

## 9. ONDAS SUPERFICIALES DE GRAVEDAD

### *Ondas superficiales*

Lejos de las paredes del recipiente que lo contiene, la superficie libre de un líquido en equilibrio sometido a la gravedad y a las fuerzas de tensión superficial es plana y horizontal. Si por efecto de una perturbación la superficie se aparta de esa posición en algún punto, ocurre un movimiento en el líquido tendiente a restituir el equilibrio. Este movimiento se propaga sobre la superficie en forma de ondas, llamadas ondas superficiales. Esas ondas afectan también el interior del fluido, pero con menos intensidad a mayores profundidades.

Los efectos de la tensión superficial son importantes cuando la longitud de las ondas es muy corta, pues entonces la principal fuerza de restitución es la capilaridad. Estas ondas se denominan entonces *ondas capilares*. Pero cuando las longitudes de onda son grandes, la fuerza de restitución se debe sólo a la gravedad y tenemos entonces *ondas de gravedad*.

Las ondas de superficie en el agua son sin duda el fenómeno ondulatorio más fácil de observar, y no han cesado de fascinar al observador curioso. Se trata, además de un fenómeno de enorme importancia práctica y de gran relevancia para las ciencias del ambiente terrestre. Presentan una fenomenología asombrosamente variada y han dado lugar, y siguen dando hoy, a numerosas investigaciones sea teóricas que experimentales. El lector debe tener presente que en estas notas apenas tocaremos algunos aspectos básicos pues la exploración profunda de este vasto campo requiere por sí sola un entero volumen.

### *Ondas superficiales de gravedad*

Consideraremos ahora ondas de gravedad de pequeña amplitud, en las cuales la velocidad del fluido es tan pequeña que en la ecuación de Euler<sup>1</sup> se puede despreciar el término convectivo (no lineal)  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  en comparación con  $\partial\mathbf{u}/\partial t$ . El significado físico de esto es fácil de ver. En efecto, durante un intervalo de tiempo del orden del período  $T$  de las oscilaciones, las partículas del fluido recorren una distancia del orden de la amplitud  $a$  de la onda. La velocidad es entonces del orden de  $u \approx a/T$ . La escala temporal de variación de  $u$  es  $T$  y la escala espacial de su variación (en la dirección de propagación) es la longitud de onda  $\lambda$ . Luego,  $|\partial\mathbf{u}/\partial t| \approx u/T$  y  $|(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}| \approx u^2/\lambda$  y entonces el término convectivo será despreciable frente a  $\partial\mathbf{u}/\partial t$  si se cumple

$$\frac{|(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}|}{|\partial\mathbf{u}/\partial t|} \approx \frac{u^2/\lambda}{u/T} = \frac{a}{\lambda} \ll 1 \quad (9.1)$$

En otras palabras, la amplitud de las oscilaciones debe ser mucho menor que la longitud de onda.

### *Ecuaciones básicas*

Habiendo despreciado el término convectivo, la ecuación de Euler se reduce a

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla\varphi - \frac{\nabla p}{\rho} \quad (9.2)$$

---

<sup>1</sup> En la mayoría de los casos de interés los efectos de la viscosidad son muy pequeños, como vamos a mostrar más adelante en este Capítulo. por lo tanto se justifica usar la ecuación de Euler.

donde  $\varphi$  es el potencial gravitatorio. Vamos a suponer que el flujo es incompresible y la densidad es uniforme, entonces la (9.2) se puede escribir como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla \left( \varphi + \frac{p}{\rho} \right) \quad (9.3)$$

Tomando el rotor de la (9.3) resulta  $\partial \boldsymbol{\omega} / \partial t = 0$  y por lo tanto  $\boldsymbol{\omega} = \text{cte.}$ . Pero en un movimiento oscilatorio el promedio temporal de la velocidad es nulo, luego  $\boldsymbol{\omega} = \text{cte.}$  implica  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = 0$ . Puesto que el flujo es incompresible e irrotacional podemos poner  $\mathbf{u} = \nabla \phi$  donde  $\phi$  es el potencial de velocidad. De la (9.3) obtenemos entonces

$$p = -\rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (9.4)$$

donde pusimos  $\varphi = g z$ . Vamos a suponer que el eje  $z$  es vertical y hacia arriba y que la superficie libre del líquido en equilibrio es el plano  $z = 0$  (Fig. 9.1).

