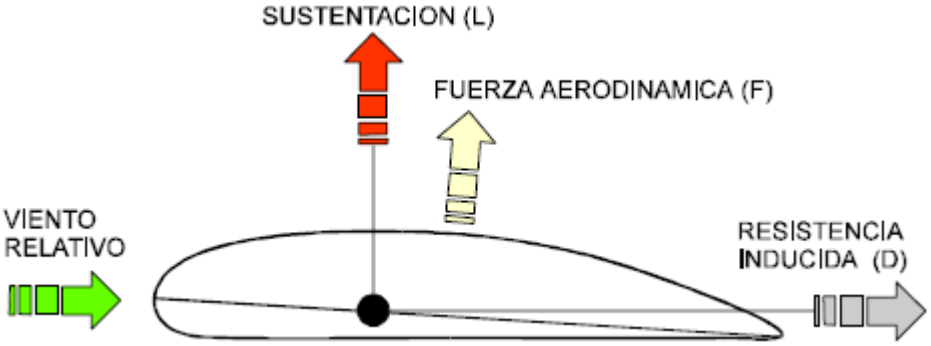


Figura 3.1.1: *Esquema de las fuerzas de sustentación y resistencia.*

Los experimentos han demostrado que cualquier cuerpo colocado en una corriente móvil experimenta resistencia. En cambio, la sustentación no se presenta en todos los

flujos, solamente se encuentra en aquellos en los que existe asimetría. La asimetría puede ser causada por el cuerpo o porque exista un cierto ángulo de ataque entre el cuerpo y la dirección del flujo. Estos ejemplos se pueden ver en la siguiente figura:

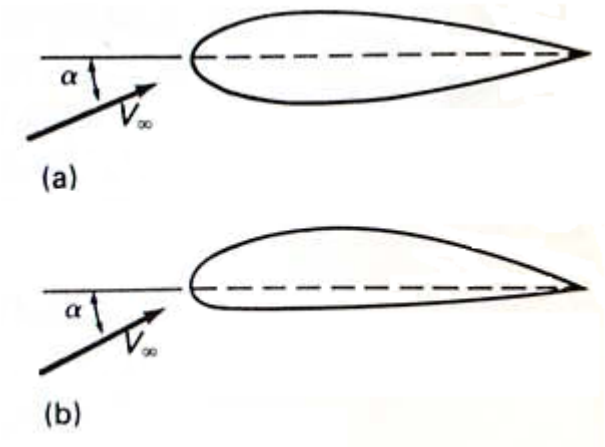


Figura 3.1.2: *Perfiles aerodinámicos bidimensionales (a): Simétrico (b): Curvado. Referencia [3].*

3.2 Distribución de presiones

Para explicar la relación entre la distribución de velocidades alrededor del perfil y el campo de presiones sobre el mismo, es necesario recurrir a la ecuación de cantidad de movimiento:

$$\rho g - \nabla p + \nabla \tau_{i,j} = \rho \frac{dV}{dt} \tag{3.1}$$

Donde $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + u\frac{\partial V}{\partial x} + v\frac{\partial V}{\partial y}$

Realizando la simplificación de flujo no viscoso obtenemos la ecuación de Euler:

$$\rho g - \nabla p = \rho \frac{dV}{dt} \tag{3.2}$$

Considerando el estado estacionario y las fuerzas másicas despreciables e integrando a lo largo de las líneas de corriente se obtiene la ecuación de Bernoulli:

$$\rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}+\nabla p=0$$

Donde: $\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}=\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right)-v\times\left(\nabla\times v\right)$

Debido a la condición de irrotacionalidad, el segundo término se anula obteniendo:

$$\rho\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right)+\nabla p=0 \tag{3.3}$$

Proyectando la ecuación sobre una línea de corriente se obtiene la forma general de la ecuación de Bernoulli:

$$\rho v\frac{dv}{ds}=-\frac{dp}{ds}\Rightarrow\int\frac{1}{2}d\left(v^2\right)+\int\frac{dp}{\rho}=0$$

Si relacionamos la densidad y la presión mediante la condición de flujo isentrópico e integramos la ecuación anterior:

$$\left.\begin{array}{l}\int\frac{1}{2}d\left(v^2\right)+\int\frac{dp}{\rho}=0\\ \rho=\rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\end{array}\right\}\frac{v^2}{2}+\frac{p_0^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho_0}\int p^{\frac{-1}{\gamma}}dp=cte$$

Finalmente obtenemos:

$$\frac{v^2}{2}+\frac{p_0^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho_0\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)}p^{1-\frac{1}{\gamma}}=0 \tag{3.4}$$

Como fijamos las condiciones del flujo lejos del perfil, la ecuación se puede escribir como:

$$\frac{v^2}{2}+\frac{p_0^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho_0\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)}p^{1-\frac{1}{\gamma}}=\frac{v_0^2}{2}+\frac{p_0}{\rho_0\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)}$$

Sustituyendo la relación de la presión y la densidad y la velocidad nula al corresponder al punto de remanso se obtiene:

$$\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho_0\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)}\frac{\rho_0}{\rho}=\frac{p_0}{\rho_0\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)}$$

$$\frac{p}{\rho}=\frac{p_0}{\rho_0}-\frac{v^2}{2}\frac{\gamma-1}{\gamma}$$

$$1=\frac{p_0\rho}{\rho_0 p}-\frac{v^2}{2}\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\rho}{p}$$

$$\frac{p_0\rho}{\rho_0 p}=1+\frac{\gamma-1}{2}\frac{v^2}{c^2}=\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$p_0=p\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{3.5}$$

Según la ecuación anterior, si la velocidad o la presión suben forzosamente la otra tendrá que disminuir. A lo largo de una línea de corriente, en las zonas donde la velocidad sea elevada, la presión será pequeña y viceversa, donde la velocidad sea pequeña, la presión será elevada.

Si aplicamos este razonamiento en el estudio de perfiles, las partículas fluidas que tienen que pasar por encima del mismo recorren un camino más largo que las que tienen que pasar por debajo del perfil. Por tanto, las partículas que van a pasar por el extradós tienen que aumentar forzosamente su velocidad y las líneas de corriente se aprietan. Por debajo del perfil, las partículas pasan más holgadamente y las líneas de corriente están menos juntas. De esta forma, en el intradós se generarán altas presiones y en el extradós bajas presiones.

Para la representación de las presiones se determinará el coeficiente de presión utilizando la siguiente adimensionalización:

$$C_p=\frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} \tag{3.6}$$

3.3 Efecto de la compresibilidad

Como en las aplicaciones que se hace uso de flujos exteriores muchas veces exigen elevadas velocidades se pueden originar flujos transónicos o supersónicos en los que hay que tener en cuenta la compresibilidad. Aunque en este proyecto solo se realice la programación de flujo subsónico o incompresible, es necesario conocer los posibles efectos que ocasionaría dicha compresibilidad.

Los efectos de la compresibilidad pueden ser considerados según el número de Mach:

$$M_\infty = \frac{V_\infty}{\sqrt{\gamma R_g T_\infty}} \tag{3.7}$$

Realizando una clasificación simple los flujos se denominan:

- Subsónico: $M_\infty < 1$
- Sónico: $M_\infty = 1$
- Supersónico: $M_\infty > 1$

Para cuerpos fuselados como es nuestro caso es necesaria una clasificación más compleja pues que la corriente exterior sea subsónica no garantiza que las zonas cercanas a la superficie lo cumplan:

- Incompresible, $M_\infty < 0{,}3$: Las variaciones de densidad debidas al cambio de presión pueden ser despreciadas. El gas es compresible pero la densidad puede ser considerada constante.
- Subsónico, $0{,}3 < M_\infty < 0{,}8$: Se verifica que $M_\infty < 1$ en todo el campo fluido. No hay ondas de choque en el flujo.

Figura 3.3.1: *Flujo subsónico alrededor de un perfil*

- Transónico, $0{,}8 < M_\infty < 1{,}2$: Hay ondas de choque que conducen a un rápido incremento de la fricción y éstas separan regiones subsónicas de hipersónicas dentro del flujo. Debido a que normalmente no se pueden distinguir las partes viscosas y no viscosas este flujo es difícil de analizar.

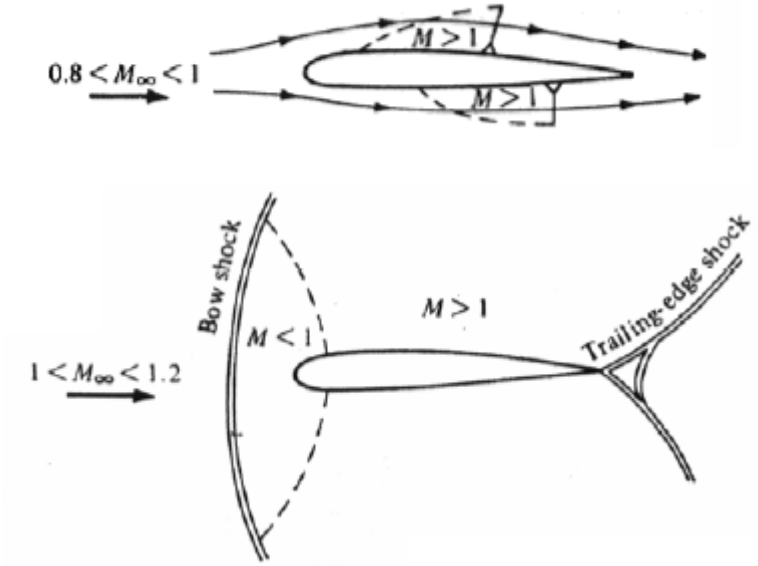


Figura 3.3.2: *Flujo transónico alrededor de un perfil*

- Supersónico, $1{,}2 < M_\infty < 3{,}0$: Normalmente hay ondas de choque pero ya no hay regiones subsónicas. El análisis de este flujo es menos complicado.
- Hipersónico, $M_\infty > 3{,}0$: Los flujos a velocidades muy grandes causan un calentamiento considerablemente grande en las capas cercanas a la frontera del flujo, causando disociación de moléculas y otros efectos químicos.

En las ondas de choque se pueden producir bruscos cambios de muy poco espesor $\left(10^{-6}\, m\right)$ pero las variables fluidas sufren variaciones muy drásticas a uno y otro lado de la onda de choque:

- Onda de choque: el número de Mach y la velocidad disminuyen mientras que la presión y la temperatura aumentan
- Onda de expansión: la velocidad aumenta y la presión y temperatura disminuyen.

Como vemos, el coeficiente de presión se verá modificado al aumentar el número de Mach. Para flujos incompresibles $(M_\infty < 0{,}3)$ se considera despreciable la variación de presiones. A medida que el Mach aumenta de ese valor, la magnitud de C_p aumenta rápidamente.

3.4 Fuerza resultante sobre un perfil

La resistencia y la sustentación don las resultantes de las fuerzas de presión y las debidas a esfuerzos cortantes sobre la superficie del cuerpo. Si determinamos las distribuciones de presiones y de esfuerzos cortantes sobre la superficie, se puede obtener por integración las fuerzas aerodinámicas.

En la siguiente figura se muestra un perfil aerodinámico típico con las distribuciones de presiones y de esfuerzo cortante sobre él:

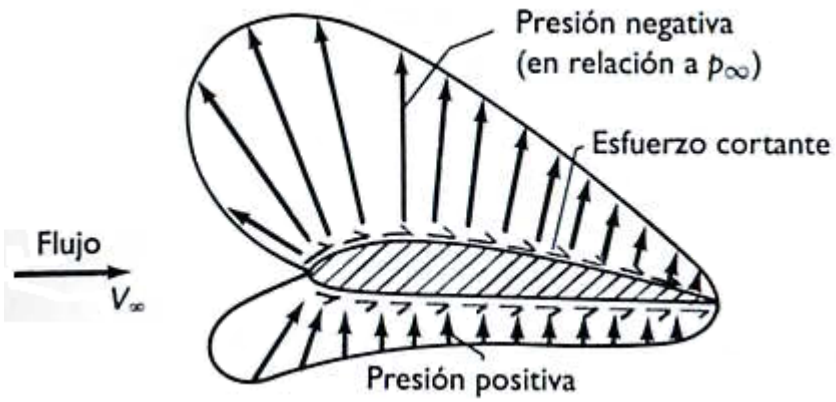


Figura 3.4.1: *Distribución de presiones y esfuerzos cortantes sobre un perfil aerodinámico. Referencia [3].*

La fuerza neta sobre el perfil aerodinámico tendrá la forma:

$$\vec{F} = -\oint p\hat{n}dA + \oint \tau_\omega \hat{t}dA \tag{3.8}$$

Donde $\hat{n}$ y $\hat{t}$ son los vectores unitarios perpendicular y tangente a la superficie del perfil. Separando las componentes perpendicular y paralela a la corriente se obtienen las siguientes ecuaciones:

- Fuerza de sustentación:

$$L = \oint \left(- psen\vartheta + \tau_{\omega} \cos\vartheta \right) dA \tag{3.9}$$

Fuerza de resistencia.

$$D = \oint \left(- p\cos\vartheta + \tau_{\omega} sen\vartheta \right) dA \tag{3.10}$$

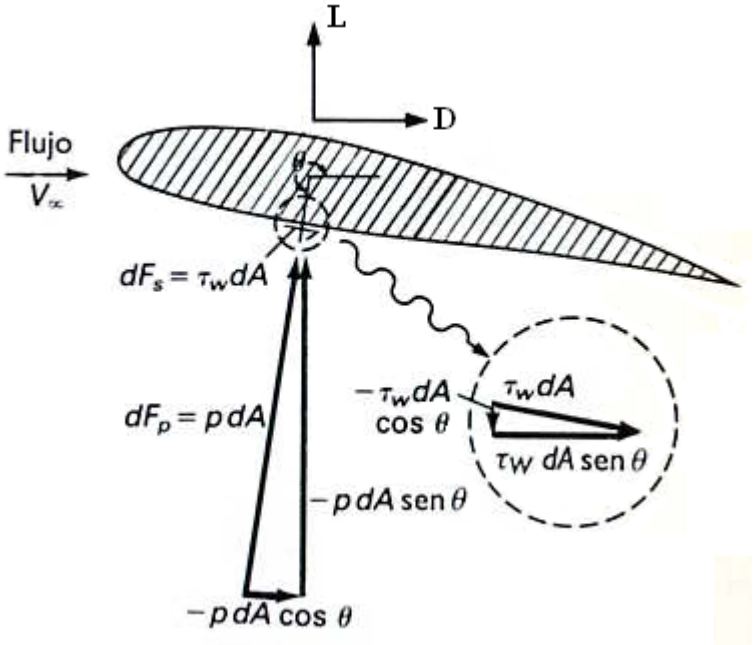


Figura 3.4.2: *Geometría de las fuerzas elementales sobre un perfil aerodinámico. Referencia [3].*

3.4.1 Resistencia

Como ya se ha mencionado, la resistencia aerodinámica de un perfil es la componente paralela a la corriente incidente de las fuerzas de presión y fricción sobre el perfil. La resistencia debida al esfuerzo cortante se conoce como resistencia de fricción, depende básicamente de la cantidad de superficie en contacto con el fluido. La resistencia de presión que se conoce como resistencia de forma pues depende de la forma del cuerpo. En la mayoría de los cuerpos la resistencia es una combinación de ambas.

Si observamos el diseño de los perfiles aerodinámicos en general podemos observar, que aunque es muy variado, todos ellos tienen una forma básica: el borde de

ataque del perfil es redondeado mientras que el borde de salida es afilado. La cara frontal se redondea para evitar la separación del flujo a la entrada y la porción de la cola tiene forma afilada para conseguir que la presión aumente progresivamente y así asegurar que si se produce separación de la corriente esta sea aguas abajo, tanto como sea posible. En la siguiente figura se puede observar la aparición de una estela detrás del perfil, la causante del aumento considerable de la resistencia de forma. Si la corriente se separa antes del borde de salida, la estela formada será mayor.

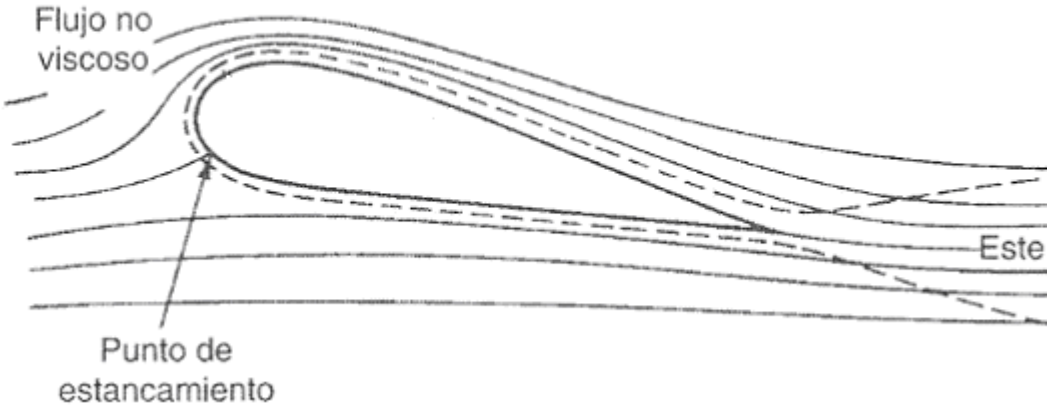


Figura 3.4.3: *Estela formada por un flujo alrededor de un perfil aerodinámico con la capa límite adherida.*

Existe límite para la cantidad de reducción de la resistencia que se puede lograr al fuselar el cuerpo. A medida que el cuerpo se alarga la resistencia de fricción aumenta al existir más superficie mojada. La resistencia mínima sobre el cuerpo la proporciona el balance adecuado entre la resistencia de fricción y de presión.

Todos los perfiles en mayor o menor medida van a sufrir una resistencia aerodinámica. En la mayoría de los flujos de interés el número de Reynolds es elevado, debido a que el tamaño del objeto es significativo y la viscosidad del fluido no es muy grande. Descartando la viscosidad, bastaría con calcular los patrones de líneas de corriente y la distribución de presiones para determinar la resistencia de forma. Si consideramos un perfil simétrico como el de la figura (3.4.5), va a generar una distribución de presiones simétrica por lo que va a existir un equilibrio generando una fuerza de resistencia nula (paradoja de D'Alambert). No obstante la experiencia confirma

que un cuerpo inmerso en una corriente fluida experimenta una fuerza de arrastre en la dirección de la corriente.

En 1904, L.Prandtl introdujo la hipótesis de capa límite, que explica cómo se originan la resistencia de forma y de fricción de un flujo para Reynolds elevado. Se percató que sin importar como de pequeña sea la viscosidad, el fluido debería satisfacer la condición de no deslizamiento en la superficie. En realidad, los esfuerzos viscosos son los culpables de que se cumpla dicha condición, consiguen evitar que el fluido deslice sobre el cuerpo. En consecuencia, la velocidad del fluido debe aumentar desde cero en la superficie hasta un valor del orden de la magnitud de la velocidad de la corriente libre en una corta distancia. Esta región donde la velocidad aumenta desde cero hasta un valor de la corriente libre se denomina capa límite. En nuestro caso, para un perfil aerodinámico a elevados números de Reynolds, la capa límite es muy pequeña de manera que las líneas de corriente permanecen prácticamente sin cambios.

Aunque despreciemos la influencia de la viscosidad, tenemos que tener en cuenta la influencia del ángulo de ataque en la distribución de presiones del perfil. Para ángulos de ataque pequeños, la capa límite no se ha desprendido aún y podemos considerar la distribución de presiones calculada mediante el modelo de flujo sin viscosidad.

Por el contrario, para ángulos de ataque elevados, se produce la separación de la capa límite y la distribución de presiones se modifica con respecto al modelo sin viscosidad. Esto hace que la resistencia debida a la presión aumente considerablemente pudiendo ser mayor que la resistencia de fricción. En la imagen siguiente se puede observar la separación de la capa límite para un ángulo de ataque elevado:

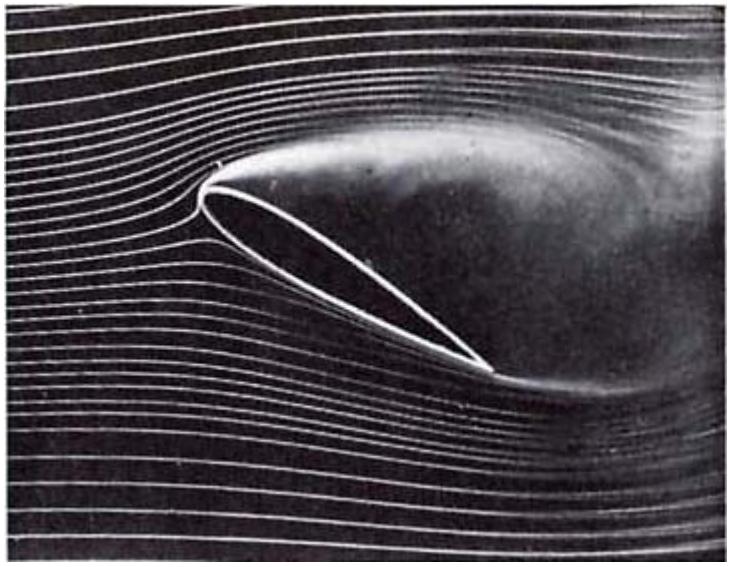


Figura 3.4.4: *Perfil en pérdida con un ángulo de ataque grande. La capa límite se separa cerca de la superficie frontal*

3.4.2 Sustentación

La sustentación en un perfil fundamentalmente es el resultado de la presión superficial, por lo que la viscosidad del fluido parecería tener poco efecto. El aumento de la velocidad del aire sobre el extradós de un perfil, con respecto al intradós, genera presiones, tanto en uno como en otro lado. La diferencia de estas presiones genera una fuerza resultante a la que se llama sustentación.

Como ya se explicó en el apartado 3.2 debido a las diferencias de velocidades en la parte superior e inferior del perfil se genera más presión en el intradós que en el extradós del ala. Esta diferencia de presión, al ser integrada a lo largo de toda la superficie alar produce una fuerza resultante que es la sustentación.

Ahora vamos a poner como ejemplo un perfil aerodinámico simétrico con un ángulo de ataque nulo. En este caso obtendríamos una distribución de presiones simétrica respecto de la línea media como se muestra en la siguiente figura:

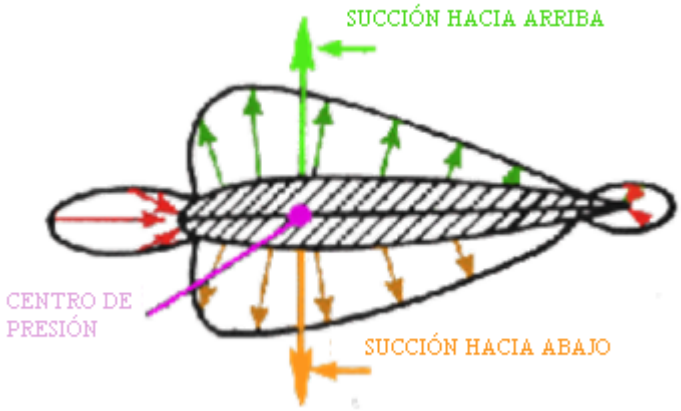


Figura 3.4.5: *Distribución de presiones de un perfil alar simétrico*

Si tenemos en cuenta un fluido ideal (sin viscosidad), la distribución de velocidades y de presiones será simétrica de manera que la fuerza será nula en cualquier dirección. Es decir, el obstáculo, en este caso el perfil aerodinámico, no ofrecerá resistencia al movimiento de avance del fluido. Tampoco existirá fuerza en sentido normal a la dirección de la corriente (sustentación).

Si al perfil simétrico anterior le añadimos un ángulo de ataque, estamos dándole una asimetría. También podemos tener el mismo efecto si el ángulo de ataque es nulo y el perfil no es simétrico, siendo la curvatura de la línea media la responsable de la asimetría.

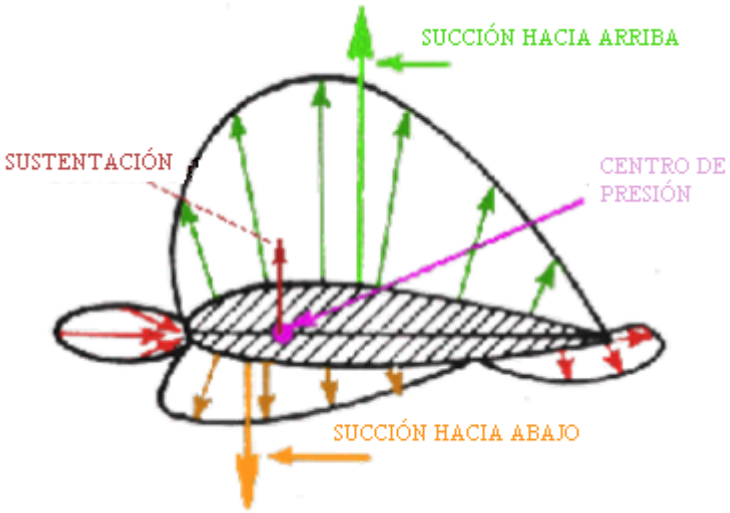


Figura 3.4.6: *Distribución de presiones de un perfil alar no simétrico*

3.4.3 Coeficientes de sustentación y resistencia

La ecuaciones (3.7) y (3.6) permiten calcular los valores de las fuerzas de sustentación y resistencia si se conocen los esfuerzos cortantes y la distribución de presiones. Normalmente esta información se obtiene en base a experimentos por lo que para describir las fuerzas aerodinámicas que actúan sobre los perfiles de una forma general se expresarán en términos de los coeficientes adimensionales. Para ello se ha realizado un análisis dimensional del perfil de forma general. Las variables de las que depende la fuerza son:

c La cuerda del perfil

r_u La rugosidad de la superficie

α El ángulo de ataque

ρ_∞ La densidad del aire

γ El coeficiente adiabático del aire

T_∞ La temperatura del aire

μ La viscosidad dinámica del aire

V_∞ La velocidad incidente relativa al perfil

R_g La constante universal de los gases

Para tomar el área de referencia se emplean varias definiciones: el área proyectada (la que se vería observando el cuerpo desde arriba) o área frontal (la que se vería al mirar el cuerpo desde la dirección por la que se aproxima el flujo). Para cuerpos bidimensionales, el área se basa en un ancho unitario *(h=1)*:

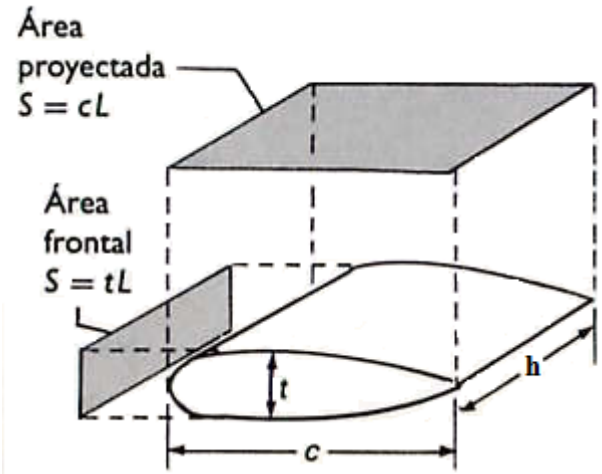


Figura 3.4.7: *Distribución de las áreas frontal y proyectada. Referencia [3].*

Por tanto, las fuerzas de sustentación y resistencia dependen de:

$$L = L(c, \alpha, r_u, \rho_\infty, \mu, T_\infty, V_\infty, R_g, \gamma)$$

$$D = D(c, \alpha, r_u, \rho_\infty, \mu, T_\infty, V_\infty, R_g, \gamma)$$

Eligiendo como variables independientes c, ρ V_∞ y T_∞ y aplicando el Teorema π del análisis dimensional, las fuerzas de sustentación y resistencia adimensionalizadas quedan como:

$$\frac{L}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 c} = f\left(\alpha, \frac{r_u}{c}, \frac{\mu}{c\rho_\infty V_\infty}, \frac{V_\infty^2}{\gamma R_g T_\infty}\right) = f(\alpha, r, \mathrm{Re}, M_\infty)$$

$$\frac{D}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 c} = f\left(\alpha, \frac{r_u}{c}, \frac{\mu}{c\rho_\infty V_\infty}, \frac{V_\infty^2}{\gamma R_g T_\infty}\right) = f(\alpha, r, \mathrm{Re}, M_\infty)$$

Donde:

- r es la rugosidad adimensionalizada con la cuerda $r = \frac{r_u}{c}$
- *Re* es el número de Reynolds asociado a la cuerda del perfil. Representa el valor del cociente entre las fuerzas convectivas y las fuerzas de viscosidad desarrolladas en el fluido:

$$\mathrm{Re} = \frac{c\rho_\infty V_\infty}{\mu}$$

- El número de Reynolds se considera bajo si Re<5
- El número de Reynolds es alto si Re>1000

- *M* es el número de Mach. Va a determinar el grado de compresibilidad del gas:

$$M_\infty = \frac{V_\infty}{\sqrt{\gamma R_g T_\infty}}$$

- Si M_∞ <0.3: el fluido es incompresible
- Si M_∞ >0.3: el fluido se considera compresible

Como ya hemos dicho anteriormente, realizaremos el estudio para Re altos siempre y cuando el flujo sea subsónico y no alcancemos el Re crítico, es decir, el número de Mach sea inferior a 0.8 y el flujo no alcance la turbulencia (Re<10^7).

Las fuerzas adimensionalizadas también es posible escribirlas como:

$$C_D = C_D(\alpha, M_\infty)$$

$$C_L = C_L(\alpha, M_\infty)$$

Donde se han eliminado la influencia de la rugosidad y el número de Reynolds pues en nuestro problema son despreciables:

- Coeficiente de sustentación:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 c} \tag{3.11}$$

- Coeficiente de resistencia:

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 c} \tag{3.12}$$

3.5 Cálculo de los coeficientes aerodinámicos

A continuación se procederá a aplicar la teoría vista anteriormente en nuestro caso particular. Al aproximar el fluido como no viscoso se están despreciando los esfuerzos cortantes por lo que la fórmula de la fuerza resultante queda:

$$\vec{F} = -\oint p\hat{n}dA \tag{3.13}$$

El cálculo de la fuerza de sustentación se realiza en la superficie, $\eta = M$.

Desarrollando la ecuación 3.14 se obtiene:

$$\vec{F} = -\oint p\hat{n}dA = -\int_0^N p(\xi, M)\hat{n}d\xi = -\int_0^N p(\xi, M)\left(y_\xi \vec{e}_x - x_\xi \vec{e}_\xi\right)d\xi$$

Separamos las componentes según las coordenadas horizontal y vertical:

$$\begin{aligned} F_x &= -\int_0^N p(\xi, M)y_\xi d\xi \\ F_y &= \int_0^N p(\xi, M)x_\xi d\xi \end{aligned} \tag{3.14}$$

La componente horizontal de la fuerza equivale a la resistencia y la componente vertical a la sustentación. Como en el programa se introducirá la presión adimensionalizada, obtendremos los coeficientes aerodinámicos en lugar de las fuerzas aerodinámicas. Proyectando las fuerzas obtenidas según el ángulo de ataque determinamos finalmente los coeficientes:

$$L = -F_x \sin\alpha + F_y \cos\alpha \tag{3.15}$$

$$D = F_x \cos\alpha + F_y sen\alpha \tag{3.16}$$

CAPÍTULO 4:

MÉTODO DE CÁLCULO

En el presente capítulo se desarrolla el método numérico empleado en la resolución de las ecuaciones expuestas en los capítulos anteriores. Para ello emplearemos un sistema de discretización obteniendo así un sistema de ecuaciones aproximadas que resolveremos mediante un sistema iterativo.

4.1 Introducción

La resolución exacta de las ecuaciones en derivadas parciales expuestas anteriormente implica importantes dificultades por lo que se recurre a la búsqueda de soluciones aproximadas. Para ello se llevará a cabo mediante un sistema iterativo con el siguiente esquema de resolución:

Figura 4.1.1: *Esquema del método de resolución del problema*

En función de que la discretización se realice en el dominio temporal o en el dominio espacio, se presentan diferentes métodos de discretización:

- Discretización temporal: Diferencias finitas
- Discretización espacial: Diferencias finitas
  Elementos finitos
  Volúmenes finitos

En la programación se ha hecho uso del método de diferencias finitas que consiste en discretizar de forma regular el dominio estableciendo un conjunto finito de puntos interiores y de la frontera (nodos) donde se realizaran los cálculos. Para ello se sustituyen las derivadas parciales para cada punto por cocientes de diferencias entre los valores de la solución en distintos puntos, obteniéndose un sistema algebraico de ecuaciones lineales.

Las discretizaciones se han realizado a lo largo de todo el proyecto mediante diferencias finitas con precisión de segundo orden respecto al espacio. Según los nodos donde estemos iterando las discretizaciones pueden ser:

Derivada	**Tipo de discretización**	**Aproximación por diferencias finitas**
$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}$	Progresivas	$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{-3u_{i,j} + 4u_{i+1,j} - u_{i+2,j}}{2\Delta x}$
	Regresivas	$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{3u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{2\Delta x}$
	Centrada	$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x}$
$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j}$	Centrada	$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2}$

$\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{i,j}$	Centrada	$\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{i,j}$	$= \dfrac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y}$

Tabla 4.1.1: *Aproximaciones en diferencias finitas de segundo orden. Los subíndices (i,j) indican la posición espacial dentro de la malla, con Δx la distancia entre dos nodos según la coordenada x.*

4.2 Cálculo del mallado

La discretización de las ecuaciones (1.21) y (1.22) se realiza en los nodos interiores de la malla considerando que $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$. El superíndice '*n*' nos indica la iteración en la que nos encontramos. Sustituyendo las aproximaciones en diferencias finitas en las ecuaciones se obtiene para la coordenada '*x*':

$$\alpha\left(\frac{x_{i-1,j}^{n-1} - 2x_{i,j}^{n} + x_{i+1,j}^{n-1}}{2\Delta\xi}\right) - 2\beta\left(\frac{x_{i+1,j+1}^{n-1} - x_{i+1,j-1}^{n-1} - x_{i-1,j+1}^{n-1} + x_{i-1,j-1}^{n-1}}{4\Delta\xi\Delta\eta}\right) + \gamma\left(\frac{x_{i,j+1}^{n-1} - 2x_{i,j}^{n} + x_{i,j-1}^{n-1}}{2\Delta\eta}\right) =$$
$$- J^2\left(P\frac{x_{i+1,j}^{n-1} - x_{i-1,j}^{n-1}}{2\Delta\xi} + Q\frac{x_{i,j+1}^{n-1} - x_{i,j-1}^{n-1}}{2\Delta\eta}\right)$$

Análogamente hacemos lo mismo para la coordenada 'y':

$$\alpha\left(\frac{y_{i-1,j}^{n-1} - 2y_{i,j}^{n} + y_{i+1,j}^{n-1}}{2\Delta\xi}\right) - 2\beta\left(\frac{y_{i+1,j+1}^{n-1} - y_{i+1,j-1}^{n-1} - y_{i-1,j+1}^{n-1} + y_{i-1,j-1}^{n-1}}{4\Delta\xi\Delta\eta}\right) + \gamma\left(\frac{y_{i,j+1}^{n-1} - 2y_{i,j}^{n} + y_{i,j-1}^{n-1}}{2\Delta\eta}\right) =$$
$$- J^2\left(P\frac{y_{i+1,j}^{n-1} - y_{i-1,j}^{n-1}}{2\Delta\xi} + Q\frac{y_{i,j+1}^{n-1} - y_{i,j-1}^{n-1}}{2\Delta\eta}\right)$$

Simplificando y despejando obtenemos $x_{i,j}$ y $y_{i,j}$:

$$x_{i,j}^{n} = \left(\frac{1}{2(\alpha+\gamma)}\right)\cdot\left(\alpha\left(x_{i+1,j}^{n-1} + x_{i-1,j}^{n-1}\right) + \gamma\left(x_{i,j+1}^{n-1} + x_{i,j-1}^{n-1}\right) - \frac{1}{2}\beta\left(x_{i+1,j+1}^{n-1} - x_{i+1,j-1}^{n-1} - x_{i-1,j+1}^{n-1} + x_{i-1,j-1}^{n-1}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}J^2\left(Q\left(x_{i,j+1}^{n-1} - x_{i,j-1}^{n-1}\right) + P\left(x_{i+1,j}^{n-1} - x_{i-1,j}^{n-1}\right)\right)\right) \tag{4.1}$$

$$y_{i,j}^{n} = \left(\frac{1}{2(\alpha+\gamma)}\right)\cdot\left(\alpha\left(y_{i+1,j}^{n-1}+y_{i-1,j}^{n-1}\right)+\gamma\left(y_{i,j+1}^{n-1}+y_{i,j-1}^{n-1}\right)-\frac{1}{2}\beta\left(y_{i+1,j+1}^{n-1}-y_{i+1,j-1}^{n-1}-y_{i-1,j+1}^{n-1}+y_{i-1,j-1}^{n-1}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}J^{2}\left(Q\left(y_{i,j+1}^{n-1}-y_{i,j-1}^{n-1}\right)+P\left(y_{i+1,j}^{n-1}-y_{i-1,j}^{n-1}\right)\right)\right) \tag{4.2}$$

Donde los parámetros α, β, γ y J corresponden a las expresiones:

$$\alpha = \left(\frac{x_{i,j+1}-x_{i,j-1}}{2\Delta\eta}\right)^{2}+\left(\frac{y_{i,j+1}-y_{i,j-1}}{2\Delta\eta}\right)^{2} \tag{4.3}$$

$$\beta = \left(\frac{x_{i+1,j}-x_{i-1,j}}{2\Delta\xi}\right)\left(\frac{x_{i,j+1}-x_{i,j-1}}{2\Delta\eta}\right)+\left(\frac{y_{i+1,j}-y_{i-1,j}}{2\Delta\xi}\right)\left(\frac{y_{i,j+1}-y_{i,j-1}}{2\Delta\eta}\right) \tag{4.4}$$

$$\gamma = \left(\frac{x_{i+1,j}-x_{i-1,j}}{2\Delta\xi}\right)^{2}+\left(\frac{y_{i+1,j}-y_{i-1,j}}{2\Delta\xi}\right)^{2} \tag{4.5}$$

$$J = \left(\frac{x_{i+1,j}-x_{i-1,j}}{2\Delta\xi}\right)\left(\frac{y_{i,j+1}-y_{i,j-1}}{2\Delta\eta}\right)+\left(\frac{y_{i+1,j}-y_{i-1,j}}{2\Delta\xi}\right)\left(\frac{x_{i,j+1}-x_{i,j-1}}{2\Delta\eta}\right) \tag{4.6}$$

4.3 Función potencial

En el caso de la función potencial, la discretización es algo más compleja, a partir de los nodos que se determinaron anteriormente, se va a escalonar la malla añadiendo nuevos nodos en el punto medio de estos como se muestra en la figura 4.3.1. Para ello consideraremos las celdas (i, j), $i = 1,....,N$; $j = 1,....,M$, en las cuales se realizará el cálculo del potencial y en el centro de las aristas verticales y horizontales $\left(i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}\right)$ se determinará el valor de la densidad y velocidad en coordenadas arbitrarias (ξ, η).

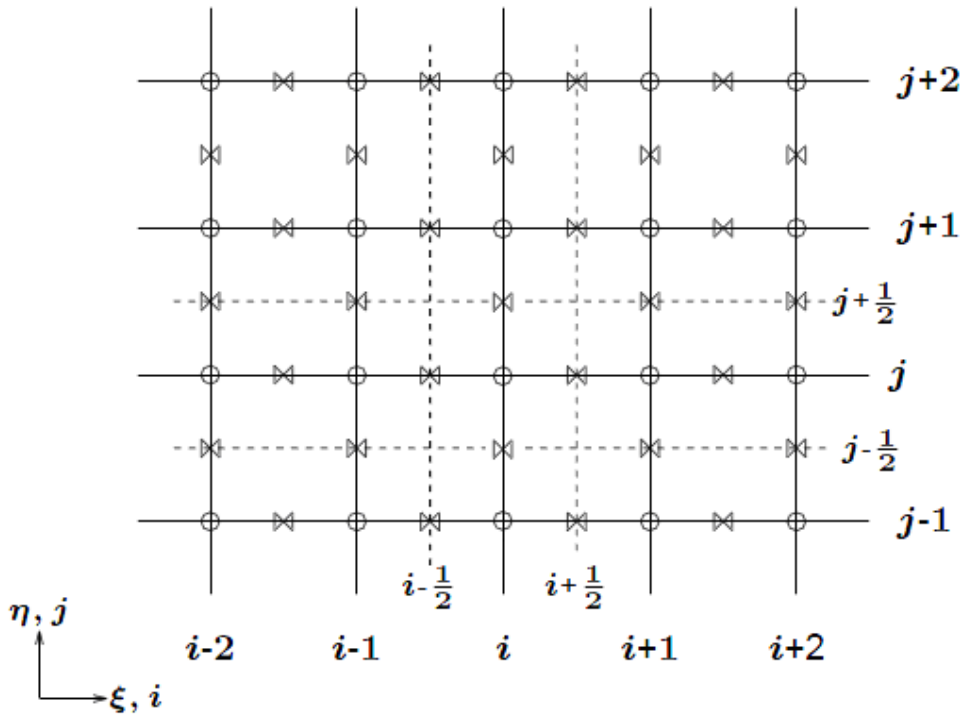


Figura 4.3.1: *Esquema del mallado escalonado*

Observando en la figura anterior, la malla se puede subdividir en tres mallas superpuestas. A la malla intercalada en la coordenada $\xi = cte$ la denominaremos vertical, mientras que a la malla intercalada en la coordenada $\eta = cte$ la denominaremos horizontal. El tamaño respectivo de estas mallas corresponde a: $(N, M-1)$ y $(N-1, M)$

4.3.1 Ecuación potencial

Partiendo de la ecuación potencial (2.18) y eliminando los términos correspondientes a la variación temporal:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\rho JU) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho JV) = 0 \tag{4.7}$$

Realizando una discretización centrada para los términos de densidad y velocidad en los nodos correspondientes obtenemos:

$$\frac{(\rho JU)_{i+\frac{1}{2},j} - (\rho JU)_{i-\frac{1}{2},j}}{2\Delta\xi} + \frac{(\rho JV)_{i,j+\frac{1}{2}} - (\rho JV)_{i,j-\frac{1}{2}}}{2\Delta\eta} = 0$$

$$(\rho JU)_{i+\frac{1}{2},j} - (\rho JU)_{i-\frac{1}{2},j} + (\rho JV)_{i,j+\frac{1}{2}} - (\rho JV)_{i,j-\frac{1}{2}} = 0 \qquad (4.8)$$

El siguiente paso será determinar los términos de la ecuación anterior, densidad, jacobiano y velocidad en los puntos correspondientes. Comenzaremos con las velocidades para lo cual se utilizan las relaciones (2.25) y (2.26).

$$U = g^{11}\phi_\xi + g^{12}\phi_\eta$$

$$V = g^{21}\phi_\xi + g^{22}\phi_\eta$$

Se va a explicar el cálculo para el primer término $U_{i+\frac{1}{2},j}$ y para el resto de las componentes de la velocidad el procedimiento será similar. Situándonos en la posición $\left(i+\frac{1}{2}, j\right)$, la variación del potencial respecto a la coordenada ξ es simplemente una diferencia centrada entre $\phi_{i,j}$ y $\phi_{i+1,j}$ pero en el caso de la variación con respecto a η tenemos que hacer la media de las discretizaciones según la coordenada η para $\xi = i+1,\ i-1$:

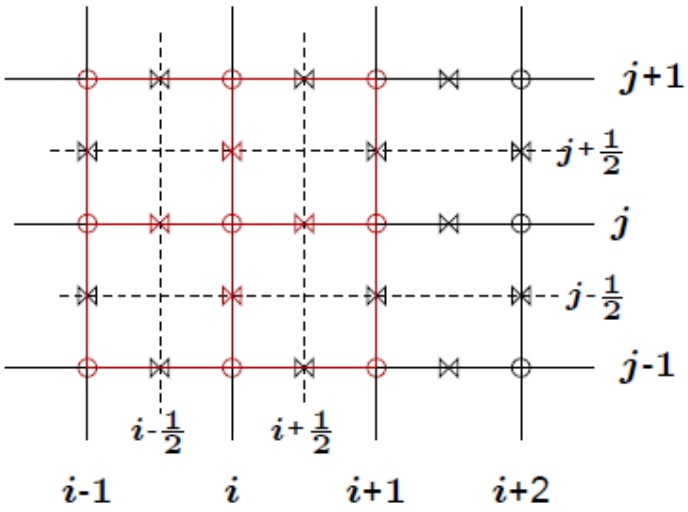


Figura 4.3.2: *Nodos empleados en el cálculo de la velocidad*

$$U_{i+\frac{1}{2},j} = g^{11}_{i+\frac{1}{2},j}\left(\frac{\phi_{i+1,j}-\phi_{i,j}}{\Delta\xi}\right) + g^{12}_{i+\frac{1}{2},j}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\phi_{i+1,j+1}-\phi_{i+1,j-1}}{2\Delta\eta} + \frac{\phi_{i,j+1}-\phi_{i,j-1}}{2\Delta\eta}\right)$$

Simplificando y calculando el resto de las componentes obtenemos:

$$U_{i+\frac{1}{2},j} = g^{11}_{i+\frac{1}{2},j}\left(\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}\right) + g^{12}_{i+\frac{1}{2},j}\,\frac{1}{4}\left(\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i+1,j-1} + \phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}\right)$$

$$U_{i-\frac{1}{2},j} = g^{11}_{i-\frac{1}{2},j}\left(\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}\right) + g^{12}_{i-\frac{1}{2},j}\,\frac{1}{4}\left(\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1} + \phi_{i-1,j+1} - \phi_{i-1,j-1}\right)$$

$$U_{i,j+\frac{1}{2}} = g^{11}_{i,j+\frac{1}{2}}\,\frac{1}{4}\left(\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j+1} + \phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}\right) + g^{12}_{i,j+\frac{1}{2}}\left(\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}\right)$$

$$U_{i,j-\frac{1}{2}} = g^{11}_{i,j-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{4}\left(\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j+1} + \phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}\right) + g^{12}_{i,j-\frac{1}{2}}\left(\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}\right)$$

$$V_{i+\frac{1}{2},j} = g^{21}_{i+\frac{1}{2},j}\left(\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}\right) + g^{22}_{i+\frac{1}{2},j}\,\frac{1}{4}\left(\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i+1,j-1} + \phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}\right)$$

$$V_{i-\frac{1}{2},j} = g^{21}_{i-\frac{1}{2},j}\left(\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}\right) + g^{22}_{i-\frac{1}{2},j}\,\frac{1}{4}\left(\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1} + \phi_{i-1,j+1} - \phi_{i-1,j-1}\right)$$

$$V_{i,j+\frac{1}{2}} = g^{21}_{i,j+\frac{1}{2}}\,\frac{1}{4}\left(\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j+1} + \phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}\right) + g^{22}_{i,j+\frac{1}{2}}\left(\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}\right)$$

$$V_{i,j-\frac{1}{2}} = g^{21}_{i,j-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{4}\left(\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j+1} + \phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}\right) + g^{22}_{i,j-\frac{1}{2}}\left(\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}\right) \qquad (4.9)$$

Para simplificar las ecuaciones y poder sustituirlas fácilmente en la ecuación potencial se ha denominado como parámetro P ha:

$$P_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{4}\left(\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i+1,j-1} + \phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}\right)$$

$$P_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{1}{4}\left(\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1} + \phi_{i-1,j+1} - \phi_{i-1,j-1}\right)$$

$$P_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\left(\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j+1} + \phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}\right)$$

$$P_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\left(\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j+1} + \phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}\right)$$