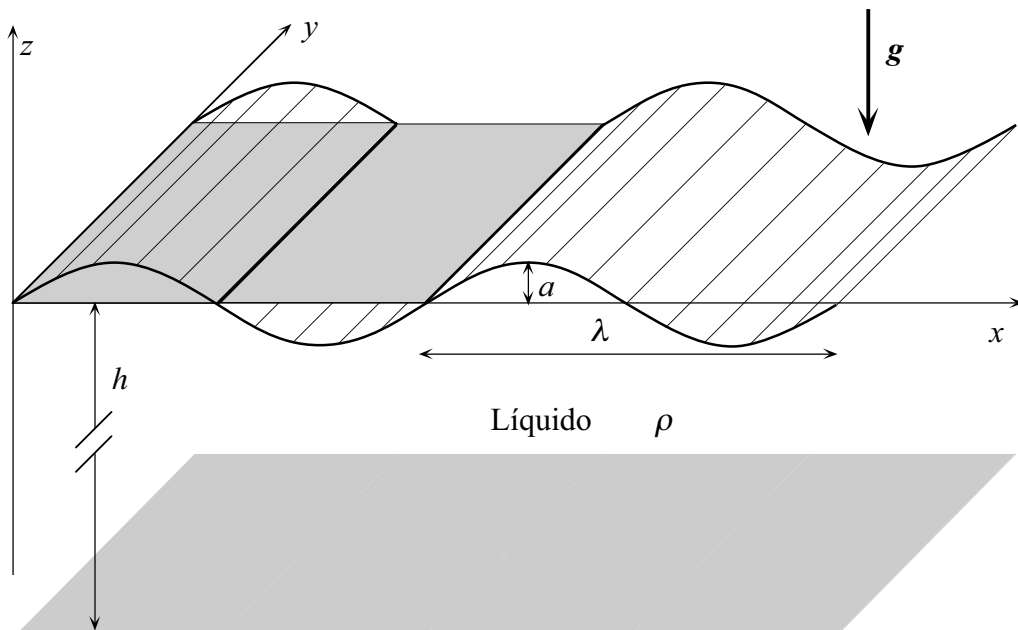


Fig. 9.1. Onda de superficie en un líquido.

Vamos a indicar con  $\zeta(x, y, t)$  la coordenada  $z$  de un punto de la superficie perturbada. En el equilibrio  $\zeta = 0$ , de modo que  $\zeta$  representa el desplazamiento vertical de la superficie debido a las oscilaciones. Supongamos que sobre la superficie libre se ejerce una presión constante  $p_0$  (la presión atmosférica). Entonces por la (9.4) se debe cumplir la condición de contorno

$$p_0 = -\rho g \zeta - \rho \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=\zeta} \quad (9.5)$$

En lugar de  $\phi$  podemos emplear

$$\phi' = \phi + \frac{p_0}{\rho} t \quad (9.6)$$

puesto que, claramente,  $\mathbf{u} = \nabla\phi' = \nabla\phi$ . Con esto se absorbe el término  $p_0$  de la (9.5), y podemos escribir la condición de contorno sobre la superficie (quitando la ') en la forma

$$g\xi + \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{z=\xi} = 0 \quad (9.7)$$

Puesto que la amplitud de las oscilaciones es pequeña por la (9.1), el desplazamiento  $\xi$  también lo es. Por lo tanto con la misma aproximación podemos suponer que la componente vertical de la velocidad de los puntos de la superficie es simplemente

$$u_z(x, y, \xi, t) = \frac{\partial\xi}{\partial t} \quad (9.8)$$

Pero, por otro lado

$$u_z(x, y, \xi, t) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=\xi} \quad (9.9)$$

de modo que

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=\xi} \quad (9.10)$$

Pero de la (9.7) tenemos que

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)_{z=\xi} = 0 \quad (9.11)$$

y, entonces, de estas dos últimas expresiones obtenemos

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)_{z=\xi} = 0 \quad (9.12)$$

Ya que las oscilaciones son pequeñas, podemos evaluar la cantidad entre paréntesis en  $z = 0$  en vez de  $z = \xi$ , con lo que finalmente el problema se reduce a las siguientes ecuaciones

$$\nabla^2\phi = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)_{z=0} = 0 \quad (9.13)$$