(4.10)

Definidas las velocidades se procede a su sustitución en la ecuación (4.8) y despejando el potencial se obtiene:

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{\left(\rho J g^{11}\right)^{n}_{i+\frac{1}{2},j} + \left(\rho J g^{11}\right)^{n}_{i-\frac{1}{2},j} + \left(\rho J g^{22}\right)^{n}_{i,j+\frac{1}{2}} + \left(\rho J g^{22}\right)^{n}_{i,j-\frac{1}{2}}} \left(\left(\rho J\right)^{n}_{i+\frac{1}{2},j} \left(\left(g^{12} P\right)^{n}_{i+\frac{1}{2},j} + g^{11\ n}_{i+\frac{1}{2},j} \phi^{n}_{i+1,j} \right) \right.$$
$$- \left(\rho J\right)^{n}_{i-\frac{1}{2},j} \left(g^{12\ n}_{i-\frac{1}{2},j} P^{n}_{i-\frac{1}{2},j} - g^{11\ n}_{i-\frac{1}{2},j} \phi^{n}_{i-1,j} \right) + \left(\rho J\right)^{n}_{i,j+\frac{1}{2}} \left(\left(g^{21} P\right)^{n}_{i,j+\frac{1}{2}} + g^{22\ n}_{i,j+\frac{1}{2}} \phi^{n}_{i,j+1} \right)$$
$$\left. - \left(\rho J\right)^{n}_{i,j-\frac{1}{2}} \left(\left(g^{21} P\right)^{n}_{i,j-\frac{1}{2}} + g^{22\ n}_{i,j-\frac{1}{2}} \phi^{n}_{i,j-1} \right) \right) \tag{4.11}$$

Aunque en la ecuación (4.8) del potencial no aparezcan todos los términos de velocidad escritos anteriormente, estos son necesarios para el cálculo de la densidad pues esta es función de:

$$\rho^{n}_{i\pm\frac{1}{2},j} = f\left(u^{n}_{i\pm\frac{1}{2},j}, v^{n}_{i\pm\frac{1}{2},j} \right)$$

$$\rho^{n}_{i,j\pm\frac{1}{2}} = f\left(u^{n}_{i,j\pm\frac{1}{2}}, v^{n}_{i,j\pm\frac{1}{2}} \right)$$

Para su desarrollo es necesario realizar un cambio de coordenadas para la velocidad. Como la densidad se calcula a partir de la ecuación (2.16) necesitamos conocer el cuadrado del módulo de la velocidad en coordenadas cartesianas:

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = x_{\xi} U + x_{\eta} V$$

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = y_{\xi} U + y_{\eta} V \tag{4.12}$$

$$u^2 + v^2 = U^2\left(x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2\right) + V^2\left(x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2\right) + 2UV\left(x_{\xi} x_{\eta} + y_{\xi} y_{\eta}\right)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.16):

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[1 - \frac{U^2\left(x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2\right) + V^2\left(x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2\right) + 2UV\left(x_{\xi} x_{\eta} + y_{\xi} y_{\eta}\right)}{2H_0} \right]^{1/(\gamma-1)} \tag{4.13}$$

Como se puede observar, la densidad depende de las variaciones de las coordenadas cartesianas respecto de las arbitrarias $(x_\xi, x_\eta, y_\xi, y_\eta)$ por lo que lo siguiente será discretizar esas componentes. Para ello tendremos que dividir la malla según la posición donde se encuentren los nodos pues en las fronteras interior y exterior no se podrán utilizar diferencias centradas sino que se hará uso de discretizaciones hacia atrás y hacia delante respectivamente:

Nodos interiores	**Frontera exterior**	**Frontera interior**
$x_\xi = \dfrac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2\Delta\xi}$	$x_\xi = \dfrac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2\Delta\xi}$	$x_\xi = \dfrac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2\Delta\xi}$
$x_\eta = \dfrac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2\Delta\eta}$	$x_\eta = \dfrac{-x_{i,j+2} + 4x_{i,j+1} - 3x_{i,j}}{2\Delta\eta}$	$x_\eta = \dfrac{x_{i,j-2} - 4x_{i,j-1} + 3x_{i,j}}{2\Delta\eta}$
$y_\xi = \dfrac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2\Delta\xi}$	$y_\xi = \dfrac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2\Delta\xi}$	$y_\xi = \dfrac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2\Delta\xi}$
$y_\eta = \dfrac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2\Delta\eta}$	$y_\eta = \dfrac{-y_{i,j+2} + 4y_{i,j+1} - 3y_{i,j}}{2\Delta\eta}$	$y_\eta = \dfrac{y_{i,j-2} - 4y_{i,j-1} + 3y_{i,j}}{2\Delta\eta}$

Tabla 4.3.1: *Variaciones de las coordenadas cartesianas respeto de las arbitrarias necesarias para la transformación de las ecuaciones*

Como en todos los cálculos hasta ahora se hace referencia a los nodos en el centro de las aristas entre los nodos (i, j), se requiere el cálculos del tensor métrico, jacobiano y las variaciones de las coordenadas *x* e *y* respecto a ξ y η de la tabla anterior para estos puntos. Situándonos en la posición (i, j) de la siguiente figura, determinaremos estos parámetros mediante una media entre su valor es la posición de referencia y el inmediatamente más cercano en cada una de las direcciones. Para ello será necesario el

cálculo de dos matrices para cada parámetro, una para la malla entrelazada en horizontal $\left(i \pm \frac{1}{2}, j\right)$ y otra para la malla entrelazada en vertical $\left(i, j \pm \frac{1}{2}\right)$:

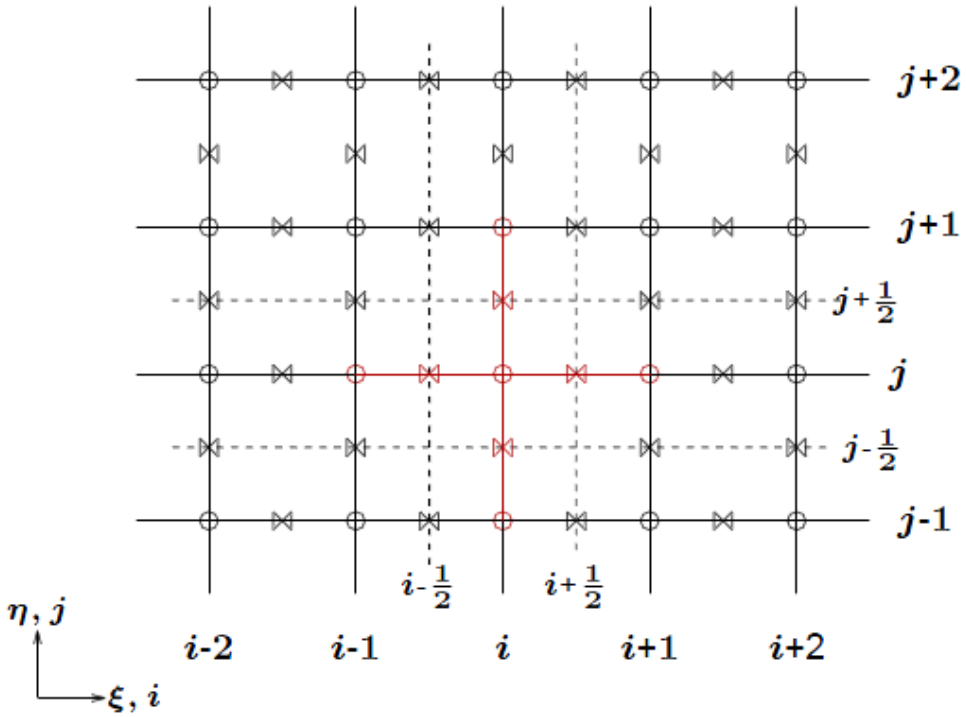


Figura 4.3.3: *Nodos empleados en el cálculo del tensor métrico y demás parámetros necesarios*

$$y_{\xi_{i+\frac{1}{2},j}} = \frac{1}{2}\left(y_{\xi_{i+1,j}} + y_{\xi_{i,j}}\right) \qquad y_{\eta_{i+\frac{1}{2},j}} = \frac{1}{2}\left(y_{\eta_{i+1,j}} + y_{\eta_{i,j}}\right)$$

$$y_{\xi_{i,j+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\left(y_{\xi_{i,j+1}} + y_{\xi_{i,j}}\right) \qquad y_{\eta_{i,j+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\left(y_{\eta_{i,j+1}} + y_{\eta_{i,j}}\right)$$

$$x_{\xi_{i+\frac{1}{2},j}} = \frac{1}{2}\left(x_{\xi_{i+1,j}} + x_{\xi_{i,j}}\right) \qquad x_{\eta_{i+\frac{1}{2},j}} = \frac{1}{2}\left(x_{\eta_{i+1,j}} + x_{\eta_{i,j}}\right)$$

$$x_{\xi_{i,j+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\left(x_{\xi_{i,j+1}} + x_{\xi_{i,j}}\right) \qquad x_{\eta_{i,j+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\left(x_{\eta_{i,j+1}} + x_{\eta_{i,j}}\right)$$

$$J_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2}\left(J_{i+1,j} - J_{i,j}\right) \qquad g^{12}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2}\left(g^{12}_{i+1,j} - g^{12}_{i,j}\right)$$

$$J_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(J_{i,j+1} - J_{i,j}\right) \qquad g^{12}_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(g^{12}_{i,j+1} - g^{12}_{i,j}\right)$$

$$g^{11}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2}\left(g^{11}_{i+1,j} - g^{11}_{i,j}\right) \qquad g^{22}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2}\left(g^{22}_{i+1,j} - g^{22}_{i,j}\right)$$

$$g^{11}_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(g^{11}_{i,j+1} - g^{11}_{i,j}\right) \qquad g^{22}_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(g^{22}_{i,j+1} - g^{22}_{i,j}\right) \tag{4.14}$$

4.3.2 Condiciones de contorno

Como la condición en la frontera exterior no precisa de ninguna discretización pues solo es necesario aplicar la fórmula (2.30) se procederá a la discretización de la ecuación (2.29):

$$\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta\xi} g^{21} + \frac{\phi_{i,j-2} - 4\phi_{i,j-1} + 3\phi_{i,j}}{2\Delta\eta} g^{22} = 0$$

Despejando el valor del potencial se obtiene:

$$\phi_{i,j} = \frac{1}{3}\left(4\phi_{i,j-1} - \phi_{i,j-2} - \frac{g^{21}}{g^{22}}\left(\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}\right)\right) \tag{4.15}$$

En la discontinuidad del potencial generada en el borde de ataque del perfil $(\xi = N)$ es necesario imponer la ecuación de Kutta de manera que:

$$\phi_{N,j} = \phi_{1,j} + \Gamma \tag{4.16}$$

4.3.3 Circulación del perfil: determinación de Γ

En el cálculo de la circulación se utilizará un proceso iterativo imponiendo igualdad de velocidad en la superficie inferior y superior al abandonar el perfil. Esto generalmente se traduce en que se anule la velocidad en el borde de salida, pues estamos buscando determinar el valor de la circulación para $\Gamma = \Gamma_{Kutta}$ en un perfil con borde de salida anguloso. Como en la superficie del contorno la velocidad normal es cero, basta con imponer la velocidad tangencial nula en el borde de ataque:

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{d\xi=0} = \frac{-1}{\left(g^{11}\right)^{1/2}}\left(\phi_\xi g^{11} + \phi_\eta g^{12}\right) = 0 \tag{4.17}$$

$$\frac{\phi_{i+1,j}-\phi_{i-1,j}}{2\Delta\xi}g^{11}+\frac{\phi_{i,j-2}-4\phi_{i,j-1}+3\phi_{i,j}}{2\Delta\eta}g^{12}=0$$

Si tenemos en cuenta que *i=1* y *j=M* en el borde de salida entonces $\phi_{i-1,j}\equiv\phi_{N-1,j}+\Gamma$:

$$\Gamma=\phi_{N-1,M}-\phi_{2,M}-\frac{g^{12}}{g^{11}}\left(\phi_{1,M-2}-4\phi_{1,M-1}+3\phi_{1,M}\right) \tag{4.18}$$

4.4 Campo de velocidades y líneas de corriente

Para determinar el valor de la función de corriente procedemos a integrar las ecuaciones que se encuentran referenciadas en (2.12):

$$\psi_{i,j-1}=\psi_{i,j}+\rho JU\Delta\eta \tag{4.19}$$

$$\psi_{i+1,j}=\psi_{i,j}-\rho JV\Delta\xi \tag{4.20}$$

Donde:

$$U=\xi_x u+\xi_y v=\frac{1}{J}\left(y_\eta u-x_\eta v\right)\Rightarrow JU=y_\eta u-x_\eta v$$

Como una línea de corriente bordea la superficie, el valor de la función de corriente se fija a un valor constante en ella, por ejemplo cero. Para poder reverenciarnos en este dato utilizaremos la primera ecuación.

Para poder aplicar las fórmulas debemos calcular antes las velocidades en los nodos (i,j) pues los valores que conoceríamos hasta ahora están determinados en los nodos intercalados, $\left(i\pm\frac{1}{2},j\pm\frac{1}{2}\right)$. Si utilizamos las matrices de velocidades ya determinadas en el cálculo del potencial, los nodos correspondientes al borde de ataque, borde de salida y discontinuidad no aparecerían representados. Además el coste computacional de volver a calcular la velocidad es pequeño al encontrarse en el postproceso.

Para calcular la función de corriente es necesario el cálculo del campo de velocidades. Utilizando las fórmulas que relacionan el potencial con las componentes de la velocidad y las relaciones de las fórmulas (2.4) y (2.24) obtenemos las componentes en coordenadas cartesianas de los nodos interiores:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \phi_\xi \xi_x + \phi_\eta \eta_x = \frac{1}{J}\left(\phi_\xi y_\eta - \phi_\eta y_\xi\right) \tag{4.21}$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \phi_\xi \xi_y + \phi_\eta \eta_y = \frac{1}{J}\left(-\phi_\xi x_\eta + \phi_\eta x_\xi\right) \tag{4.22}$$

A continuación se procede a discretizar las ecuaciones:

$$u_{i,j} = \frac{1}{J}\left(\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta\xi} y_\eta - \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta\eta} y_\xi\right) \tag{4.23}$$

$$v_{i,j} = \frac{1}{J}\left(-\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta\xi} x_\eta + \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta\eta} x_\xi\right) \tag{4.24}$$

4.4.1 Frontera exterior

Como el campo potencial es conocido mediante las ecuaciones (2.4) se pueden determinar las velocidades en coordenadas cartesianas:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = V_\infty \cos\alpha + \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{\sqrt{1-M_\infty^2}}{1+\left(1-M_\infty^2\right)\tan^2(\theta-\alpha)}\left(1+\tan^2(\theta-\alpha)\right)\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{-y}{x}\right)$$

$$u = V_\infty \cos\alpha + \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{\sqrt{1-M_\infty^2}}{1+\left(1-M_\infty^2\right)\tan^2(\theta-\alpha)}\left(1+\tan^2(\theta-\alpha)\right)\frac{-xy}{R^2}$$

(4.25)

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = V_\infty sen\alpha + \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{\sqrt{1-M_\infty^2}}{1+\left(1-M_\infty^2\right)\tan^2(\theta-\alpha)}\left(1+\tan^2(\theta-\alpha)\right)\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = V_\infty sen\alpha + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\sqrt{1-M_\infty^2}}{1+\left(1-M_\infty^2\right)\tan^2(\theta-\alpha)} \left(1+\tan^2(\theta-\alpha)\right)\frac{x}{R^2}$$

(4.26)

Siendo R el radio del círculo exterior.

4.4.2 Frontera interior

Aplicando las fórmulas anteriores (4.21) y (4.22) y sustituyendo la condición de velocidad normal nula (2.29) impuesta en el cálculo del potencial, se obtiene la siguiente relación:

$$\phi_\eta = -\frac{g^{21}}{g^{22}}\phi_\xi \tag{4.27}$$

Sustituyéndola obtenemos el siguiente resultado:

$$u = \frac{1}{J}\phi_\xi\left(y_\eta + \frac{g^{21}}{g^{22}}y_\xi\right) = \frac{1}{J}\frac{\phi_{i+1,j}-\phi_{i-1,j}}{2\Delta\xi}\left(y_\eta + \frac{g^{21}}{g^{22}}y_\xi\right) \tag{4.28}$$

$$v = -\frac{1}{J}\phi_\xi\left(x_\eta + \frac{g^{21}}{g^{22}}x_\xi\right) = -\frac{1}{J}\frac{\phi_{i+1,j}-\phi_{i-1,j}}{2\Delta\xi}\left(x_\eta + \frac{g^{21}}{g^{22}}x_\xi\right) \tag{4.29}$$

4.5 Método de cálculo

La resolución de las ecuaciones se realiza mediante un método iterativo en el que se hace uso de la iteración anterior para obtener la siguiente. Entre otros se encuentran: Jacobi, Gauss-Seidel, SOR. Las diferencias entre el método de Jacobi y el de Gauss-Seidel consisten en que este último hace uso en parte de valores actualizados en la nueva iteración, mientras que el método de Jacobi solo hace referencia a los valores de la anterior iteración. En la programación se utilizará el método de Gauss-Seidel junto con el método de sobrerelajación SOR que mediante el uso un factor ω permite corregir el valor obtenido tras la iteración:

Gauss-Seidel $$u^{n+1} = au^{n+1} + bu^{n} + c \tag{4.28}$$

Jacobi $$u^{n+1} = au^{n} + b \tag{4.29}$$

SOR $$u^{n+1} = \omega u^{n+1} + (1-\omega)u^{n} \tag{4.30}$$

Para el cálculo de la malla utilizaremos un factor de relajación de $\omega = 1.8$ para que la convergencia sea más rápida mientras que en el cálculo del potencial tomamos un factor menor que 1.

CAPÍTULO 5:

DESARROLLO DEL PROGRAMA

En los capítulos anteriores se ha desarrollado la teoría de flujo potencial que permitirá realizar un estudio del flujo y calcular las características aerodinámicas del perfil y el campo de velocidades alrededor del mismo. Como ya se mencionó en el desarrollo del proyecto, en el programa desarrollado no se han considerado los efectos de la viscosidad y los efectos de la compresibilidad del fluido están limitados a flujos subsónicos.

En este capítulo se desarrollarán los pasos seguidos en la programación de cada una de las funciones en las que se ha dividido el programa haciendo referencia a las ecuaciones utilizadas.

5.1 Diagrama de flujo del programa

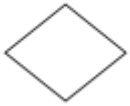
La programación de las ecuaciones se ha realizado completamente en MATLAB y a la podemos dividir en 7 funciones recogidas en una función global denominada Programa.

Las dos primeras funciones (Perfil y Malla) permiten representar la superficie del perfil y el mallado adaptado a esta. En el siguiente paso calculamos el potencial de velocidades y la circulación mediante la función Potencial. Una vez conocido el potencial se procederá a determinar los vectores velocidad (función Velocidades), con los cuales se calculará el coeficiente de presión (función Presiones). Conocidas las presiones sobre la superficie se determinarán los coeficientes aerodinámicos (función Coeficientes) y las líneas de corriente (función Corriente).

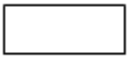
Todos estos cálculos solo se llevarán a cabo si el fluido cumple con las hipótesis previas que se han considerado $\left(M_\infty < 0.8 \text{ y } R_e < 10^7\right)$.

La nomenclatura utilizada en el diagrama de la siguiente figura es la siguiente:

Indica un proceso alternativo


Indica decisión

Indica datos


Indica un proceso

Indica almacenamiento de datos

Indica almacenamiento interno

Indica que requiere datos previamente almacenados

En la siguiente figura se presenta un diagrama que determina la secuencia que sigue el programa.

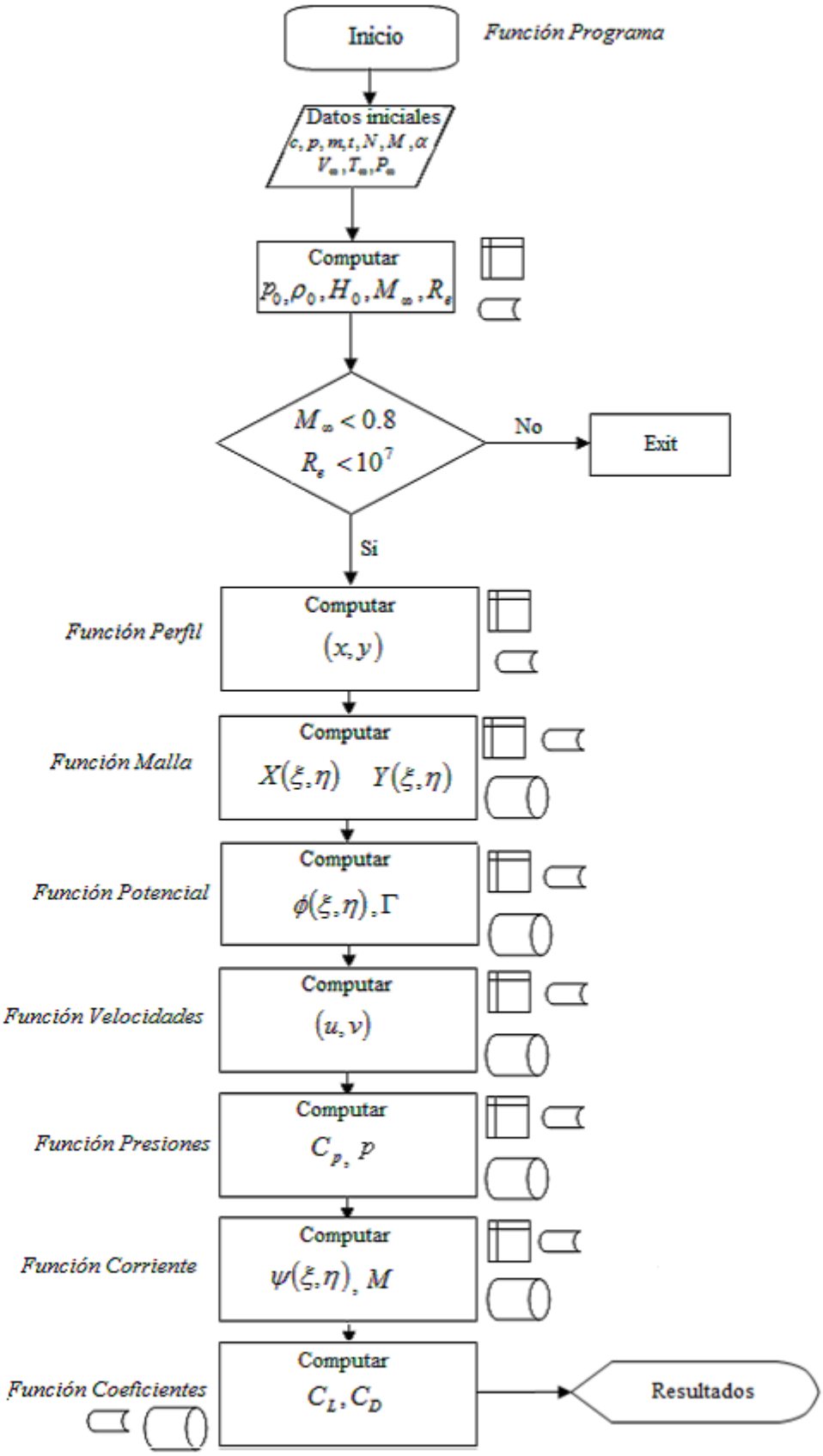


Figura 5.1.1: *Diagrama de flujo del programa*

5.2 Algoritmos para el programa de cómputo

A continuación se van a recoger todos los algoritmos utilizados en la programación y todos ellos están directamente relacionados con la función programa.

5.2.1 Algoritmo para la función programa

El algoritmo de la función programa contiene la estructura lógica de todo la programación. La función se denomina Programa.