### ***Ondas elementales monocromáticas***

Gracias a la aproximación de suponer perturbaciones de pequeña amplitud, hemos llegado a un problema *lineal* que se expresa en las (9.13). En virtud de la linealidad, tiene sentido buscar soluciones de las (9.13) en la forma de perturbaciones sinusoidales de la superficie libre, de longitud de onda  $\lambda$  y período  $T$ , dado que mediante oportunas superposiciones de perturbaciones de este tipo podemos encontrar la solución de cualquier problema de condiciones iniciales. Vamos a suponer que la superficie del líquido es ilimitada y su profundidad  $h$  es muy grande, de modo

que  $h \gg \lambda$ , donde  $\lambda$  es la longitud de onda de la perturbación, cuyo período es  $T$ . Por lo tanto tendremos lo que se denomina una onda de gravedad en aguas extensas y profundas. En este problema, entonces, no hay condiciones de contorno en los bordes ni en el fondo.

Supongamos que la onda se propaga a lo largo del eje  $x$ , de modo que todas las magnitudes que la describen son independientes de  $y$ . Tendremos entonces

$$\phi = f(z)\cos(k_x x - \omega t) \quad \text{con} \quad |k_x| = k = 2\pi/\lambda \quad \text{y} \quad \omega = 2\pi/T \quad (9.14)$$

Sustituyendo  $\phi$  en la ecuación de Laplace (9.13) obtenemos la siguiente ecuación para  $f$ :

$$f'' - k^2 f = 0 \quad (9.15)$$

cuya solución general es

$$f = Ae^{kz} + Be^{-kz} \quad , \quad A, B = \text{cte.} \quad (9.16)$$

En el presente caso  $B$  debe ser nulo, pues  $\phi$  debe ser finito para  $z \rightarrow -\infty$  ya que hemos supuesto  $h = \infty$ . Luego el potencial de velocidad tiene la forma

$$\phi = Ae^{kz} \cos(k_x x - \omega t) \quad (9.17)$$

Este comportamiento exponencialmente decreciente en la dirección normal a la superficie es característico de las ondas superficiales, que se suelen también denominar *evanescentes* dado que no se propagan en esa dirección.

Por otra parte, la condición de contorno (9.13) en la superficie requiere que

$$\omega = \pm \Omega(k) \quad , \quad \Omega(k) = \sqrt{gk} \quad (9.18)$$

La expresión (9.18), que recibe el nombre de *relación de dispersión*, nos muestra que la frecuencia de oscilación de una onda depende de su longitud de onda. Se puede observar que  $\Omega$  es una función *par* de  $k_x$ , y que para cada valor de  $k_x$  hay dos modos, correspondientes a tomar el signo + o el – en la (9.18). Para el modo + la onda se propaga en el sentido  $x$  positivo si  $k_x > 0$  y en el sentido  $x$  negativo si  $k_x < 0$ , es decir, en el sentido determinado por el signo de  $k_x$ . Para el modo – la onda se propaga en el sentido *opuesto* al determinado por el signo de  $k_x$ . Por lo tanto, las ondas del modo + con  $k_x > 0$  y las del modo – con  $k_x < 0$  se propagan ambas hacia la derecha.

A partir de la relación de dispersión podemos determinar la velocidad de fase  $u_f$  de la onda elemental (9.17) como

$$u_f \equiv \frac{\omega}{k_x} = \text{Sign}(k_x)\text{Sign}(\omega)c \quad , \quad c \equiv \frac{\Omega(k)}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (9.19)$$

La (9.19) nos muestra que  $c$  depende de la longitud de onda. En este caso la velocidad de fase es proporcional a la raíz cuadrada de la longitud de onda. Debido a esto, una superposición de ondas elementales de diferente longitud de onda cambia de forma mientras se propaga, y un paquete de ondas localizado se dispersa. Por este motivo, las ondas que tienen esta propiedad se dicen *dispersivas*. La otra velocidad característica de una onda es la *velocidad de grupo*  $u_g$ , que

se define en forma elemental como la velocidad con la cual se propaga un paquete de ondas casi monocromático, y está dada por

$$u_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k_x} = \text{Sign}(k_x) \text{Sign}(\omega) C \quad , \quad C \equiv \frac{\partial \Omega(k)}{\partial k} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \frac{1}{2} c \quad (9.20)$$

A partir de aquí vamos a escribir todas las fórmulas para  $k_x > 0$  y omitiremos el subíndice  $x$  pues no se va a producir confusión, pero el lector debe tener claro que mientras en el argumento del coseno en la (9.17) figura  $k_x$  (con su signo), en la exponencial de la (9.17) y en la relación de dispersión (9.18) figura su *módulo*  $k$ . Lo mismo será para las expresiones análogas que escribamos de ahora en más. Además, cuando se superpongan las soluciones elementales para formar trenes o paquetes de onda hay que recordar que es necesario tener en cuenta ambos modos de la relación de dispersión, y para cada uno de ellos ambos signos de  $k_x$ .

De la (9.19) y la (9.20) vemos que la velocidad de grupo *difiere* de la velocidad de fase, cosa que ocurre siempre que se tengan ondas dispersivas. En este caso la velocidad de grupo es menor (en módulo) que la velocidad de fase. Se dice entonces que hay *dispersión normal*, que se pone de manifiesto en que las crestas y valles de un grupo de ondas (que viajan con la velocidad de fase) tienden a *adelantarse* al grupo. De resultados de esto, a medida que el grupo avanza aparecen nuevas crestas y valles a la retaguardia del grupo, que se desplazan hacia su parte delantera y por último desaparecen en la vanguardia del mismo. Esto se puede observar si se arroja una piedra de regular tamaño a un estanque cuyas aguas están quietas. En ese caso se forma un tren de ondas circulares (con centro en el lugar donde cayó la piedra). El tren de ondas es una superposición de ondas elementales de diferentes longitudes de onda, las más largas con  $\lambda$  del orden de la dimensión lineal de la piedra y de ahí para abajo (incluyendo las ondas capilares que estudiaremos más adelante), pero las que se observan más fácilmente son las ondas largas, las cuales si el tamaño de la piedra es adecuado son ondas de gravedad.

Además del que acabamos de mencionar, la dispersión da lugar a otros efectos interesantes en la propagación de perturbaciones de la superficie de un líquido, cuyo estudio requiere refinar y generalizar las nociones elementales de velocidad de fase y velocidad de grupo. Dado que nuestras generalizaciones se aplican a todo tipo de ondas, siempre que sean de pequeña amplitud, conviene primero completar el examen de las ondas de superficie en líquidos y dejar para un poco más adelante el estudio de la dispersión.

### Propiedades de las ondas de gravedad en aguas profundas

Una vez determinado el potencial  $\phi$  podemos calcular el campo de velocidad. Resulta

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = -kAe^{kz} \text{sen}(kx - \omega t) \\ u_z &= \frac{\partial \phi}{\partial z} = kAe^{kz} \text{cos}(kx - \omega t) \end{aligned} \quad (9.21)$$

Las (9.21) muestran que el módulo de la velocidad vale  $kAe^{kz}$  y por lo tanto disminuye exponencialmente con la profundidad. En cualquier punto del fluido ( $x, z$  fijos) el vector velocidad rota uniformemente en el plano  $x, z$  con el período  $T$ .

Es interesante calcular las trayectorias de las partículas del fluido. Sean  $(X, Z)$  las coordenadas de un elemento del fluido cuya posición de equilibrio es  $(x_0, z_0)$ . Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(X - x_0) = u_x(X, Z) \cong u_x(x_0, z_0) &= -kAe^{kz_0} \text{sen}(kx_0 - \omega t) \\ \frac{d}{dt}(Z - z_0) = u_z(X, Z) \cong u_z(x_0, z_0) &= kAe^{kz_0} \text{cos}(kx_0 - \omega t) \end{aligned} \quad (9.22)$$