DATOS DE ENTRADA	Datos característicos del perfil NACA, número de líneas coordenadas, condiciones del fluido, velocidad y ángulo de incidencia	$N, M, \alpha, c, p, m, t,$ $V_\infty, T_\infty, p_\infty$
Paso 1	Comprobar las condiciones del fluido	$M_\infty < 0.8 \,\&\, \mathrm{Re} < 10^7$
Paso 2	Invocar la función Perfil	(x, y)
Paso 3	Invocar la función Malla	$X(\xi,\eta)$ $Y(\xi,\eta)$
Paso 4	Invocar función Potencial	$\phi(\xi,\eta), \Gamma$
Paso 5	Invocar función Velocidades	(u, v)
Paso 6	Invocar función Presiones	C_p, p
Paso 7	Invocar función Corriente	$\psi(\xi,\eta), M$
Paso 7	Invocar función Coeficientes	C_L, C_D
DATOS DE SALIDA	Representación de las líneas equipotenciales, vectores velocidad, líneas de corriente, líneas isóbaras y contornos de Mach. Calculo de la resistencia y sustentación.	$\phi, \psi, u, v, C_L, C_D, C_p, p, M$

Tabla 5.2.1: *Algoritmo de la función programa*

5.2.2 Algoritmo del perfil

Este algoritmo contiene la estructura lógica de la función utilizada en la generación de la superficie del perfil aerodinámico. La función se llama Perfil y recoge las fórmulas vistas en el apartado 1.1 (ecuaciones (1.2)-(1.10))

DATOS DE ENTRADA	Datos característicos del perfil NACA y número de líneas $\xi = const$	c,m,p,t,N
Paso 1	Determinamos el tamaño de los vectores *Yc* y *Yt* (posición de la línea media y el espesor)	$\frac{N+1}{2}$
Paso 2	Aplicamos la relación siguiente para distribuir los puntos de la superficie	$x = \frac{1}{2}(1-\cos(180\cdot\vartheta))$ con $0 < \vartheta < 1$
Paso 3	Distribuir las ecuaciones (1.7) a (1.10) según la posición ξ donde se deban situar.	$\left.\begin{matrix}(x_U, y_U)\\(x_L, y_L)\end{matrix}\right\} \rightarrow (x, y)$
DATOS DE SALIDA	Componentes (*x,y)* de la superficie del perfil	(x, y)

Tabla 5.2.2: *Algoritmo de la función perfil*

5.2.3 Algoritmo de la malla

Este algoritmo contiene la estructura lógica que permite calcular la posición de las líneas coordenadas en coordenadas arbitrarias (ξ, η) . La función se denomina Malla, las fórmulas discretizadas que se han utilizado en su desarrollo se encuentran en el capítulo 4, ecuaciones (4.1) – (4.6).

DATOS DE ENTRADA	Coordenadas de la superficie, número de líneas coordenadas	N,M,x,y
Paso 1	Determinamos las posiciones en la superficie y la frontera exterior.	$\eta = M$ $\eta = 1$
Paso 2	Calculamos un valor inicial para el resto de los nodos mediante una relación lineal entre los valores de la frontera.	$\phi_{i,j}^{n=0}$
Paso 3	Utilizamos las funciones P y Q para modificar la densidad de las líneas en la superficie $\eta_k = M$.	$P(\xi,\eta)$ $Q(\xi,\eta)$
Paso 4	Iteramos hasta conseguir una tolerancia impuesta. Se aplica el método SOR para converger más rápidamente $(\omega = 1.8)$	$X(\xi,\eta)$ $Y(\xi,\eta)$
DATOS DE SALIDA	Posición de los nodos de la malla	$X(\xi,\eta)$ $Y(\xi,\eta)$

Tabla 5.2.3: *Algoritmo de la función malla*

5.2.4 Algoritmo de la función potencial

Este algoritmo contiene la estructura lógica que permite calcular el campo potencial de velocidades mediante una serie de ecuaciones discretizadas demostradas anteriormente. La siguiente tabla muestra paso a paso la aplicación de dichas ecuaciones. La función se denomina Potencial.

DATOS DE ENTRADA	Condiciones del fluido, número de líneas coordenadas, velocidades en coordenadas cartesianas y las posiciones (x,y) de los nodos.		$N, M, \alpha, V_\infty, H_0, d_0, \gamma, M_\infty, X, Y$
Paso 1	Calculamos los parámetros necesarios para aplicar las ecuaciones en los nodos $\left(i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}\right)$		$J, g^{11}, g^{12}, g^{21}, g^{22}$ $\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \eta}$
Paso 2	Damos un valor inicial a la circulación y a la matriz del campo potencial de velocidad		$\Gamma = 0.8$ $\phi_{i,j} = 0$
Paso 3	Calculamos las componentes de la velocidad y la densidad en los nodos $\left(i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}\right)$. Solo se aplica en los nodos interiores salvo (N, η) y $(1, \eta)$		$U_{i\pm\frac{1}{2},j}, V_{i\pm\frac{1}{2},j}, \rho_{i\pm\frac{1}{2},j}$ $U_{i,j\pm\frac{1}{2}}, V_{i,j\pm\frac{1}{2}}, \rho_{i,j\pm\frac{1}{2}}$
Paso 4	Aplicamos la condición de Kutta en la discontinuidad $(\xi = N, \eta)$. Ecuación (4.16).		$\phi_{N,j}$
Paso 5	Aplicamos las condiciones en las fronteras	Interior Ec.(4.15)	$\phi_{\xi,M}$
		Exterior Ec.(2.3)	$\phi_{\xi,1}$
Paso 6	Definimos el valor de la circulación en función del potencial. Ec. (4.18)		Γ
Paso 7	Iteramos hasta conseguir una tolerancia impuesta utilizando el método SOR para converger más rápidamente $(\omega = 1.8)$		$\phi(\xi, \eta), \Gamma$
DATOS DE SALIDA	Función potencial y la circulación		$\phi(\xi, \eta), \Gamma$

Tabla 5.2.4: *Algoritmo de la función potencial*

5.2.5 Algoritmo del campo de velocidades

Este algoritmo contiene la estructura lógica que permite calcular los vectores velocidad en coordenadas cartesianas dividiendo su cálculo en tres regiones. La función se denomina Velocidades.

DATOS DE ENTRADA	Condiciones del fluido, número de líneas coordenadas, las posiciones (x,y) de los nodos, velocidad, número de Mach , ángulo de ataque y potencial.	$N, M, \alpha, \vartheta, V_\infty, \phi$ Γ, M_∞ ,X,Y
Paso 1	Aplicamos las ecuaciones (4.28 y 4.29) para calcular las velocidades en la superficie	$u(\xi, M)$ $v(\xi, M)$
Paso 2	Aplicamos las ecuaciones (4.23 y 4.24) en los nodos interiores	$u(\xi, \eta)$ $v(\xi, \eta)$
Paso 3	Aplicamos las ecuaciones (4.25 y 4.26) y calculamos la condición en la frontera exterior	$u(\xi, 1)$ $v(\xi, 1)$
DATOS DE SALIDA	Campo de velocidades en coordenadas cartesianas	(u, v)

Tabla 5.2.5: *Algoritmo de la función velocidad*

5.2.6 Algoritmo de las líneas isobaras

Este algoritmo contiene la estructura lógica que permite calcular el coeficiente de presión y la presión alrededor del perfil. La función se denomina Presiones.

DATOS DE ENTRADA	Número de líneas coordenadas, velocidades en coordenadas cartesianas y velocidad de incidencia de la corriente	$N, M, u, v, V_\infty, p_\infty$ $p_0, H_0, d_0, d_\infty \gamma$
Paso 1	Cálculo del cuadrado del módulo de la velocidad	$u^2 + v^2$
Paso 2	Aplicación de la fórmula (2.5) y calculamos la presión	p

Paso 3	Aplicación de la fórmula (3.6) para adimensionalizar la presión.	C_p
DATOS DE SALIDA	Coeficiente de presión	C_p, p

Tabla 5.2.6: *Algoritmo de la función presiones*

5.2.7 Algoritmo de la función de corriente

Este algoritmo contiene la estructura lógica que permite calcular la función de corriente a partir de los valores de velocidad y densidad. Determina además los valores del número de Mach alrededor del perfil. La función se denomina Corriente.

DATOS DE ENTRADA	Condiciones del fluido, número de líneas coordenadas, velocidades en coordenadas cartesianas y las posiciones (x,y) de los nodos.	H_0, d_0, γ, p N, M, X, Y, u, v
Paso 1	Como la función de corriente es nula en la superficie, inicializamos toda la matriz a ceros.	$\psi_{i,j} = 0$
Paso 2	Calculamos el valor de JU a partir de la velocidad en coordenadas cartesianas y el valor de la densidad en los nodos (i, j)	$(JU)_{i,j}$ $\rho_{i,j}$
Paso 3	Sustituimos en la fórmula (4.19) y obtenemos el valor de la corriente	$\psi_{i,j}$
Paso 4	Calculamos el número de Mach en todos los nodos	$M_{i,j}$
DATOS DE SALIDA	La función de corriente y el número de Mach	ψ, M

Tabla 5.2.7: *Algoritmo de la función corriente*

5.2.8 Algoritmo de los coeficientes aerodinámicos

Este algoritmo contiene la estructura lógica que permite calcular los valores de los coeficientes aerodinámicos: la resistencia y la sustentación del perfil. La función se denomina Coeficientes.

DATOS DE ENTRADA	Coeficiente de presiones, ángulo de ataque, posición de los nodos y líneas coordenadas.	C_p, N, M, X, Y, α
Paso 1	Descomponemos la fuerza según la coordenada vertical y horizontal. Ec. (3.14)	F_x, F_y
Paso 2	Calculamos el coeficiente de sustentación. Ec. (3.15)	C_L
Paso 3	Calculamos el coeficiente de resistencia. Ec.(3.16)	C_D
DATOS DE SALIDA	Coeficiente de sustentación y resistencia	C_L, C_D

Tabla 5.2.8: *Algoritmo de la función coeficientes*

CAPÍTULO 6:

RESULTADOS

En el presente capítulo se realizará un análisis de los resultados obtenidos con valores experimentales obtenidos de el libro 'Theory of wing sections'. Se realizará un estudio completo para un perfil simétrico y otro asimétrico para lo cual se representarán las líneas equipotenciales, las líneas de corriente, las líneas isóbaras, la variación de la presión en la superficie del perfil y los contornos de Mach. También se determinarán los valores de los coeficientes de sustentación y resistencia y el valor de la circulación alrededor del perfil y se estudiará su variación según el número de Mach lejos del perfil y el ángulo de ataque.

6.1 Estudio del perfil NACA 0012

En este apartado se analizarán los resultados obtenidos del movimiento del flujo alrededor de un perfil aerodinámico simétrico con ángulo de ataque cero para observar la simetría de las gráficas y comprobar la precisión del programa.

Las condiciones de temperatura, presión y velocidad utilizadas en el cálculo se encuentran en la siguiente tabla:

Angulo de ataque, α	Temperatura T_∞	Presión p_∞	Velocidad V_∞
0º	*300K*	*101300 Pa*	*10 m/s*

Tabla 6.1.1: *Condiciones para el estudio del perfil NACA 0012*

A continuación se encuentran representadas las gráficas obtenidas tras la ejecución del programa.

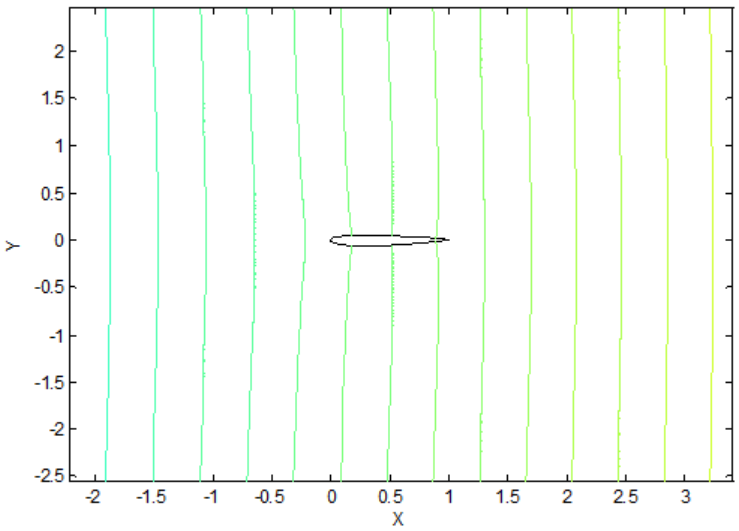


Figura 6.1.1: *Líneas equipotenciales NACA 0012*

En la figura 6.1.1 se observan las líneas equipotenciales. Como el flujo no tiene inclinación, las líneas equipotenciales son aproximadamente verticales, curvándose ligeramente al atravesar el perfil aerodinámico. Tras el borde de salida las líneas continúan sin modificarse debido a la discontinuidad vista anteriormente.

Como vimos anteriormente en el desarrollo teórico, la circulación se produce inicialmente al existir una asimetría producida por el ángulo de ataque o la superficie del perfil que genera en el arranque un punto de remanso en el extradós. En nuestro caso, al ser simétrico, las velocidades tanto en el intradós como en el extradós serán idénticas (figura 6.1.3) y el punto de remanso se generaría en el borde de salida por lo que la circulación generada es nula.

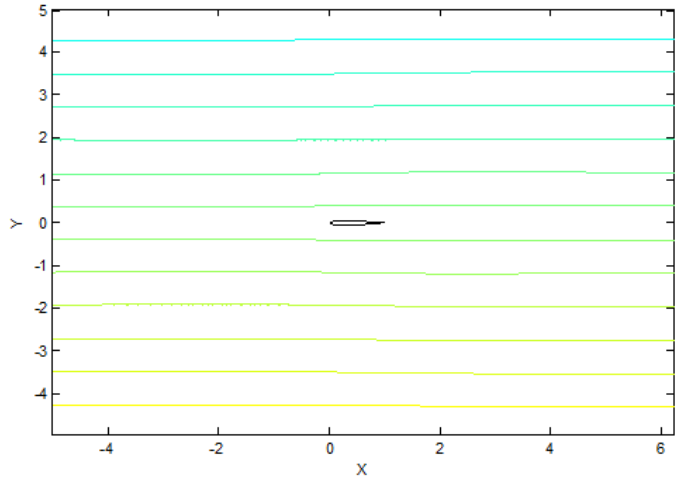


Figura 6.1.2: *Líneas de corriente NACA 0012*

Como se puede observar en la figura anterior, las líneas de corriente atraviesan el campo fluido de forma que el vector de velocidad del flujo en todos y cada uno de los puntos de la línea de corriente es tangente a la línea en ese instante. Como el flujo es estacionario, las líneas de corriente no se ven modificadas de un instante a otro y la partícula localizada en una de ellas permanecerá en la misma línea de corriente.

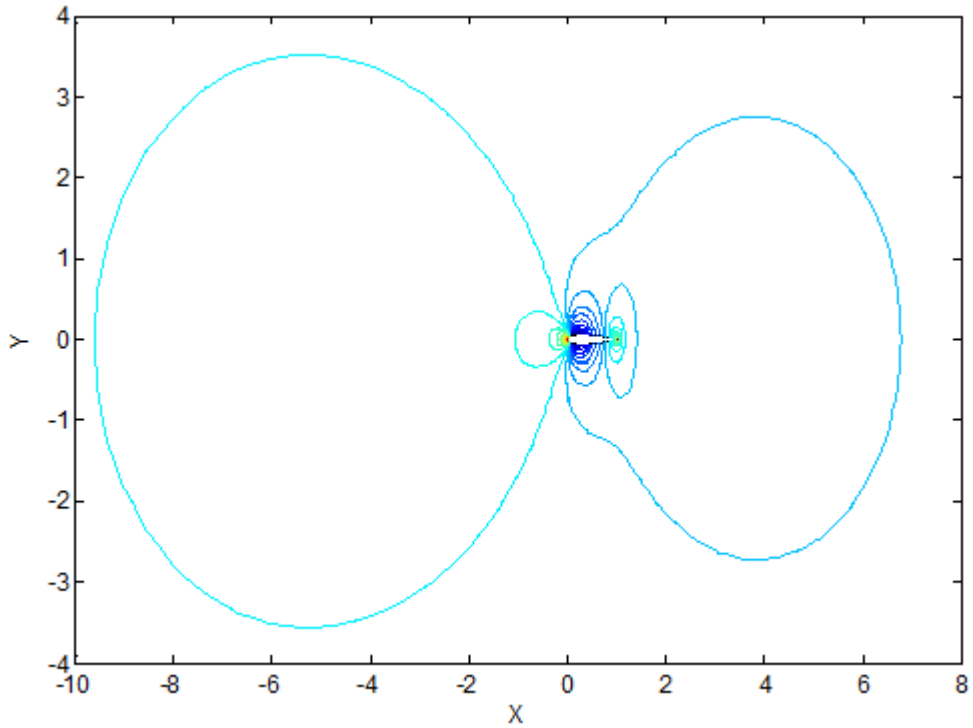


Figura 6.1.3: *Líneas isóbaras NACA 0012 (a)*

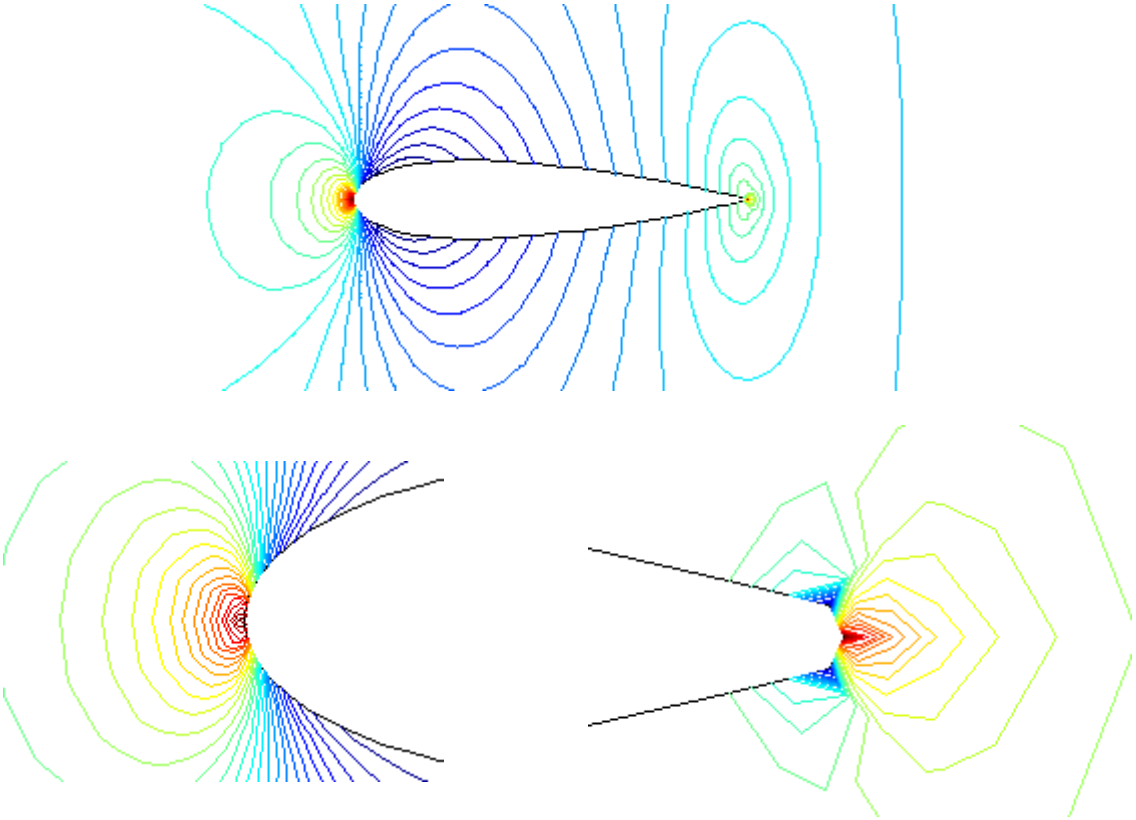


Figura 6.1.4: *Líneas isóbaras NACA 0012 (b)*

La simetría del perfil se puede apreciar fácilmente en la distribución de presiones y contornos de Mach. En el borde de ataque y de salida se pueden observar dos puntos de remanso donde la velocidad se anula y la presión es máxima.

Como la velocidad y la presión están relacionadas por medio de la ecuación de Bernoulli los contornos de Mach que se encuentran a continuación son idénticos a las líneas isobaras pero con los valores invertidos.

El cálculo de los vectores velocidad no se ha representado en el trabajo porque debido al gran número de nodos y la longitud de los vectores no se veía con claridad pero si se encuentra visible en la ejecución del programa.

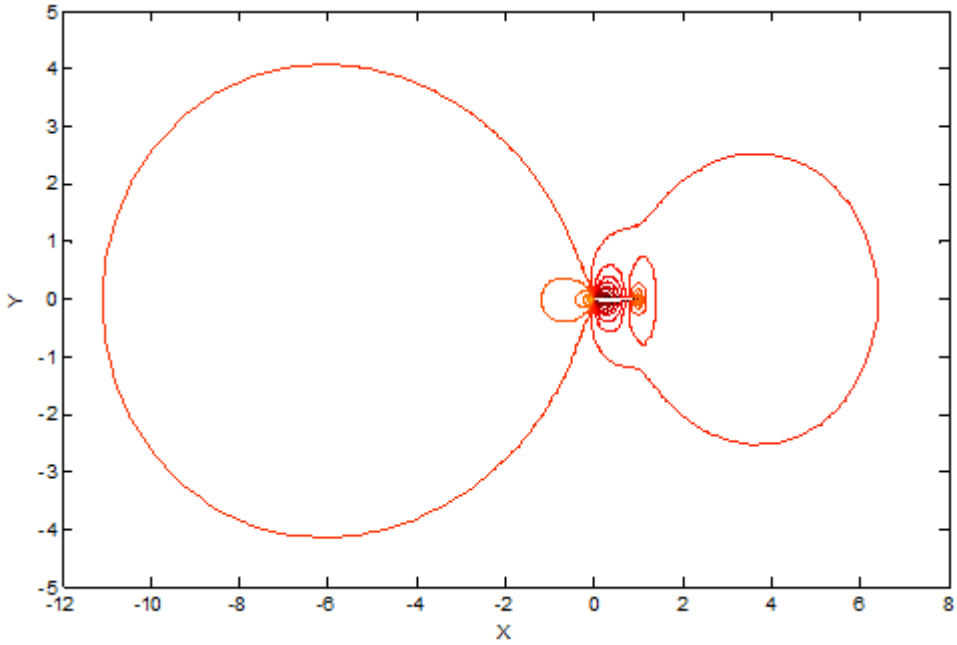


Figura 6.1.5: *Contornos de Mach NACA 0012 (a)*

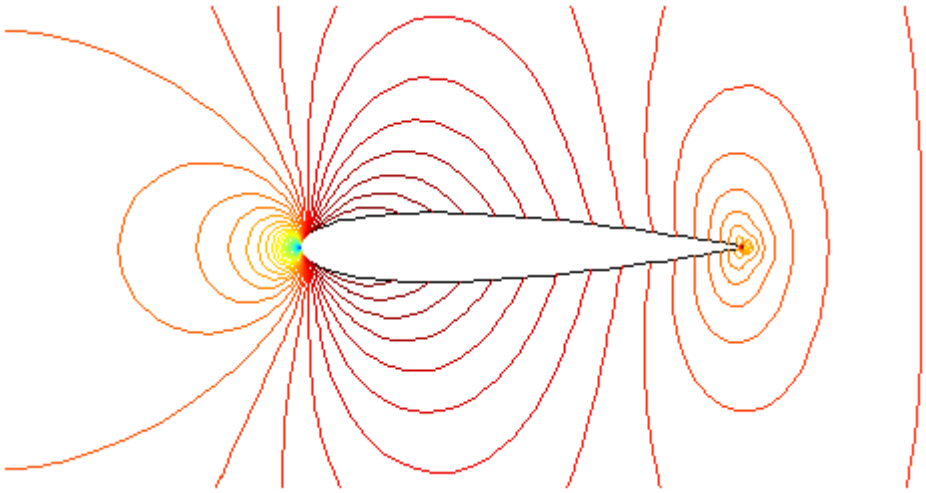


Figura 6.1.6: *Contornos de Mach NACA 0012 (b)*

Los resultados obtenidos tras la ejecución del programa aparecen a continuación. Los resultados se mostrarán junto con el número de Mach y el número de Reynolds para comprobar que se encuentran dentro del rango establecido

Coeficiente de sustentación, C_L	Coeficiente de resistencia, C_D	Circulación, Γ	Número de Mach, M_∞	Número de Reynolds, Re
0.0054	*-0.0123*	*-0.0261*	*0.0288*	$6.9105 \cdot 10^5$

Tabla 6.1.2: *Resultados obtenidos en el estudio del perfil NACA 0012*

Como aparece en los resultados, tanto el coeficiente de sustentación y el coeficiente son prácticamente cero. También se puede comprobar este resultando observando la figura 6.1.8 donde las fuerzas de presión en el intradós son prácticamente iguales a las fuerzas de presión en el extradós.

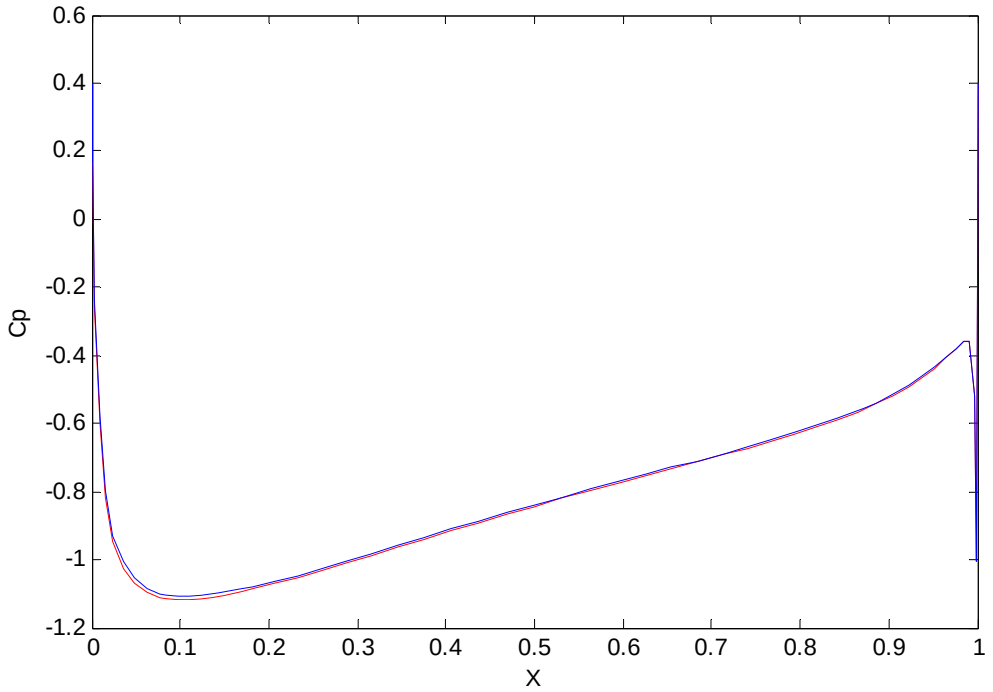


Figura 6.1.7: *Presión ejercida sobre la superficie NACA 0012*

6.2 Estudio del perfil NACA 2412

Ahora se realizará el análisis para un perfil asimétrico con un ángulo de ataque moderado para que no exista desprendimiento de la capa límite.

Las condiciones de temperatura, presión y velocidad utilizadas en el cálculo se encuentran en la siguiente tabla:

Angulo de ataque, α	Temperatura T_∞	Presión p_∞	Velocidad V_∞
5º	*300K*	*101300 Pa*	*40 m/s*

Tabla 6.2.1: *Condiciones para el estudio del perfil NACA 2412*

A continuación se encuentran representadas las gráficas obtenidas tras la ejecución del programa. En la figura 6.2.1 se observan las líneas equipotenciales que se encuentran inclinadas 5º debido al ángulo de ataque y se puede apreciar tras el borde de salida el salto producido en la discontinuidad debido a la circulación.

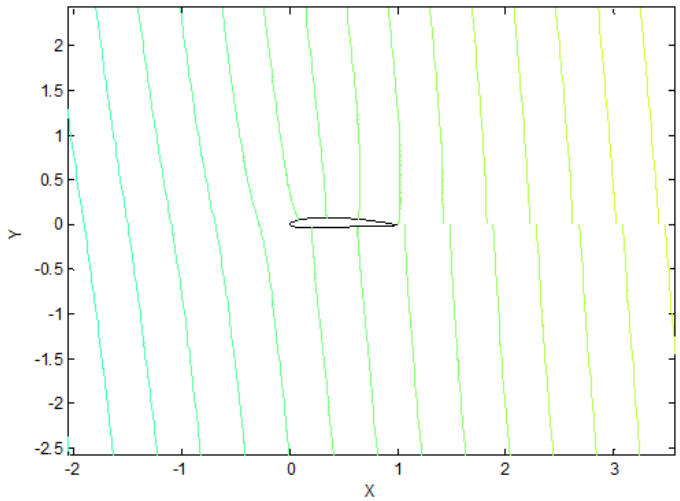


Figura 6.2.1: *Líneas equipotenciales NACA 2412*

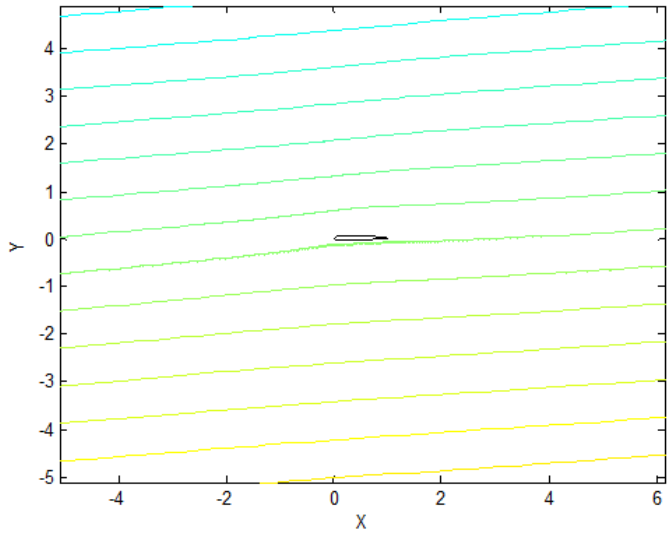


Figura 6.2.2: *Líneas de corriente NACA 2412*

En las líneas isóbaras se distingue en el intradós, cerca del borde de ataque, una zona donde la presión es máxima: un punto de remanso. El flujo que atraviesa el borde de ataque bordeando el perfil experimenta una gran aceleración generándose una zona de baja presión (succión) mientras que en el intradós se genera una sobrepresión.

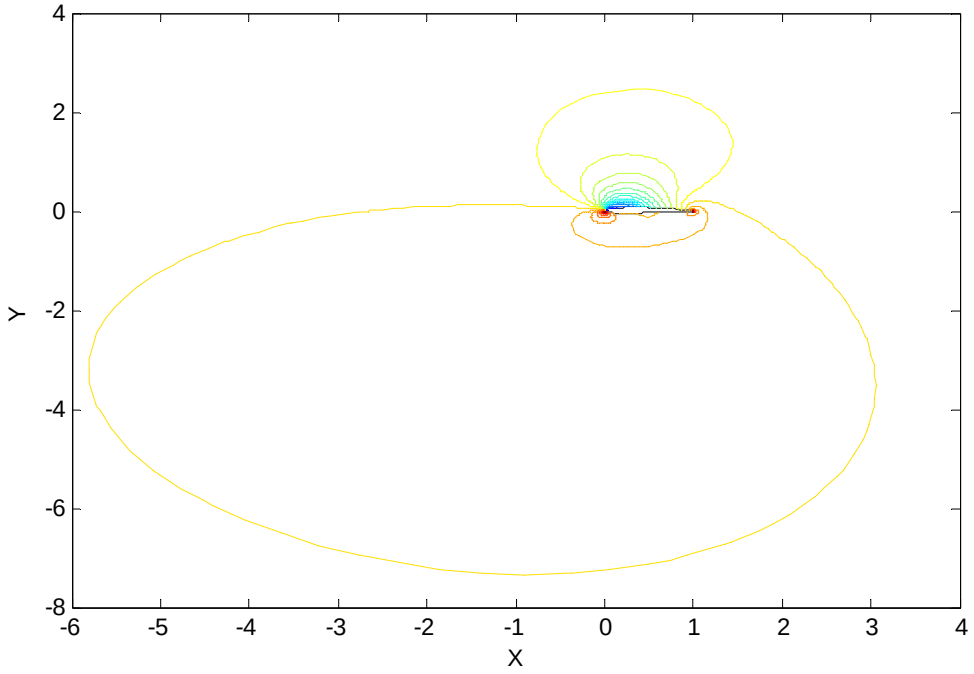


Figura 6.2.3: *Líneas isóbaras NACA 2412 (a)*

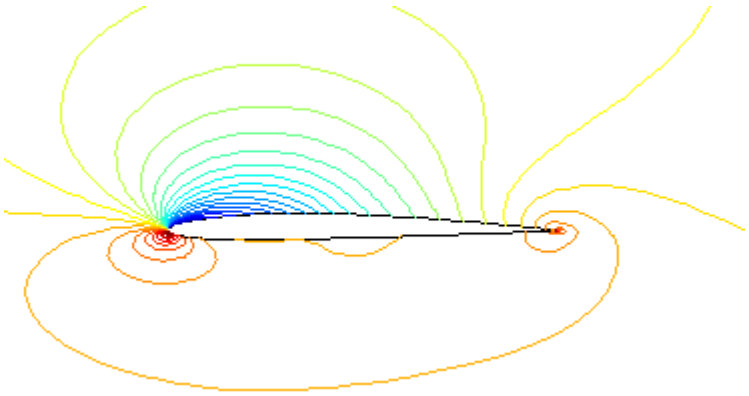


Figura 6.2.4: *Líneas isóbaras NACA 2412 (b)*

A continuación se encuentran representados los contornos de Mach que guardan la misma relación que las líneas isóbaras salvo que con los colores invertidos. Ahora en el

borde de ataque, alrededor del punto de remanso se encuentra una zona de bajas velocidades mientras que en el extradós la velocidad se hace máxima.

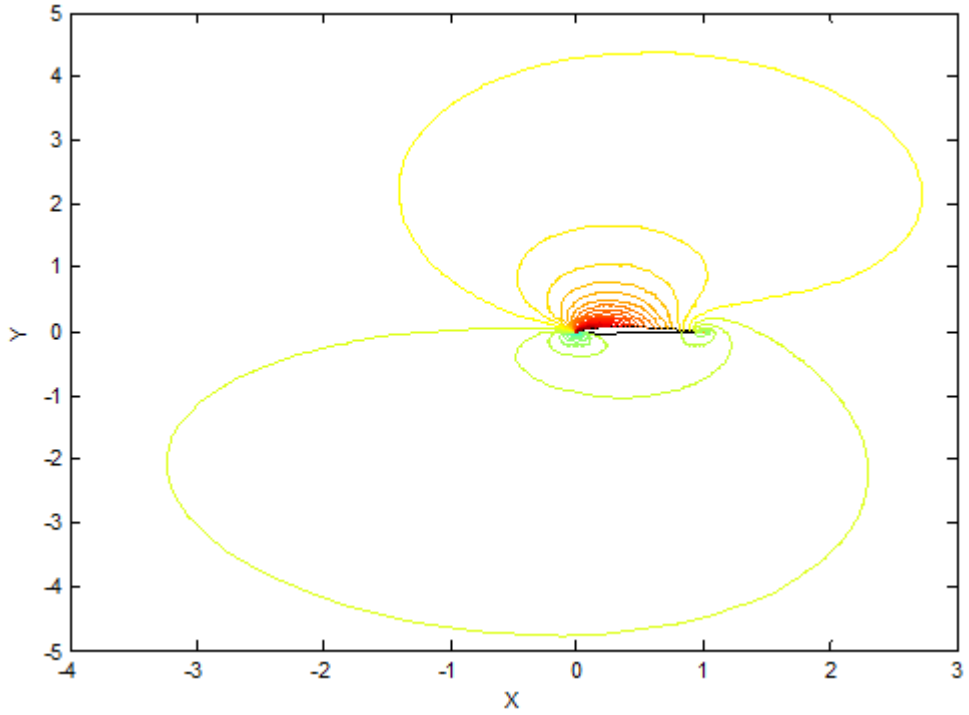


Figura 6.2.5: *Contornos de Mach NACA 2412 (a)*

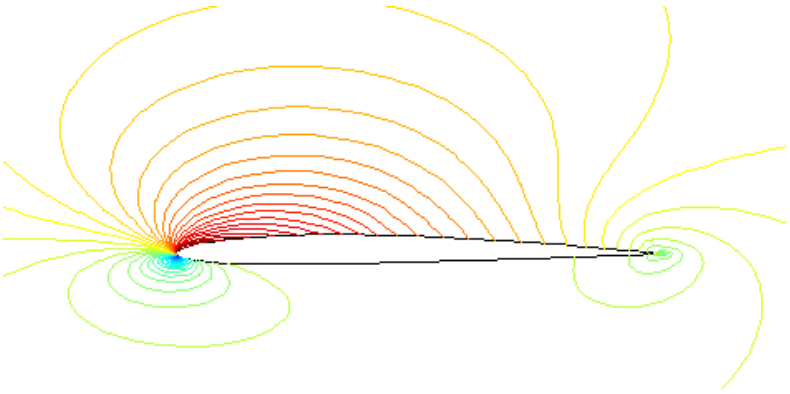


Figura 6.2.6: *Contornos de Mach NACA 2412 (b)*

Los resultados numéricos obtenidos son:

Coeficiente de sustentación, C_L	Coeficiente de resistencia, C_D	Circulación, Γ	Número de Mach, M_∞	Número de Reynolds, Re
0.8956	*-0.0016*	*-21.0103*	*0.1439*	$3.4552 \cdot 10^6$

Tabla 6.2.2: *Resultados obtenidos en el estudio del perfil NACA 2412*

Comprobando los resultados obtenidos para 5º de ángulo de ataque se puede ver que aproximadamente es correcto. Las fuerzas de presión del intradós (rojo) y del extradós (azul) aparecen representadas en la siguiente gráfica. La variación de presión es aproximadamente lineal en el extradós mientras que en el intradós es máxima al principio disminuyendo hasta mantenerse aproximadamente constante hasta el borde de salida.

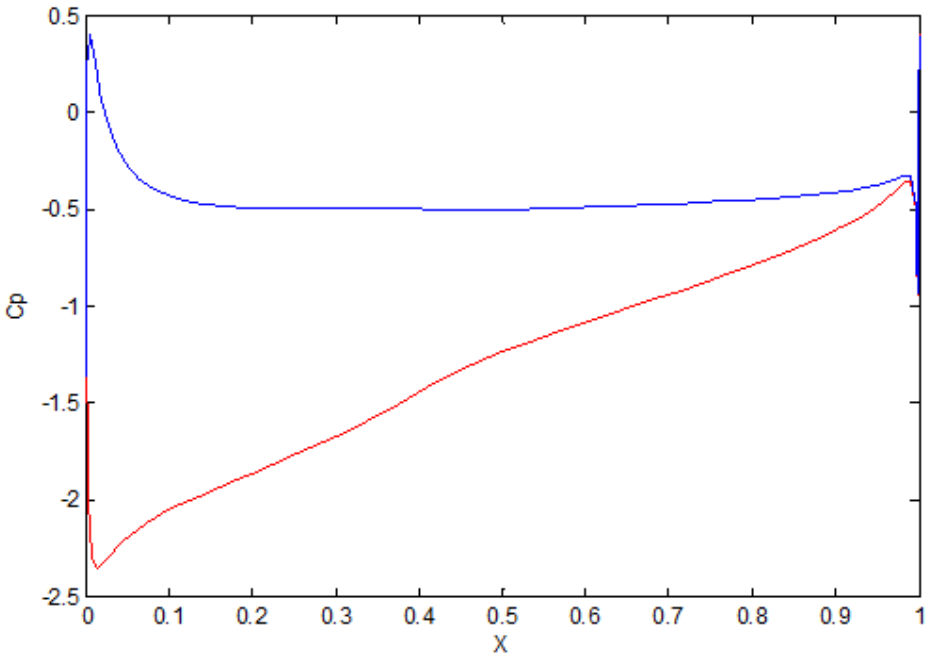


Figura 6.2.7: *Presión ejercida sobre la superficie NACA 2412*

6.3 Análisis de la influencia del ángulo de ataque

En este apartado se han obtenido los resultados de los coeficientes aerodinámicos en función del ángulo de ataque. Se han seleccionado tres perfiles diferentes para estudiar la influencia de la simetría y del espesor del perfil. Los valores obtenidos se encuentran en la siguiente tabla:

	NACA 0006		NACA 0012		NACA 2412	
α	C_L	C_D	C_L	C_D	C_L	C_D
0	0.0051	-0.0031	0.0055	-0.0126	0.3386	-0.0138
2	0.2058	-0.003	0.2165	-0.0125	0.5493	-0.0093
4	0.406	-0.002	0.4271	-0.0118	0.7598	-0.004
6	0.605	$-5.961\cdot10^{-5}$	0.6370	-0.0105	0.9696	0.0021
8	0.8021	0.0027	0.8456	-0.0087	1.1784	0.009
10	0.9967	0.0062	1.0524	-0.0063	1.3856	0.0168
12	1.1881	0.0105	1.2571	-0.0036	1.5907	0.0255

Tabla 6.3.1: *Influencia del ángulo de ataque en diferentes perfiles*

Las condiciones utilizadas en el cálculo de la tabla anterior son:

Temperatura T_∞	Presión p_∞	Velocidad V_∞	Número de Mach, M	Número de Reynolds, Re
300K	*101300 Pa*	*40 m/s*	0.1151	$2.7642\cdot10^{6}$

Observando el coeficiente de resistencia en la tabla de resultados se puede predecir un error aproximado del 1%. En el cálculo del coeficiente de sustentación también se observa un pequeño error alrededor del 0.5% al no llegarse a anular completamente en el ángulo de ataque nulo.

Representando la tabla anterior obtenemos la gráfica 6.3.1 donde se observa el aumento lineal de la sustentación al aumentar el ángulo de ataque siempre que estos sean moderados de manera que la capa límite no se desprenda. También se deduce de esta gráfica que el aumento del espesor del perfil da lugar a un aumento del coeficiente de sustentación.

Para evaluar el grado de aproximación de la solución proporcionada por el programa se han representado los resultados obtenidos junto con los valores experimentales (líneas discontinuas) adjuntados en el anexo 3.

Observando las curvas del perfil simétrico más delgado (NACA 0006) se puede ver como disminuye la sustentación para 8º de ángulo de ataque al desprenderse la capa límite. Este desprendimiento se produce para ángulos más pequeños que en los otros dos perfiles debido a que al tener menor espesor el gradiente de presión adverso que se genera es más brusco. Para los otros dos perfiles los efectos de la capa límite se empiezan a observar a partir de los 12º de inclinación de la corriente por lo que en la gráfica adjunta no se llegan a reflejar.

Al comparar con los resultados experimentales de la gráfica siguiente hay que tener en cuenta que los valores experimentales se han obtenido de las gráficas del Anexo 3 por lo que aparte del error cometido en la medida experimental también existe un error de medida en la lectura de las gráficas.

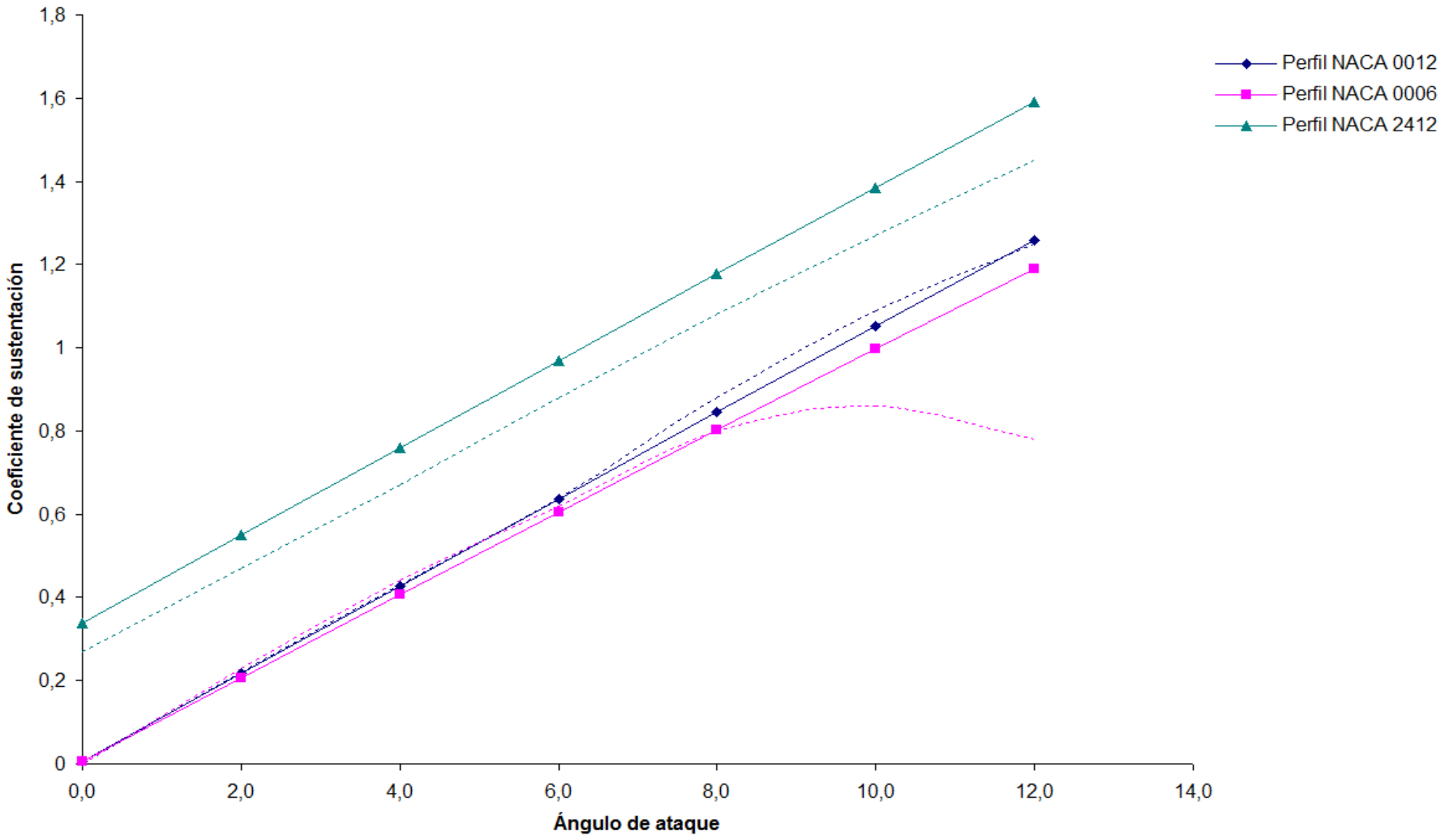


Figura 6.3.1: *Variación del coeficiente de sustentación respecto del ángulo de ataque*

6.4 Análisis de la influencia del número de Mach

Para analizar la evolución de los coeficientes aerodinámicos y la circulación alrededor del perfil se ha ejecutado el programa modificando la velocidad lejos del perfil entre un rango de 10-130 m/s donde las condiciones de número de Mach y número de Reynolds se encuentran dentro del margen necesario. Las condiciones de presión y temperatura utilizadas son: $T_\infty = 300K$ y $p_\infty = 101300Pa$.