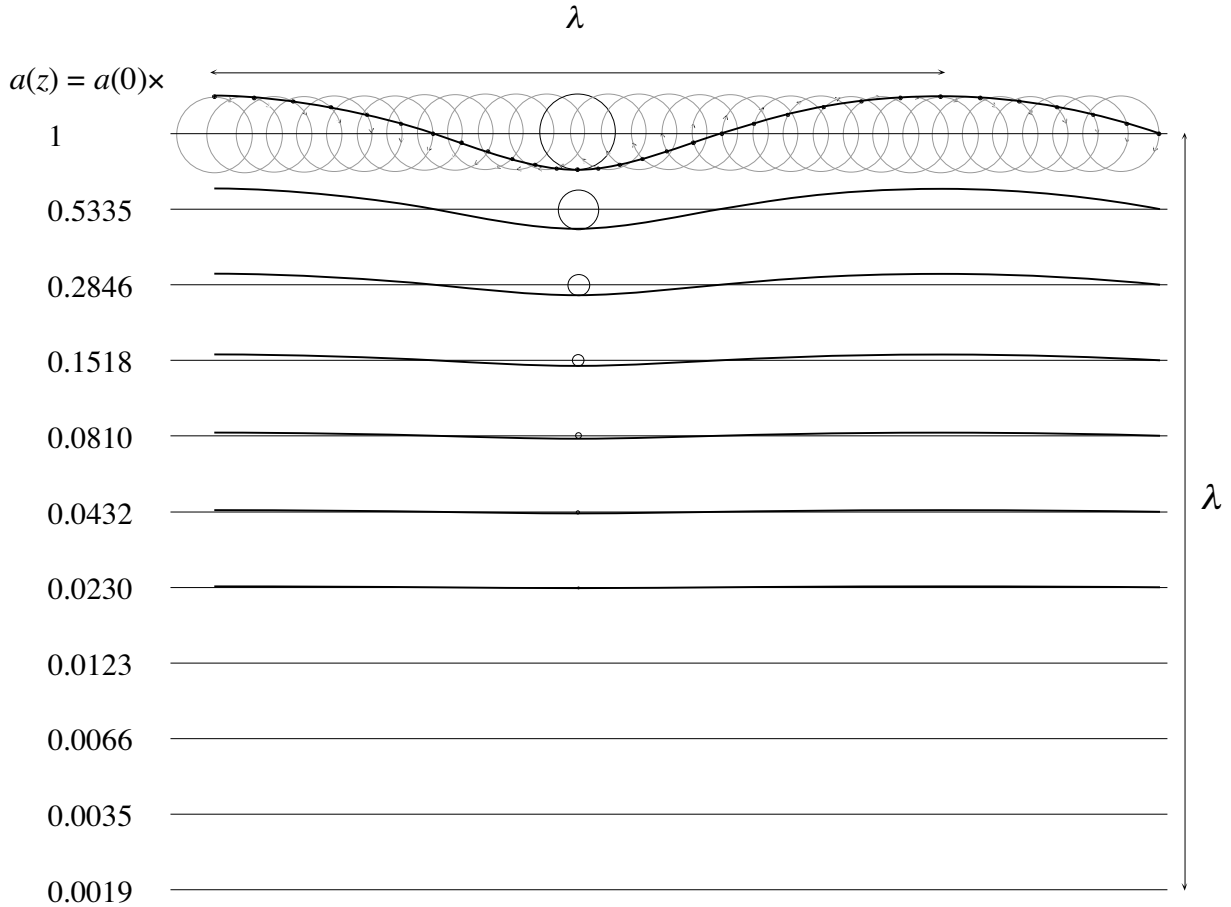


Fig. 9.2. Representación de una onda elemental de superficie. Se han dibujado las trayectorias de los puntos de la superficie para indicar como se combinan esos movimientos para dar lugar a la ondulación de la misma. Si el sentido de rotación es horario (como se indica por medio de las flechas) la onda se propaga hacia la derecha. Para que en el dibujo se puedan apreciar mejor las características del fenómeno se supuso  $a = \lambda/10$  con lo cual la condición  $a \ll \lambda$  no se cumple muy bien. Debido a eso la perturbación de la superficie no es exactamente sinusoidal, como se puede notar mirando cuidadosamente la figura. Se puede observar que el radio de las órbitas de las partículas del fluido disminuye muy rápidamente con la profundidad: a profundidades mayores que  $0.6\lambda$  ya no se pueden dibujar las circunferencias.

En las expresiones anteriores hemos hecho las aproximaciones  $kX \cong kx_0$  y  $kZ \cong kz_0$  que se justifican para oscilaciones de pequeña amplitud ya que

$$k(X - x_0) \approx ka = 2\pi a / \lambda \ll 1 \quad , \quad k(Z - z_0) \approx ka = 2\pi a / \lambda \ll 1 \quad (9.23)$$

Integrando las (9.22) en el tiempo obtenemos la trayectoria buscada:

$$X - x_0 = -\frac{kA}{\omega} e^{kz_0} \cos(kx_0 - \omega t) \quad , \quad Z - z_0 = -\frac{kA}{\omega} e^{kz_0} \sin(kx_0 - \omega t) \quad (9.24)$$