Todos los cálculos se han realizado para cuatro ángulos de ataque diferentes pudiendo comprobar nuevamente como el coeficiente de sustentación aumenta proporcionalmente con el ángulo de ataque. En la figura 6.4.1 se puede observar la poca influencia para bajos números de Mach en el valor del coeficiente de sustentación. Esto se debe a la adimensionalización de la sustentación con la velocidad lejos del perfil por lo que la fuerza de sustentación si que aumenta proporcionalmente con el cuadrado del módulo de la velocidad.

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 c}$$

En la gráfica 6.4.1 se puede observar como la evolución de la circulación según aumenta la velocidad es aproximadamente lineal. Al igual que en el coeficiente de sustentación, al aumentar el ángulo de ataque aumenta el módulo de la circulación. De aquí se puede deducir la proporcionalidad de la fuerza de sustentación con la circulación en valor absoluto.

$$C_L \prec |\Gamma|$$

			$\alpha = 2^o$		$\alpha = 4^o$		$\alpha = 6^o$		$\alpha = 8^o$	
V_∞	M	$Re \cdot 10^{-6}$	C_L	Γ	C_L	Γ	C_L	Γ	C_L	Γ
10	0.0288	$0.69105 \cdot 10^6$	0.5484	-2.6319	0.7586	-3.6502	0.9683	-4.6641	1.1773	-5.6727
20	0.0576	1.3821	0.5486	-5.2705	0.7588	-7.31	0.9686	-9.3409	1.1775	-11.3608
30	0.086	2.0731	0.5489	-7.9218	0.7592	-10.9887	0.969	-14.0425	1.1779	-17.0796
40	0.1151	2.7642	0.5493	-10.5924	0.7598	-14.6959	0.9696	-18.7819	1.1784	-22.8456
50	0.1439	3.455	0.5497	-13.2892	0.7605	-18.4418	0.9704	-23.5725	1.179	-28.6753
60	0.1727	4.1463	0.5503	-16.0194	0.7614	-22.2371	0.9714	-28.4286	1.1798	-34.5865
70	0.2015	4.8373	0.5511	-18.7909	0.7624	-26.0935	0.9725	-33.3654	1.1807	-40.5984
80	0.2303	5.5284	0.5519	-21.6115	0.7636	-30.0227	0.9738	-38.399	1.1816	-46.7308
90	0.2590	6.2194	0.5529	-24.4891	0.765	-34.065	0.9752	-43.5447	1.1824	-53.0032
100	0.2878	6.9105	0.5539	-27.4347	0.7665	-38.1515	0.9767	-48.8249	1.1832	-59.4437

			$\alpha = 2^o$		$\alpha = 4^o$		$\alpha = 6^o$		$\alpha = 8^o$	
V_∞	M	$Re \cdot 10^{-6}$	C_L	Γ	C_L	Γ	V_∞	M	$Re \cdot 10^{-6}$	C_L
110	0.2133	7.601	0.5552	-30.4606	0.7683	-42.3857	0.9784	-54.2637	1.1838	-66.0824
120	0.3454	8.2926	0.5566	-33.5775	0.7702	-46.7551	0.9801	-59.8819	1.1838	-72.9461
130	0.3742	8.9836	0.5581	-36.797	0.7722	-51.2781	0.9817	-65.7058	1.1830	-80.037

Tabla 6.4.1: *Coeficientes aerodinámicos y circulación junto con el número de Reynolds y número de Mach para distintas velocidades y ángulos de ataque* $\alpha = 2^o, 4^o, 6^o, 8^o$ *en unas condiciones de* $T_\infty = 300K$ *y* $p_\infty = 101300Pa$

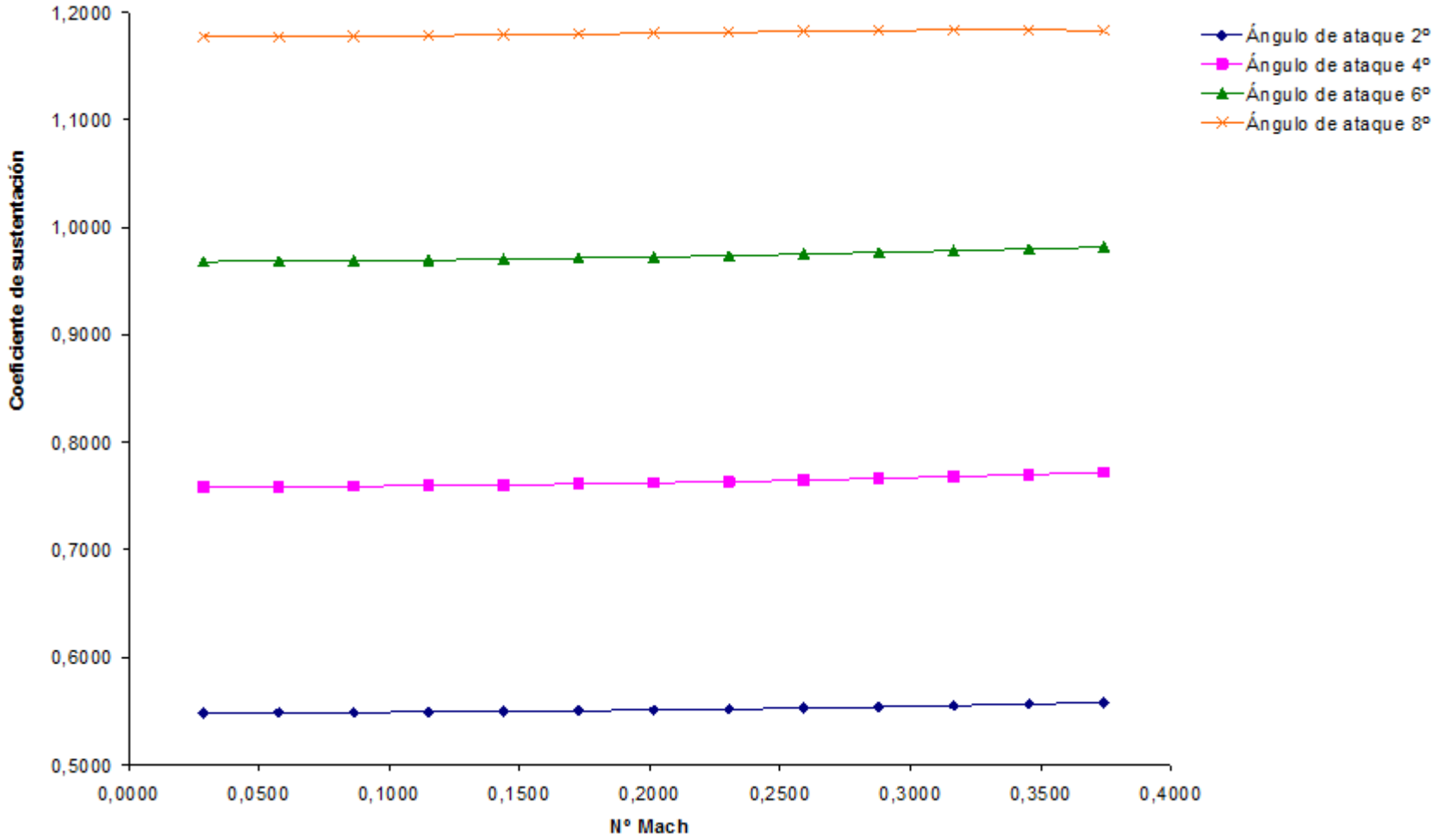


Figura 6.4.1: *Coeficiente de resistencia/sustentación según el número de Mach*

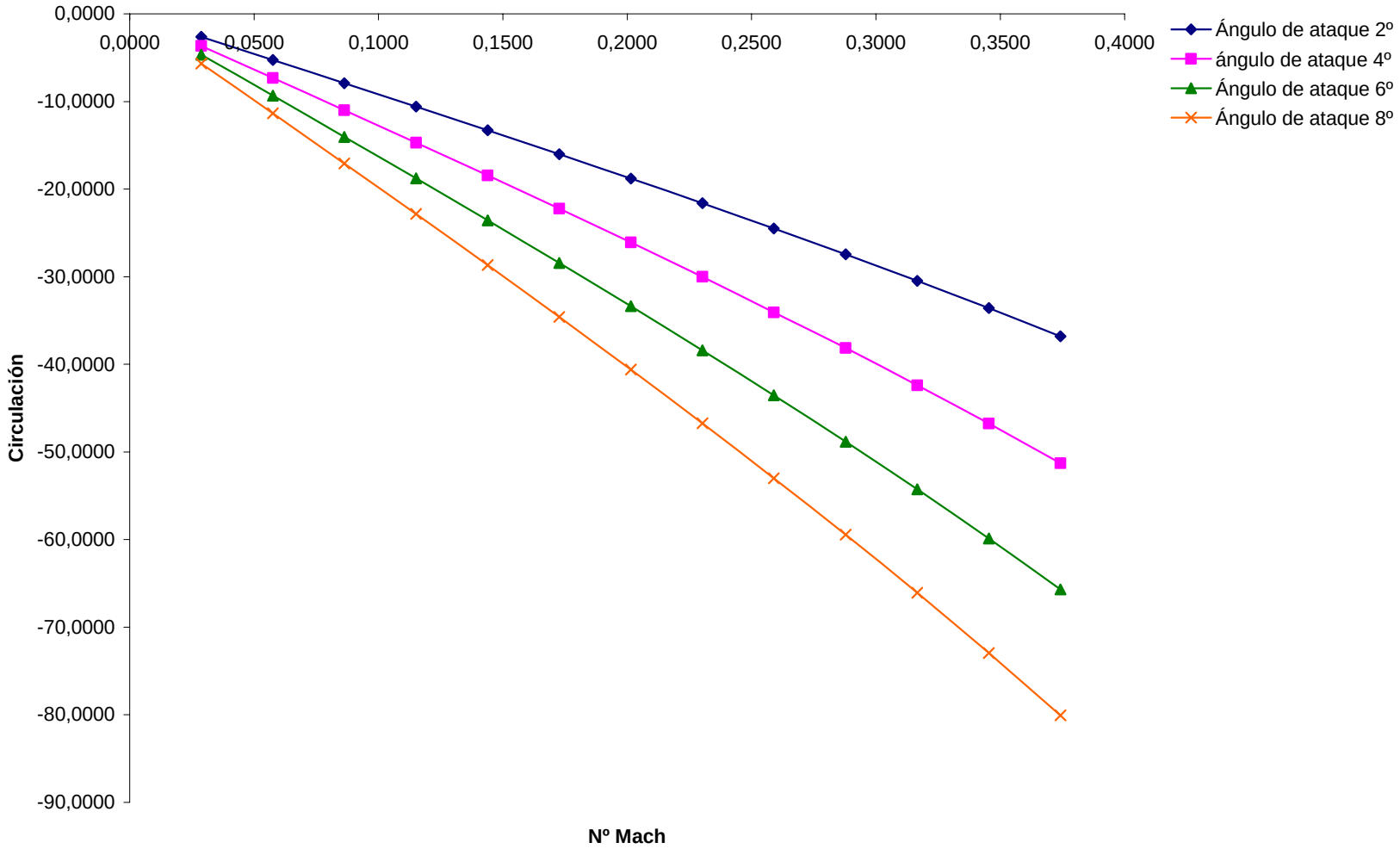


Figura 6.4.2: *Circulación según el número de Mach*

CONCLUSIONES

En este proyecto se ha escrito un programa en MATLAB para el cálculo del flujo potencial compresible alrededor de perfiles aerodinámicos, incluyendo la generación numérica de un sistema de coordenadas adaptado a la forma del perfil elegido. Con este programa se ha analizado el flujo alrededor de varios perfiles aerodinámicos, estudiando el efecto de la variación del ángulo de ataque y el número de Mach.

Se han considerado tres perfiles: NACA 0012, NACA 0006 y NACA 2412. Para cada uno de ellos se han considerado ángulos de ataque entre 0 y 12 grados, puesto que para ángulos superiores ocurre desprendimiento de la corriente y el modelo de flujo potencial deja de ser útil. Los valores del número de Mach considerado se encuentran entre 0 y 0.38 porque para las condiciones de presión y temperatura establecidas, al tomar velocidades mayores el número de Reynolds no cumpliría la condición establecida.

Para ello hemos considerado que un número de Reynolds elevado de manera que los esfuerzos viscosos son despreciables permitiéndonos desarrollar un modelo de flujo potencial compresible.

Inicialmente se ha desarrollado el cálculo del mallado el cual se ha adaptado a la superficie del perfil en la frontera interior y a una circunferencia en la frontera exterior. Para que la condición en la frontera exterior se encontrara suficientemente lejos de la superficie se ha optado por considerar un radio de circunferencia de 20 veces la cuerda en la realización de todos los cálculos.

El cálculo del flujo potencial no se ha podido comparar con ninguna solución experimental pero como hemos podido ver en las gráficas 6.1.1 y 6.2.1 como se ajustan a la solución esperada formándose en la segunda gráfica la discontinuidad debida a la circulación.

En el cálculo de las líneas isóbaras y contornos de Mach se ha podido apreciar bien la simetría obtenida en las gráficas 6.1.4 a 6.1.7. En el borde de salida, debido a la

condición impuesta de velocidad nula al tener un borde de salida anguloso, se aprecia un gradiente de presión que se podría mejorar utilizando un perfil afilado.

En el cálculo de los coeficientes aerodinámicos se aprecia un error aproximado del 2% que se podría mejorar aumentando el orden de precisión de las discretizaciones y refinando más la malla.

TRABAJOS FUTUROS

A continuación se sugieren, en primer lugar, algunos aspectos susceptibles de mejora en el programa realizado, y en segundo lugar, una posible continuación del trabajo:

- Mejorar la precisión de la solución utilizando discretizaciones conservativas y aumentando el orden de precisión.
- Mejorar la función Malla permitiendo movilidad a los nodos de la frontera exterior de manera que permita controlar la densidad de nodos según la coordenada η
- Modificar la superficie del perfil aerodinámico buscando soluciones de perfiles afilados.
- Aunque no es objeto de este proyecto una posible continuación sería introducir los efectos que tiene la viscosidad en la región cercana a la superficie. La solución final correspondería a la suma de la región externa (flujo potencial) y la región interna (capa límite).
- También se podría ampliar el estudio aerodinámico calculando el momento de cabeceo del perfil.

REFERENCIAS

[1] Acheson, D. J. . Elementary Fluid Dynamics. Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series (1990)

[2] Anderson, John David. Computational fluid dynamics: the basic sith applications. Mc Graw-Hill (1995)

[3] Philip M.Gerhart, Richard J.Gross y Jhon I.Hochstein. Fundamentos de Mecánica de Fluidos. Segunda edición. Ed. Addison-Wesley Publishing Company Inc. 1992

[4] Crespo Martínez, Antonio. Mecánica de Fluidos. Thomson Editores Spain. 2006

[5] C.Hirsch, Numerical Computation of Internal and External Flows. Volume 2: Computational Methods for Invisid and Viscous Flows, John Wiley & Sons (1990)

[6] Irving H. Shames. Mecánica de Fluidos. Tercera edición, Mc Graw-Hill (Enero, 1995)

[7] Isidoro Carmona, Aníbal. Aerodinámica y actuaciones de un avión. 12ª edición, Thomsom-Paraninfo (2004)

[8] Joe F. Thompson, Frank C. Thames and C.Wayne Mastin. Automatic Numerical Generation of Fody-Fitted Curvilinear Coordinate System for field Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies. Journal of Computational Physics 15, 299-319 (1974)

[9]Arias Vega, Fernando. Fundamentos en Aerodinámica para Aeroturbinas de Eje Horizontal. Ed. Ciemat, 2006

[10] Frank M.White. Mecánica de Fluidos. Ed. McGraw-Hill, 2002

[11] Antonio Barrero Ripio y Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor. Fundamentos y Aplicaciones de la Mecánica de Fluidos. Ed. McGrall-Hill, 2005

[12] Merie C.Potter y David C.Wiggert. Mecánica de Fluidos. Tercera edición. Internacional Thomson Editores, 2002

[13] Ira H.Abbott and Albert E.Von Doenhoff. Theory of Wings Sections. Including a Summary of Airfoil Data. Dover Publications, 1959

ANEXO 1:

CÓDIGO DE PROGRAMACIÓN

Función: Programa

```
function [IMA,phi,psi,u,v,Cp,C,Mach,L,D,Machinf,Re] =
Programa(N,M,alf,cN,p,m,t,Vinf,Tinf,pinf)

%-----------------------------VARIABLES-------------------------------%
%phi= Función potencial
%psi= Función de corriente
%u,v= Vectores velocidad según las direcciones x e y
%Cp= Coeficiente de presión
%C= Circulación alrededor del perfil
%Mach= Número de Mach
%L= Sustentación
%D= Resistencia
%N,M= Número de líneas coordenadas en xi,eta respectivamente
%alf= Ángulo de ataque
%cN= Cuerda del perfil
%m, p, t= parámetros característicos del perfil NACA
%Vinf= Módulo de la velocidad lejos del perfil
%Tinf= Temperatura lejos del perfil
%pinf= Presión lejos del perfil
%gamma= Coeficiente adiabático del aire
%cp= Capacidad calorífica a presión constante
%c= Velocidad del sonido
% Los subíndices 0 significan condición de remanso
% Los subíndices inf significan condición lejos del perfil
%-----------------------------------------------------------------------%
% Calculamos las condiciones del aire
    gamma=1.4;
    cp=1006;
    Rg=cp*(gamma-1)/gamma;
    dinf=pinf/(Rg*Tinf);
    Hinf=cp*Tinf;
    cinf=sqrt(gamma*pinf/dinf);

% Calculamos las condiciones de remanso del aire

    H0=Hinf+0.5*Vinf^2;
    d0=dinf/(1-0.5*Vinf^2/H0);
    p0=pinf*(d0/dinf)^gamma;

% Comprobamos inicialmente que las condiciones del fluido se encuentren
% dentro de las condiciones impuestas.

    Machinf=Vinf/cinf;
    Re=Vinf*cN*dinf/17e-6;
```

```
    if Machinf>0.8||Re>10^7
         disp('El flujo no cumple las condiciones necesarias')
         exit
    end

%--------------------------FUNCIÓN PERFIL----------------------------%
    [x,y] = Perfil(cN,m,p,t,N);
%--------------------Representación del perfil-----------------------%
    figure(1); clf
    plot(x(:),y(:),'black');

%--------------------------FUNCIÓN MALLA-----------------------------%
    [X,Y] = Malla(N,M,x,y);
%--------------------Representación de la malla----------------------%
    figure(2); clf
    for j=1:M
        plot(X(:,j),Y(:,j)); hold on;
    end
    for i=1:N
        plot(X(i,:),Y(i,:)); hold on;
    end

%------------------------FUNCIÓN POTENCIAL---------------------------%
    [phi,C,theta,IMA] =
Potencial(d0,H0,gamma,Machinf,X,Y,Vinf,alf,N,M);
%----------------Representación líneas equipotenciales----------------%
    figure(3); clf
    plot(X(:,M),Y(:,M),'black');
    hold on
    xlabel('X');ylabel('Y');
    contour(X,Y,phi,100);

%----------------------FUNCIÓN VELOCIDADES--------------------------%
    [u,v] = Velocidades(alf,C,Machinf,theta,X,Y,phi,N,M,Vinf);
%----------------Representación vectores de velocidad-----------------%
    figure(4); clf
    plot(X(:,M),Y(:,M),'black');
    hold on
    xlabel('X');ylabel('Y');
    quiver(X,Y,u,v);

%-----------------FUNCIÓN DISTRIBUCIÓN DE PRESION--------------------%
    [Cp,p]=Presiones(u,v,Vinf,dinf,gamma,pinf,p0,d0,H0);
%-------------------Representación líneas isóbaras--------------------%
    figure(5); clf
    plot(X(:,M),Y(:,M),'black');
    hold on
    xlabel('X');ylabel('Y');
    contour(X,Y,Cp,30);
%--------------Representación presión sobre la superficie-------------%
    figure(6); clf
    xlabel('X');ylabel('Cp');
    plot(X(1:(N-1)/2,M),Cp(1:(N-1)/2,M),'red');
    hold on
    plot(X((N-1)/2:N,M),Cp((N-1)/2:N,M),'blue');


%----------------------FUNCIÓN DE CORRIENTE-------------------------%
```

```
    [psi,Mach] = Corriente(u,v,gamma,H0,d0,p,X,Y,N,M);
%-----------------Representación líneas de corriente------------------%
    figure(7); clf
    plot(X(:,M),Y(:,M),'black');
    hold on
    xlabel('X');ylabel('Y');
    contour(X,Y,psi,50);
%------------------Representación contornos de Mach------------------%
    figure(8); clf
    plot(X(:,M),Y(:,M),'black');
    hold on
    xlabel('X');ylabel('Y');
    contour(X,Y,Mach,50);

%----------------FUNCIÓN COEFICIENTES AERODINÁMICOS------------------%
    [L,D]=Coeficientes(N,M,Cp,X,Y,alf,cN);
    if IMA==1
        disp( 'No converge')
    end
end
```

Función: Diseño del perfil

```
function [x,y] = Perfil(cN,m,p,t,N)

%----------------------------VARIABLES--------------------------------%
%thetan= ángulo que forman las tangentes a la línea de curvatura media
%Xn= distribución de la variable x sobre la cuerda
%Yc= posición de la línea media
%Yt= espesor con respecto a la línea media
%x,y= vectores de posición de la superficie
%-----------------------------------------------------------------------%

% Inicialmente vamos a considerar un valor de la cuerda unidad.

    m=m/100;p=p/10;t=t/100;

% Calculamos la dimensión del vector horizontal Xn. Como en el borde
% de salida tenemos dos líneas y en el borde de ataque sólo una, N
% tiene que ser un número impar.

    Nnaca=(N+1)/2;
    thetaXn=linspace(0,1,Nnaca);
    Xn=0.5*(1-cos(pi.*thetaXn));
    Yc=zeros(Nnaca,1);
    Yt=zeros(Nnaca,1);
    thetan=zeros(Nnaca,1);

% Aplicamos las fórmulas dadas en (1.1) hasta (1.10).

    for i=1:Nnaca
        if Xn(i)<p
            Yc(i)=(m/(p^2))*(2*p*Xn(i)-Xn(i)^2);
            thetan(i)=atan(((2*m)/p^2)*(p-Xn(i)));
        else
            Yc(i)=(m/(1-p)^2)*(1-2*p+2*p*Xn(i)-Xn(i)^2);
```

```
            thetan(i)=atan((((2*m)/(1-p)^2))*(p-Xn(i)));
        end
        Yt(i)=(t/0.2)*(0.2969*sqrt(Xn(i))-0.126*Xn(i)-
0.3516*Xn(i)^2+...
            0.2843*Xn(i)^3-0.1015*Xn(i)^4);
    end
    YTs=Yt.*sin(thetan);
    YTc=Yt.*cos(thetan);

% Almacenamos los valores de posición según nos encontremos en el
% extradós o intradós del perfil.

    for j=Nnaca-1:-1:1
        i=Nnaca+1-j;
        x(i)=Xn(j)-YTs(j);
        y(i)=Yc(j)+YTc(j);
    end
    x(1)=1;
    y(1)=0;
    x(N)=x(1);
    y(N)=y(1);
    for j=2:Nnaca-1
        i=Nnaca+j-1;
        x(i)=Xn(j)+YTs(j);
        y(i)=Yc(j)-YTc(j);
    end

% Escalamos los valores x e y según el valor de la cuerda.

    x=x*cN;y=y*cN;
end
```