Las (9.24) muestran que las partículas del fluido describen circunferencias de radio

$$a(z_0) = \frac{kA}{\omega} e^{kz_0} \quad (9.25)$$

alrededor de su posición de equilibrio  $(x_0, z_0)$ ; este radio disminuye exponencialmente al aumentar la profundidad (Fig. 9.2). Por lo tanto este movimiento oscilatorio no es ni longitudinal ni transversal. Esto se debe a que el fluido es incompresible, y entonces las parcelas no se pueden mover solamente en sentido vertical, pues cuando una parcela desciende (o asciende), otras porciones del fluido tiene que desplazarse en sentido horizontal para dejarle lugar (u ocupar el lugar que deja vacante). Finalmente podemos observar que  $a = a(0) = kA/\omega$  es la amplitud de la oscilación de la superficie libre, que es la magnitud que interviene en la condición (9.1).

En particular, para  $z_0 = 0$  tenemos de la (9.24) que

$$\zeta(x, t) = -\frac{kA}{\omega} \sin(kx - \omega t) \quad (9.26)$$

consistentemente con la (9.10). Por lo tanto para nuestras soluciones elementales se cumple que

$$\frac{\omega}{k} e^{kz} \zeta(x, t') = \phi(x, z, t) \quad , \quad t' = t - T/4 \quad (9.27)$$

y en consecuencia dado

$$\zeta(x, t) = a \cos(kx - \omega t) \quad (9.28)$$

queda inmediatamente determinado  $\phi$ . Por lo tanto es equivalente describir la onda en términos de  $\phi$  o de  $\zeta$ . En lo sucesivo vamos a usar la segunda alternativa porque es más fácil visualizar el desplazamiento de la superficie libre antes que el potencial de velocidad.

### ***Ondas capilares***

Hasta ahora, en nuestro estudio de las ondas superficiales no hemos tenido en cuenta las fuerzas de tensión superficial. Veremos que la capilaridad tiene un efecto importante sobre las ondas de gravedad de longitud de onda pequeña.

Como antes vamos a suponer que la amplitud de las oscilaciones es pequeña en comparación con la longitud de onda ( $a \ll \lambda$ ). El planteo del problema se puede hacer del mismo modo que antes y se obtiene que el potencial de velocidad satisface como antes la ecuación de Laplace (la primera de las (9.13)). La diferencia con el caso anterior aparece en la condición de contorno sobre la superficie, pues ahora debido a la curvatura de la superficie cuando ésta es perturbada, hay una diferencia de presión entre ambos lados de la misma. Esta diferencia está dada por la fórmula de Laplace (2.48)

$$\delta p = \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (9.29)$$

donde  $\gamma$  es el coeficiente de tensión superficial y  $R_1, R_2$  los radios principales de curvatura de la superficie libre. Luego la presión cerca de la superficie y en el seno del líquido es

$$p = p_0 - \gamma \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) \quad (9.30)$$

donde  $p_0$  es la presión externa. Por lo tanto la condición de contorno sobre la superficie se escribe ahora

$$\rho g \xi + \rho \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=\xi} - \gamma \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (9.31)$$

que difiere de la (9.7) por la presencia del último término. Como antes, derivamos esta ecuación respecto del tiempo y reemplazamos  $\partial \xi / \partial t$  por  $(\partial \phi / \partial z)_{z=0}$  y obtenemos la siguiente condición de contorno para el potencial de velocidad:

$$\left[ \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{\rho g} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \right]_{z=0} = 0 \quad (9.32)$$

que difiere de la segunda de las (9.13) por la presencia del tercer término.

Buscamos nuevamente soluciones en forma de ondas monocromáticas del tipo (9.14). La solución de la ecuación de Laplace sigue siendo de la forma (9.17). Sustituyendo entonces la (9.17) en la condición de contorno (9.32) obtenemos ahora la relación de dispersión

$$\omega = \pm \sqrt{gk + \frac{\gamma k^3}{\rho}} \quad (9.33)$$

El cociente entre el término de gravedad y el término de tensión superficial del radicando de la (9.33) está determinado por el número puro

$$B = \frac{\rho g}{\gamma k^2} \quad (9.34)$$

que se denomina *número de Bond* (o también *número de Eötvös*). Cuando  $B \gg 1$  los efectos de la tensión superficial son despreciables y estamos en el caso de las ondas de gravedad puras que acabamos de estudiar. Si, viceversa,  $B \ll 1$ , la dinámica de las oscilaciones está determinada por la tensión superficial y tenemos *ondas capilares* puras. En los casos intermedios ambos efectos se deben tener en cuenta y tenemos las *ondas de gravedad capilares*.