Función: Generación de la malla

```
function [X,Y] = Malla(N,M,x,y)

%-----------------------------VARIABLES-------------------------------%
%xi,eta= Coordenadas arbitrarias
%X,Y= Coordenadas en los planos x,y
%ite= Número de iteracción
%itemax= Número de iteracción máxima que imponemos
%ddd1= Diferencia de la coordenada x con respecto a la iteracción
anterior
%ddd2= Diferencia de la coordenada y con respecto a la iteracción
anterior
%tol= Tolerancia admitida
%Q= Función para generar atracción en una línea coordenada
%etak, Ak, Ck= Parámetros que regulan la atracción de la línea
coordenada
%w= Parámetro que regula la velocidad de convergencia de la solución
%-----------------------------------------------------------------%

%-------------------CONDICIÓN SUPERFICIE DEL PERFIL-------------------%
% Almacenamos en la superficie el valor obtenido de la función perfil.

    X(:,M)=x(:);
```

```
    Y(:,M)=y(:);

%---------------------CONDICIÓN LEJOS DEL PERFIL----------------------%
    R=20;
    theta=linspace(0,2*pi,N);
    X(:,1)=0.5+R*cos(theta);
    Y(:,1)=R*sin(theta);
    X=X-0.5;

%--------------------CONDICIÓN INICIAL ARBITRARIA--------------------%
    for j=2:M-1
            X(:,j)=X(:,j-1)+(X(:,M)-X(:,1))/(M-1);
            Y(:,j)=Y(:,j-1)+(Y(:,M)-Y(:,1))/(M-1);
    end

%----------------DESARROLLO DE LA FUNCIÓN DE LAPLACE----------------%

    etak=M;Ak=20;Ck=0.2;
    eta=1:M;xi=1:N;
    ite=0;itemax=8000;tol=1.e-7;ddd1=1;ddd2=1;w=1.8;
    while ddd1>tol&&ddd2>tol&&ite<itemax
        ite=ite+1;
        Xold=X;
        Yold=Y;

% Aumento de la densidad del mallado en la superficie
% Fórmula (1.2)

      for i=1:N
          for j=1:M
              Q(i,j)=Ak*exp(-Ck*abs(eta(j)-etak));
              P(i,j)=0;
          end
      end

%--------------CONDICIÓN NODOS INTERIORES DE LA MALLA---------------%
% Desarrollo de las ecuaciones (4.1) hasta la (4.6)

      for j=2:M-1
          for i=2:N
             if i==N
                 alfa(N,j)=0.25*((X(i,j+1)-X(i,j-1))^2+(Y(i,j+1)-Y(...
                     i,j-1))^2);
                 beta(N,j)=0.25*((X(i,j+1)-X(i,j-1))*(X(2,j)-X(i-1,...
                     j)) +(Y(2,j)-Y(i-1,j))*(Y(i,j+1)-Y(i,j-1)));
                 gammaM(N,j)=0.25*((X(2,j)-X(i-1,j))^2+(Y(2,j)-Y(i-...
                     1,j))^2);
                 J(N,j)=0.25*((X(2,j)-X(i-1,j))*(Y(i,j+1)-Y(i,j-1))...
                     -(Y(2,j)-Y(i-1,j))*(X(i,j+1)-X(i,j-1)));
                 X(i,j)=(0.5/(alfa(i,j)+gammaM(i,j)))*(alfa(i,j)*(X(...
                     2,j)+X(i-1,j))+gammaM(i,j)*(X(i,j+1)+X(i,j-1))-...
                     0.5*beta(i,j)*(X(2,j+1)-X(2,j-1)-X(i-1,j+1)+X(i...
                     -1,j-1))+Q(i,j)*0.5*J(i,j)^2*(X(i,j+1)-X(i,j-1)...
                     )+P(i,j)*0.5*J(i,j)^2*(X(2,j)-X(i-1,j)));
                 Y(i,j)=(0.5/(alfa(i,j)+gammaM(i,j)))*(alfa(i,j)*(Y(...
                     2,j)+Y(i-1,j))+gammaM(i,j)*(Y(i,j+1)+Y(i,j-1))-...
                     0.5*beta(i,j)*(Y(2,j+1)-Y(2,j-1)-Y(i-1,j+1)+Y(i...
                     -1,j-1))+Q(i,j)*0.5*J(i,j)^2*(Y(i,j+1)-Y(i,j-1)...
```

```
                    )+P(i,j)*0.5*J(i,j)^2*(Y(2,j)-Y(i-1,j)));
            else
                alfa(i,j)=0.25*((X(i,j+1)-X(i,j-1))^2+(Y(i,j+1)-Y(i...
                    ,j-1))^2);
                beta(i,j)=0.25*((X(i,j+1)-X(i,j-1))*(X(i+1,j)-X(i-...
                    1,j))+(Y(i+1,j)-Y(i-1,j))*(Y(i,j+1)-Y(i,j-1)));
                gammaM(i,j)=0.25*((X(i+1,j)-X(i-1,j))^2+(Y(i+1,j)-...
                    Y(i-1,j))^2);
                J(i,j)=0.25*((X(i+1,j)-X(i-1,j))*(Y(i,j+1)-Y(i,j-1)...
                    )-(Y(i+1,j)-Y(i-1,j))*(X(i,j+1)-X(i,j-1)));
                X(i,j)=(0.5/(alfa(i,j)+gammaM(i,j)))*(alfa(i,j)*(X(...
                    i+1,j)+X(i-1,j))+gammaM(i,j)*(X(i,j+1)+X(i,j-1)...
                    )-0.5*beta(i,j)*(X(i+1,j+1)-X(i+1,j-1)-X(i-1,j+...
                    1)+X(i-1,j-1))+Q(i,j)*0.5*J(i,j)^2*(X(i,j+1)-X(...
                    i,j-1))+P(i,j)*0.5*J(i,j)^2*(X(i+1,j)-X(i-1,j)));
                Y(i,j)=(0.5/(alfa(i,j)+gammaM(i,j)))*(alfa(i,j)*(Y(...
                    i+1,j)+Y(i-1,j))+gammaM(i,j)*(Y(i,j+1)+Y(i,j-1)...
                    )-0.5*beta(i,j)*(Y(i+1,j+1)-Y(i+1,j-1)-Y(i-1,j+...
                    1)+Y(i-1,j-1))+Q(i,j)*0.5*J(i,j)^2*(Y(i,j+1)-Y(...
                    i,j-1))+P(i,j)*0.5*J(i,j)^2*(Y(i+1,j)-Y(i-1,j)));
            end

% Aplicamos el método SOR de sobrerelajación, ecuación (4.29).

            X(i,j)=w*X(i,j)+(1-w)*Xold(i,j);
            Y(i,j)=w*Y(i,j)+(1-w)*Yold(i,j);
        end
    end
    X(1,:)=X(N,:);
    Y(1,:)=Y(N,:);
    ddd1=max(max(abs(X-Xold)));
    ddd2=max(max(abs(Y-Yold)));
  end
  X=X+0.5;
end
```

Función: Tensor métrico

```
function  [g11,g22,g21,g12,J,dxdxi,dxdeta,dydxi,dydeta]=Tensor(X,Y,N,M)

%----------------------------VARIABLES--------------------------------%
%J= Jacobiano
%g11,g12,g21,g22= Tensor métrico transformación directa
%g11I,g12I,g21I,g22I= Tensor métrico transformación indirecta
%dxdxi= Variación de la coordenada x con respecto a xi
%dxdeta= Variación de la coordenada x con respecto a eta
%dydxi= Variación de la coordenada y con respecto a xi
%dydeta= Variación de la coordenada y con respecto a eta
%-----------------------------------------------------------------%

% Para el cálculo de las variaciones de las coordenadas x e y
% se utilizan las discretizaciones de la tabla 4.3.1

  for i=1:N-1
            if i==1
```

```
                    for j=2:M-1
                       dxdxi(i,j)=(X(i+1,j)-X(N-1,j))/2;
                       dxdeta(i,j)=(X(i,j+1)-X(i,j-1))/2;
                       dydxi(i,j)=(Y(i+1,j)-Y(N-1,j))/2;
                       dydeta(i,j)=(Y(i,j+1)-Y(i,j-1))/2;
                    end
                else
                    for j=2:M-1
                       dxdxi(i,j)=(X(i+1,j)-X(i-1,j))/2;
                       dxdeta(i,j)=(X(i,j+1)-X(i,j-1))/2;
                       dydxi(i,j)=(Y(i+1,j)-Y(i-1,j))/2;
                       dydeta(i,j)=(Y(i,j+1)-Y(i,j-1))/2;
                    end
                       dxdxi(i,M)=(X(i+1,M)-X(i-1,M))/2;
                       dxdeta(i,M)=(X(i,M-2)-4*X(i,M-1)+3*X(i,M))/2;
                       dydxi(i,M)=(Y(i+1,M)-Y(i-1,M))/2;
                       dydeta(i,M)=(Y(i,M-2)-4*Y(i,M-1)+3*Y(i,M))/2;

                       dxdxi(i,1)=(X(i+1,1)-X(i-1,1))/2;
                       dxdeta(i,1)=(-3*X(i,1)+4*X(i,2)-X(i,3))/2;
                       dydxi(i,1)=(Y(i+1,1)-Y(i-1,1))/2;
                       dydeta(i,1)=(-3*Y(i,1)+4*Y(i,2)-Y(i,3))/2;

                end
    end
                       dxdxi(1,M)=(X(2,M)-X(N-1,M))/2;
                       dxdeta(1,M)=(X(1,M-2)-4*X(1,M-1)+3*X(1,M))/2;
                       dydxi(1,M)=(Y(2,M)-Y(N-1,M))/2;
                       dydeta(1,M)=(Y(1,M-2)-4*Y(1,M-1)+3*Y(1,M))/2;

                       dxdxi(1,1)=(X(2,1)-X(N-1,1))/2;
                       dxdeta(1,1)=(-X(1,3)+4*X(1,2)-3*X(1,1))/2;
                       dydxi(1,1)=(Y(2,1)-Y(N-1,1))/2;
                       dydeta(1,1)=(-Y(1,3)+4*Y(1,2)-3*Y(1,1))/2;

    dydeta(N,:)=dydeta(1,:);
    dydxi(N,:)=dydxi(1,:);
    dxdeta(N,:)=dxdeta(1,:);
    dxdxi(N,:)=dxdxi(1,:);

% Las fórmulas de los tensores métricos para las transformaciones
% directas o indirectas se encuentran en (2.21), (2.22) y (2.23).

    J=dxdxi.*dydeta-dxdeta.*dydxi;
    g11I=dxdxi.^2+dydxi.^2;
    g12I=dxdxi.*dxdeta+dydxi.*dydeta;
    g22I=dxdeta.^2+dydeta.^2;
    g11=g22I./(J.^2);
    g12=-g12I./(J.^2);
    g22=g11I./(J.^2);
    g21=g12;
end
```

Función: Potencial

```
function [phi,C,theta,IMA] =
Potencial(d0,H0,gamma,Machinf,X,Y,Vinf,alf,N,M)

%----------------------------VARIABLES--------------------------------%
%d= Densidad
% Las variables ya definidas seguidas de una V o una H corresponden a:
    % H: iteración en el nodo i '+' o '-' 1/2
    % V: iteración en el nodo j '+' o '-' 1/2
%-----------------------------------------------------------------------%
%----------------PARÁMETROS UTILIZADOS EN EL BUCLE--------------------%
    [g11,g22,g21,g12,J,dxdxi,dxdeta,dydxi,dydeta]=Tensor(X,Y,N,M);

% Calculamos los coeficientes en los nodos intercalados.
% Fórmulas (4.14)

    dxdxiV=zeros(N,M); dxdetaV=zeros(N,M);
    dydxiV=zeros(N,M);dydetaV=zeros(N,M);
    dxdxiH=zeros(N,M); dxdetaH=zeros(N,M);
    dydxiH=zeros(N,M); dydetaH=zeros(N,M);
    for i=1:N-1
        for j=1:M-1
            g11V(i,j)=0.5*(g11(i,j)+g11(i,j+1));
            g12V(i,j)=0.5*(g12(i,j)+g12(i,j+1));
            g22V(i,j)=0.5*(g22(i,j)+g22(i,j+1));
            JV(i,j)=0.5*(J(i,j)+J(i,j+1));
            dxdxiV(i,j)=0.5*(dxdxi(i,j)+dxdxi(i,j+1));
            dxdetaV(i,j)=0.5*(dxdeta(i,j)+dxdeta(i,j+1));
            dydxiV(i,j)=0.5*(dydxi(i,j)+dydxi(i,j+1));
            dydetaV(i,j)=0.5*(dydeta(i,j)+dydeta(i,j+1));
        end
    end

    for i=1:N-1
        for j=1:M
            g11H(i,j)=0.5*(g11(i,j)+g11(i+1,j));
            g12H(i,j)=0.5*(g12(i,j)+g12(i+1,j));
            g22H(i,j)=0.5*(g22(i,j)+g22(i+1,j));
            JH(i,j)=0.5*(J(i,j)+J(i+1,j));
            dxdxiH(i,j)=0.5*(dxdxi(i,j)+dxdxi(i+1,j));
            dxdetaH(i,j)=0.5*(dxdeta(i,j)+dxdeta(i+1,j));
            dydxiH(i,j)=0.5*(dydxi(i,j)+dydxi(i+1,j));
            dydetaH(i,j)=0.5*(dydeta(i,j)+dydeta(i+1,j));
        end
    end
    g21V=g12V;
    g21H=g12H;

% Calculamos el ángulo theta de cada nodo. Como el arco tangente
% nos devuelve el valor del ángulo en los cuadrantes I y IV lo
% recalculamos según el siguiente código.

        theta=atan(Y./X);
        alfa=alf*pi/180;
        for i=1:N
            for j=1:M
               if X(i,j)<=0 && Y(i,j)>=0
```

```
                theta(i,j)=pi-abs(theta(i,j));
              elseif X(i,j)<=0 && Y(i,j)<0
                theta(i,j)=abs(theta(i,j))+pi;
             elseif X(i,j)>0 && Y(i,j)<0
                theta(i,j)=2*pi-abs(theta(i,j));
              end
          end
      end
      theta(N,:)=2*pi;
      theta(1,:)=0;

%----------------------------VALOR INICIAL----------------------------%
    C=0.5;
    phi=zeros(N,M);
    UH=zeros(N,M);
    VH=zeros(N,M);
    UV=zeros(N,M);
    VV=zeros(N,M);
    ite=0; ddd=1; itemax=20000; tol=1.e-9;w=0.5;
    while ddd>tol && ite<itemax
        ite=ite+1;
        phiold=phi;
%--------------------------FRONTERA EXTERIOR--------------------------%

% Para aplicar la fórmula (2.30) primero determinamos el arco tangente
% y lo distribuimos igual que en el caso de theta.

         arcotan(:,1)=atan(sqrt(1-Machinf^2)*tan(theta(:,1)-alfa));
         arcosen(:,1)=asin(sqrt(1-Machinf^2)*sin(theta(:,1)-alfa));
         for i=1:N
             if arcotan(i,1)>0&&arcosen(i,1)<0
                 arcotan(i,1)=arcotan(i,1)+pi;
             elseif arcotan(i,1)<0&&arcosen(i,1)>0
                 arcotan(i,1)=pi- abs(arcotan(i,1));
             elseif arcotan(i,1)<0&&arcosen(i,1)<0
                if (theta(i,1)-alfa)>0
                    arcotan(i,1)=2*pi+arcotan(i,1);
                end
             end
         end
         phi(:,1)=Vinf*(X(:,1)*cos(alfa)+Y(:,1)*sin(alfa))+C*...
             arcotan(:,1)/(2*pi);

%--------------------NODOS INTERNOS DE LA MALLA---------------------%

% Desarrollamos los parámetros en los nodos intercalados desarrollando
% las fórmulas (4.9) y (4.10).

        for i=1:N-1
            for j=1:M-1
                if i==1&&j==M-1
                    PV(i,j)=0.25*(phi(i+1,j)-phi(N-1,j)+phi(i+1,j-1)...
                        -phi(N-1,j-1)+2*C);
                elseif i==1&&j~=M-1
                    PV(i,j)=0.25*(phi(i+1,j+2)-phi(N-1,j+2)+phi(i+1,...
                        j+1)-phi(N-1,j+1)+2*C);
                elseif i~=1&&j==M-1
                    PV(i,j)=0.25*(phi(i+1,j)-phi(i-1,j)+phi(i+1,j-1)...
                        -phi(i-1,j-1));
```

```
                else
                    PV(i,j)=0.25*(phi(i+1,j+2)-phi(i-1,j+2)+phi(i+1,...
                        j+1)-phi(i-1,j+1));
                end
                if j==M-1
                    UV(i,j)=g11V(i,j)*PV(i,j)+g12V(i,j)*(phi(i,j)-...
                        phi(i,j-1));
                    VV(i,j)=g21V(i,j)*PV(i,j)+g22V(i,j)*(phi(i,j)-...
                        phi(i,j-1));
                else
                    UV(i,j)=g11V(i,j)*PV(i,j)+g12V(i,j)*(phi(i,j+2)-...
                        phi(i,j+1));
                    VV(i,j)=g21V(i,j)*PV(i,j)+g22V(i,j)*(phi(i,j+2)-...
                        phi(i,j+1));
                end
            end
        end
        for i=1:N-1
            for j=2:M-1
                    PH(i,j)=0.25*(phi(i+1,j+1)-phi(i+1,j-1)+phi(i,j+...
                        1)-phi(i,j-1));
                    UH(i,j)=g11H(i,j)*(phi(i+1,j)-phi(i,j))+g12H(i,j...
                        )*PH(i,j);
                    VH(i,j)=g21H(i,j)*(phi(i+1,j)-phi(i,j))+g22H(i,j...
                        )*PH(i,j);
            end
        end

% Calculamos la densidad, ecuación (4.13)
IMA=0;
        for i=1:N
            for j=1:M
                DDV(i,j)=1-((dxdxiV(i,j)^2+dydxiV(i,j)^2)*UV(i,j)...
                    ^2+(dxdetaV(i,j)^2+dydetaV(i,j)^2)*VV(i,j)^2+...
                    2*UV(i,j)*VV(i,j)*(dxdxiV(i,j)*dxdetaV(i,j)+...
                    dydxiV(i,j)*dydetaV(i,j)))/(2*H0);
                DDH(i,j)=1-((dxdxiH(i,j)^2+dydxiH(i,j)^2)*UH(i,j)...
                    ^2+(dxdetaH(i,j)^2+dydetaH(i,j)^2)*VH(i,j)^2+...
                    2*UH(i,j)*VH(i,j)*(dxdxiH(i,j)*dxdetaH(i,j)+...
                    dydxiH(i,j)*dydetaH(i,j)))/(2*H0);
                if DDV(i,j)<0||DDH(i,j)<0
                    IMA=1;
                end
                dV(i,j)=d0*abs(DDV(i,j))^(1/(gamma-1));
                dH(i,j)=d0*abs(DDH(i,j))^(1/(gamma-1));
            end
        end

% Introducimos las variables anteriores en la ecuación del potencial.
% Fórmula (4.11)

        for i=1:N-1;
          for j=2:M-1;
              if i==1
                phi(i,j)=(dH(i,j)*JH(i,j)*(g12H(i,j)*PH(i,j)+g11H(i,...
                    j)*phi(i+1,j))-dH(N-1,j)*JH(N-1,j)*(g12H(N-1,j)*...
                    PH(N-1,j)-g11H(N-1,j)*(phi(N-1,j)-C))+dV(i,j-1)...
                    *JV(i,j-1)*(g21V(i,j-1)*PV(i,j-1)+g22V(i,j-1)*...
                    phi(i,j1))-dV(i,j)*JV(i,j)*(g21V(i,j)*PV(i,j)-...
```

```
                    g22V(i,j)*phi(i,j-1)))/(dH(i,j)*JH(i,j)*g11H(...
                    i,j)+dH(N-1,j)*JH(N-1,j)*g11H(N-1,j)+dV(i,j)*JV...
                    (i,j)*g22V(i,j)+dV(i,j-1)*JV(i,j-1)*g22V(i,j-1));
              else
                phi(i,j)=(dH(i,j)*JH(i,j)*(g12H(i,j)*PH(i,j)+g11H(i,...
                    j)*phi(i+1,j))-dH(i-1,j)*JH(i-1,j)*(g12H(i-1,j)*...
                    PH(i-1,j)-g11H(i-1,j)*(phi(i-1,j)))+dV(i,j-1)*JV(..
                    i,j-1)*(g21V(i,j-1)*PV(i,j-1)+g22V(i,j-1)*phi(i,...
                    j+1))-dV(i,j)*JV(i,j)*(g21V(i,j)*PV(i,j)-g22V(i,j..
                    )*phi(i,j-1)))/(dH(i,j)*JH(i,j)*g11H(i,j)+dH(i...
                    -1,j)*JH(i-1,j)*g11H(i-1,j)+dV(i,j)*JV(i,j)*g22V...
                    (i,j)+dV(i,j-1)*JV(i,j-1)*g22V(i,j-1));
              end

% Aplicamos el método SOR de sobrerelajación, ecuación (4.29).

              phi(i,j)=w*phi(i,j)+(1-w)*phiold(i,j);
          end
        end
%---------------------CONDICIÓN EN LA SUPEFICIE-----------------------%

% Aplicamos la fórmula (4.15)

        for i=N-1:-1:2;
            phi(i,M)=(1/3)*(4*phi(i,M-1)-phi(i,M-2)-g21(i,j)*(phi(i+...
                1,M)-phi(i-1,M))/g22(i,j));
        end
        phi(1,M)=(1/3)*(4*phi(1,M-1)-phi(1,M-2)-g21(1,M)*(phi(2,M)...
            -phi(N-1,M)+C)/g22(1,M));

%-------------CONDICIÓN EN LA DISCONTINUIDAD DEL POTENCIAL------------%

% Aplicamos la condición de Kutta, ecuación (4.16)

        for j=1:M;
          phi(N,j)=phi(1,j)+C;
        end
        ddd=max(max(abs(phi-phiold)));
%-----------------------CÁLCULO DE LA CIRCULACIÓN--------------------%

% Utilizamos la ecuación (4.18) que impone velocidad nula en el borde
% de salida

        C=phi(N-1,M)-phi(2,M)-g12(1,M)*(phi(1,M-2)-4*phi(1,M-1)+...
            3*phi(1,M))/g11(1,M);
    end

end
```

Función: Campo de velocidades

```
function [u,v] = Velocidades(alf,C,Machinf,theta,X,Y,phi,N,M,Vinf)

    [g11,g22,g21,g12,J,dxdxi,dxdeta,dydxi,dydeta]=Tensor(X,Y,N,M);
```

```
%--------------------CONDICIÓN FRONTERA EXTERIOR----------------------%
% Ecuaciones (4.21) y (4.22).

    alfa=alf*pi/180;
    for i=1:N
        j=1;
        u(i,j)=Vinf*cos(alfa)+(C/(2*pi))*sqrt(1-Machinf^2)*(1+tan(...
            theta(i,j)-alfa)^2)*(1/(1+(Y(i,j)/X(i,j))^2))*(-Y(i,j)/...
            (X(i,j))^2)/(1+(1-Machinf^2)*(tan(theta(i,j)-alfa))^2);
        v(i,j)=Vinf*sin(alfa)+(C/(2*pi))*sqrt(1-Machinf^2)*(1+tan(...
            theta(i,j)-alfa)^2)*(1/(1+(Y(i,j)/X(i,j))^2))*(1/X(i,j)...
            )/(1+(1-Machinf^2)*(tan(theta(i,j)-alfa))^2);
    end

%--------------------CONDICIÓN NODOS INTERIORES----------------------%
% Ecuaciones (4.23) y (4.24).

     for i=2:N-1
        for j=2:M-1
           u(i,j)=(1/J(i,j))*(((phi(i+1,j)-phi(i-1,j))/2)*dydeta(i,j...
               )-((phi(i,j+1)-phi(i,j-1))/2)*dydxi(i,j));
           v(i,j)=(1/J(i,j))*(((phi(i,j+1)-phi(i,j-1))/2)*dxdxi(i,j)...
               -((phi(i+1,j)-phi(i-1,j))/2)*dxdeta(i,j));
        end
    end
    for j=2:M-1
        u(1,j)=(1/J(1,j))*(((phi(2,j)-phi(N-1,j)+C)/2)*dydeta(1,...
            j)-((phi(1,j+1)-phi(1,j-1))/2)*dydxi(1,j));
        v(1,j)=(1/J(1,j))*(((phi(1,j+1)-phi(1,j-1))/2)*dxdxi(1,j)-((...
            phi(2,j)-phi(N-1,j)+C)/2)*dxdeta(1,j));
    end
    u(N,:)=u(1,:);
    v(N,:)=v(1,:);

%--------------------CONDICIÓN FRONTERA INTERIOR----------------------%
% Ecuaciones (4.26) y (4.27).

    j=M;
    for i=2:N-1
        u(i,j)=(((phi(i+1,j)-phi(i-1,j))/2)/J(i,j))*(dydeta(i,j)+...
            dydxi(i,j)*g21(i,j)/g22(i,j));
        v(i,j)=-(((phi(i+1,j)-phi(i-1,j))/2)/J(i,j))*(dxdeta(i,j)+...
            dxdxi(i,j)*g21(i,j)/g22(i,j));
    end
end
```

Función: Líneas de corriente y número de Mach

```
function [psi,Mach] = Corriente(u,v,gamma,H0,d0,p,X,Y,N,M)

% Inicializamos a cero la matriz corriente.

    psi=zeros(N,M);
    [g11,g22,g21,g12,J,dxdxi,dxdeta,dydxi,dydeta]=Tensor(X,Y,N,M);
    d=d0.*(1-(u.^2+v.^2)/(2*H0)).^(1/(gamma-1));
    for i=1:N
```

```
        for j=1:M
            JU(i,j)=u(i,j)*dydeta(i,j)-v(i,j)*dxdeta(i,j);
        end
    end

% Como la función corriente es nula en la superficie, no modificamos
% su valor.
% Aplicamos la ecuación (4.19).

    for i=1:N
       for j=M:-1:2
           psi(i,j-1)=psi(i,j)+JU(i,j)*d(i,j);
       end
    end
    for i=1:N
        for j=1:M
            c(i,j)=sqrt(gamma*p(i,j)/d(i,j));
            Mach(i,j)=sqrt(u(i,j)^2+v(i,j)^2)/c(i,j);
        end
    end
end
```

Función: Distribución de presiones

```
function [Cp,p]=Presiones(u,v,Vinf,dinf,gamma,pinf,p0,d0,H0)

%----------------------------VARIABLES--------------------------------%
%p= Presión
%Cp= Coeficiente de resistencia
%-----------------------------------------------------------------------%

%Aplicamos la fórmula (3.5).
    d=d0.*(1-(u.^2+v.^2)/(2*H0)).^(1/(gamma-1));
    p=p0*(d/d0).^gamma;
    Cp=2*(p-pinf)./(dinf*Vinf^2);

end
```

Función: Coeficientes aerodinámicos

```
function [L,D]=Coeficientes(N,M,Cp,X,Y,alf,cN)

% Inicializamos dos vectores en los cuales se pretende almacenar
% los coeficientes que se encuentran dentro de la integral de
% las ecuaciones de (3.15)

ky=zeros(N,1);
kx=zeros(N,1);
xi=1:N;
alfa=alf*pi/180;
[g11,g22,g21,g12,J,dxdxi,dxdeta,dydxi,dydeta]=Tensor(X,Y,N,M);
```

```
for i=1:N
ky(i,1)=Cp(i,M)*dxdxi(i,M)/cN;
kx(i,1)=Cp(i,M)*dydxi(i,M)/cN;
end

% Integramos según la variable xi.

CLy=trapz(xi,ky);
CLx=-trapz(xi,kx);

% Descomponemos la fuerza en horizontal o vertical con el ángulo
% de ataque.

L=-CLx*sin(alfa)+CLy*cos(alfa)
D=CLx*cos(alfa)+CLy*sin(alfa)

end
```

ANEXO 2:

TRANSFORMACIÓN DE LAS ECUACIONES

Transformación del dominio:

$$x, y, t \longrightarrow \xi, \eta, \tau$$

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y, t) \\ \eta &= \eta(x, y, t) \\ \tau &= \tau(t) \end{aligned}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{y,t} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{x,t} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{x,y} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{d\tau}{dt}$$

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right|_{y,t} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial \eta} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right|_{x,t} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial \eta} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}\frac{\partial}{\partial \eta} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\frac{\partial^2}{\partial \eta} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}$$

Transformación de la ecuación:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0 \longrightarrow \frac{\partial(\rho JU)}{\partial \xi}+\frac{\partial(\rho JV)}{\partial \eta}=0$$

Aplicamos las relaciones de la página 55 (4.21 y 4.22):

$$\frac{\partial\left(\rho\frac{1}{J}\left(\phi_\xi y_\eta-\phi_\eta y_\xi\right)\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\rho\frac{1}{J}\left(-\phi_\xi x_\eta+\phi_\eta x_\xi\right)\right)}{\partial y}=0$$

Realizando la transformación del dominio vistas en la página anterior:

$$\frac{\partial\left(\rho\frac{1}{J}\left(\phi_\xi y_\eta-\phi_\eta y_\xi\right)\right)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial\left(\rho\frac{1}{J}\left(\phi_\xi y_\eta-\phi_\eta y_\xi\right)\right)}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial\left(\rho\frac{1}{J}\left(-\phi_\xi x_\eta+\phi_\eta x_\xi\right)\right)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+$$
$$\frac{\partial\left(\rho\frac{1}{J}\left(-\phi_\xi x_\eta+\phi_\eta x_\xi\right)\right)}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=0$$

Utilizando las relaciones $\xi_x=\frac{1}{J}y_\eta\ \xi_y=1\frac{1}{J}x_\eta\ \eta_x=-\frac{1}{J}y_\xi\ \eta_y=\frac{1}{J}x_\xi$

$$\frac{\partial\left(\rho\frac{1}{J}\left(\phi_\xi y_\eta-\phi_\eta y_\xi\right)\right)}{\partial \xi}\frac{1}{J}y_\eta+\frac{\partial\left(\rho\frac{1}{J}\left(\phi_\xi y_\eta-\phi_\eta y_\xi\right)\right)}{\partial \eta}\frac{-1}{J}y_\xi+$$
$$\frac{\partial\left(\rho\frac{1}{J}\left(-\phi_\xi x_\eta+\phi_\eta x_\xi\right)\right)}{\partial \xi}\frac{-1}{J}x_\eta+\frac{\partial\left(\rho\frac{1}{J}\left(-\phi_\xi x_\eta+\phi_\eta x_\xi\right)\right)}{\partial \eta}\frac{1}{J}x_\xi=0$$

Simplificando y reordenando los términos:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\left(\rho\frac{1}{J}\left(\phi_\xi y_\eta^2-\phi_\eta y_\xi y_\eta+\phi_\xi x_\eta^2-\phi_\eta x_\xi x_\eta\right)\right)\right)+$$
$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\rho\frac{1}{J}\left(-\phi_\xi y_\eta y_\xi+\phi_\eta y_\xi^2-\phi_\xi x_\eta x_\xi+\phi_\eta x_\xi^2\right)\right)=0$$

Aplicando lar relaciones del tensor métrico: $\begin{aligned} g_{11} &= x_\xi^2 + y_\xi^2 \\ g_{12} &= g_{21} = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \\ g_{22} &= x_\eta^2 + y_\eta^2 \end{aligned}$ se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\left(\rho \frac{1}{J}\left(\phi_\xi g_{22} - \phi_\eta g_{21}\right)\right)\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\rho \frac{1}{J}\left(-\phi_\xi g_{12} + \phi_\eta g_{11}\right)\right) = 0$$

Sustituyendo el tensor métrico de la transformación indirecta según las siguientes relaciones: $g^{11} = \frac{g_{22}}{J^2}$, $g^{12} = -\frac{g_{21}}{J^2}$, $g^{22} = \frac{g_{11}}{J^2}$:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\left(\rho J\left(\phi_\xi g^{11} + \phi_\eta g^{12}\right)\right)\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\rho J\left(\phi_\xi g^{21} + \phi_\eta g^{22}\right)\right) g^{11} = 0$$

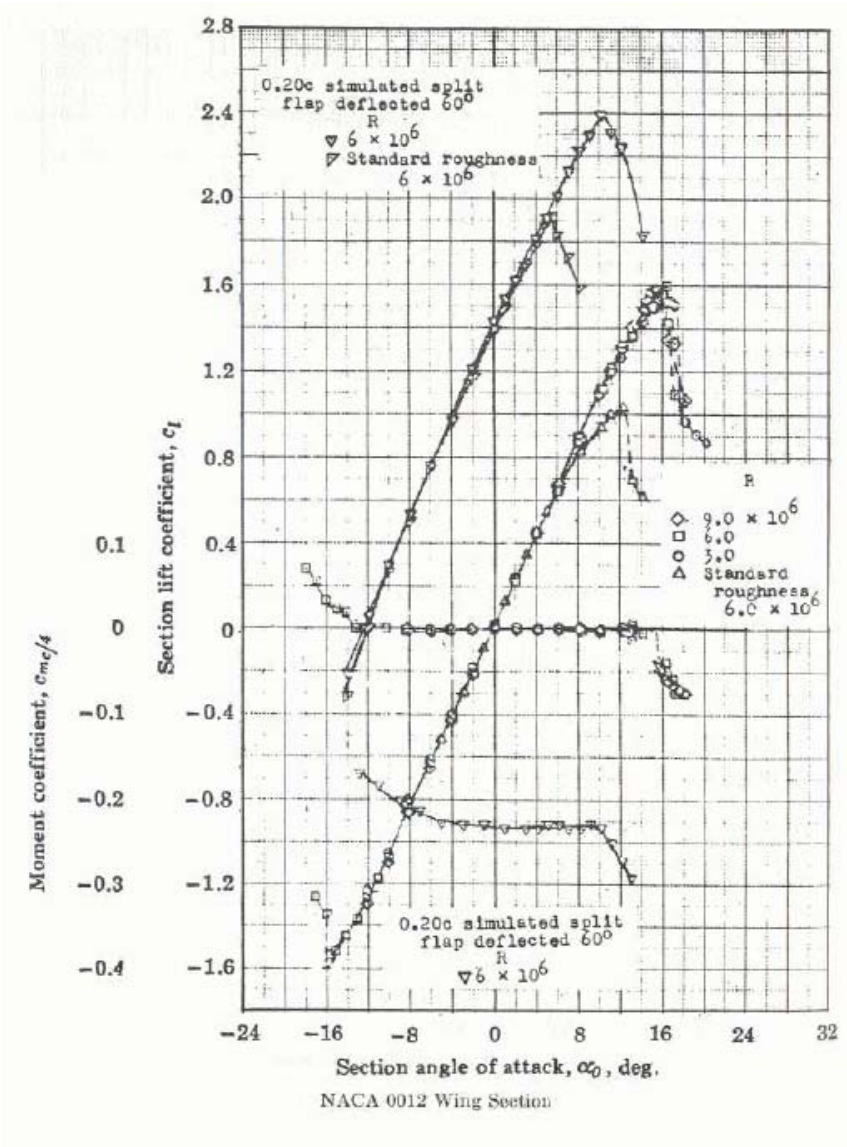
Donde se definen las velocidades según:

$$U = g^{11}\phi_\xi + g^{12}\phi_\eta$$

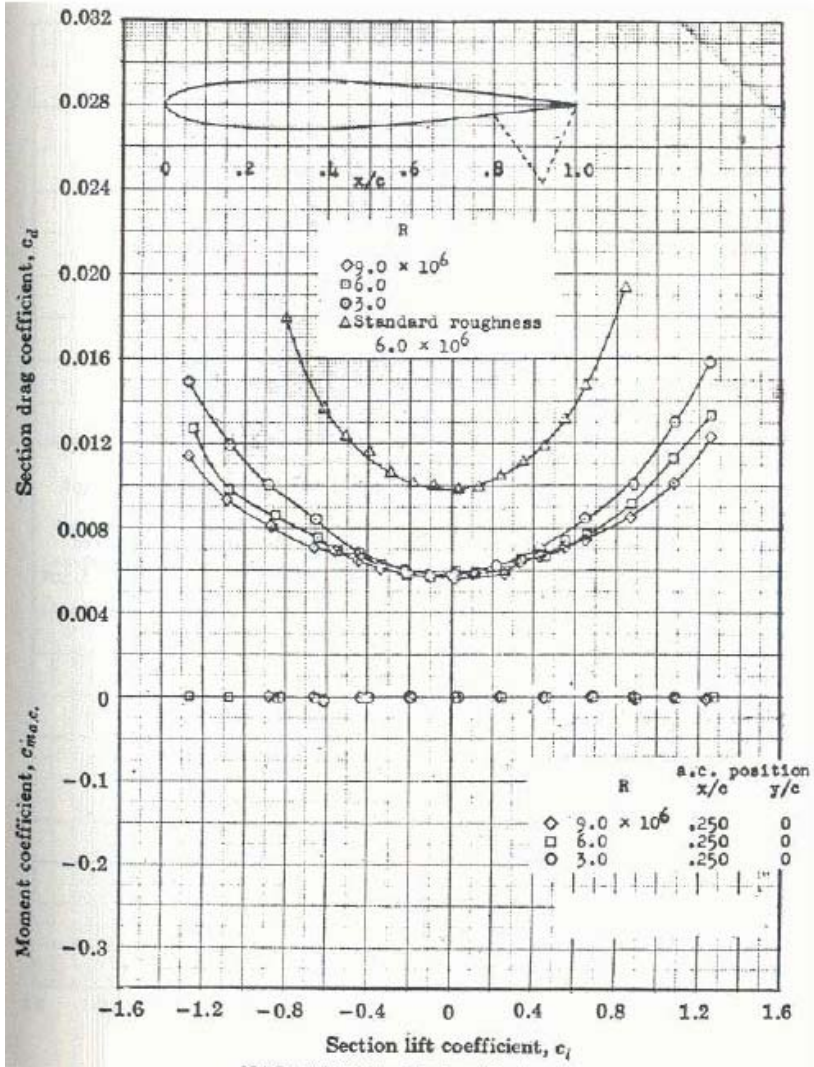
$$V = g^{21}\phi_\xi + g^{22}\phi_\eta$$

Obteniendo entonces:

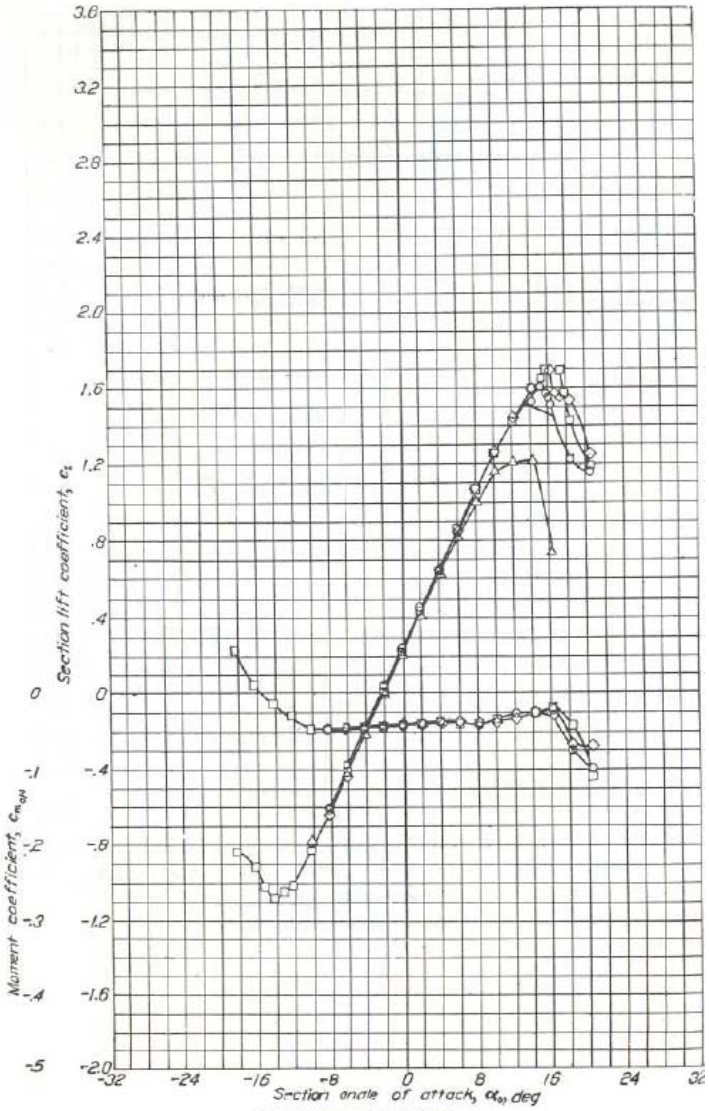
$$\frac{\partial(\rho J U)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\rho J V)}{\partial \eta} = 0$$



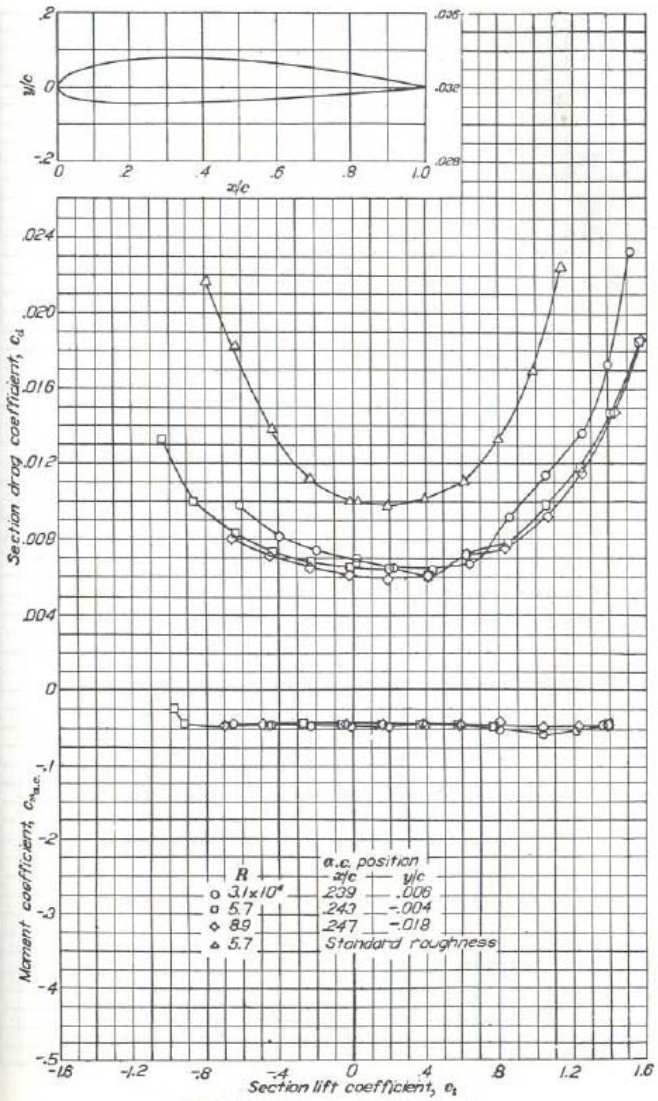
NACA 0012 Wing Section



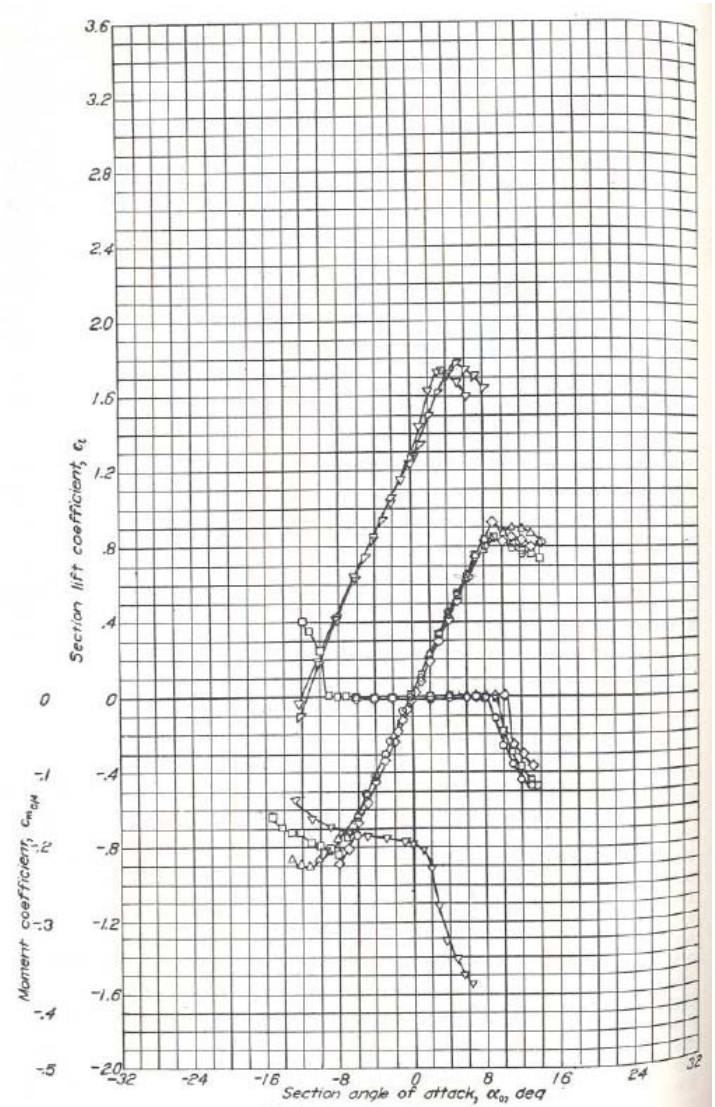
NACA 0012 Wing Section (*Continued*)



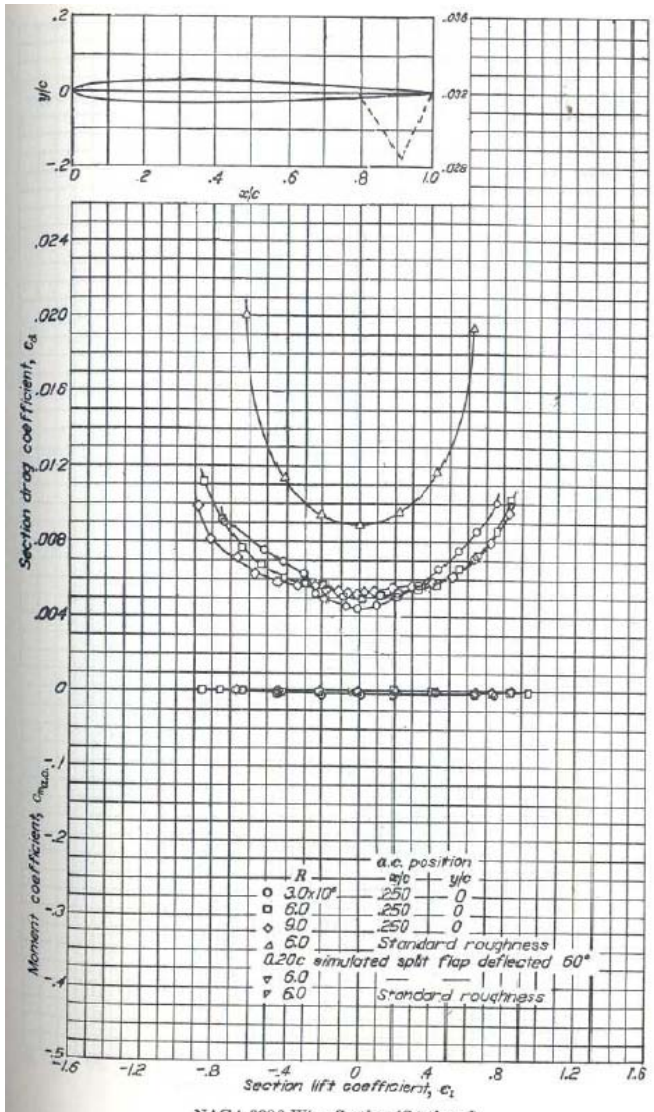
NACA 2412 Wing Section



NACA 2412 Wing Section (*Continued*)



NACA 0006 Wing Section



NACA 0006 Wing Section (Continued)