Vemos entonces que para longitudes de onda largas, tales que  $k^2 \ll k_0^2 = \rho g / \gamma$ , esto es, para

$$\lambda \gg \lambda_0 = 2\pi / k_0 = 2\pi \sqrt{\gamma / \rho g} \quad (= 1.72 \text{ cm para agua a } 15^\circ \text{C}) \quad (9.35)$$

el efecto de la capilaridad es despreciable, y tenemos una *onda de gravedad pura*. La longitud  $\lambda_0$  se suele denominar *distancia capilar*.

En el límite opuesto, cuando  $\lambda \ll \lambda_0$ , se puede despreciar el efecto de la gravedad y entonces



$$\omega = \pm \sqrt{\frac{\gamma k^3}{\rho}} \quad (9.36)$$

Estas ondas se denominan *ondas capilares puras* (en idioma inglés “ripples”, o sea rizos). Los casos intermedios se denominan *ondas de gravedad capilares*.

Se puede observar que la velocidad de fase de las ondas capilares está dada por

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\gamma k}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}} \quad (9.37)$$

y por lo tanto, a diferencia de las ondas de gravedad (puras) es *inversamente* proporcional a la raíz cuadrada de la longitud de onda.

En cuanto a la velocidad de grupo, se obtiene

$$C = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\gamma k}{\rho}} = \frac{3}{2} c \quad (9.38)$$

Por lo tanto la velocidad de grupo de las ondas capilares es *mayor* que la velocidad de fase, al revés de lo que ocurre con las ondas de gravedad (puras). En estos casos se dice que hay *dispersión anómala*<sup>2</sup>, que se pone de manifiesto en que las crestas y valles de un grupo de ondas tienden a *retrasarse* respecto del grupo: a medida que el grupo avanza se observa que nuevas crestas y valles aparecen a la vanguardia del grupo, se van desplazando hacia la parte posterior, y finalmente desaparecen en la retaguardia del mismo. Este comportamiento se puede observar claramente cuando las gotas de lluvia caen sobre un estanque cuyas aguas están en calma. En este caso (a diferencia de cuando se arroja una piedra) el tren de ondas contiene solamente ondas capilares debido al pequeño tamaño de las gotas de lluvia; esto permite observarlas bien a pesar de su corta longitud de onda y reducida amplitud. Las ondas capilares también están presentes en el tren que se produce cuando se arroja una piedra, pero es muy difícil verlas debido a que las ondas de gravedad son mucho más vistosas y su amplitud es mayor.

En la Fig. 9.3 se representan la velocidad de fase y la velocidad de grupo en función de  $\lambda$  para las ondas de gravedad capilares así como para los casos límite de ondas de gravedad puras y ondas capilares. Se puede observar que hay una velocidad de grupo mínima  $C_0$ , dada por

$$C_0 = \left(9\alpha \frac{\gamma g}{\rho}\right)^{1/4}, \quad \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 = 0.1547... \quad (9.39)$$

que ocurre para

$$k = k_{0g} = \left(\alpha \frac{g\rho}{\gamma}\right)^{1/2} \quad (9.40)$$

Para agua a 15 °C resulta  $C_0 \cong 17.8$  cm/s y  $\lambda_{0g} = 2\pi/k_{0g} \cong 4.375$  cm.

También la velocidad de fase tiene un mínimo dado por

<sup>2</sup> El adjetivo “anómalo” no es ciertamente apropiado, dado que este tipo de comportamiento no tiene nada de patológico.

$$c_0 = \left( \frac{4\gamma g}{\rho} \right)^{1/4} \quad (9.41)$$

que ocurre para  $\lambda = \lambda_0$  (ec. (9.35)). Para agua a 15 °C resulta  $c_0 \cong 23.2$  cm/s. Este mínimo separa las dos *ramas* de la relación de dispersión: la *rama capilar* y la *rama de gravedad*. A la izquierda de este mínimo, en la rama capilar, la velocidad de grupo es mayor que la velocidad de fase, mientras que a la derecha, en la rama de gravedad, es menor. Hay varios fenómenos interesantes asociados con estos hechos, que examinaremos más adelante.

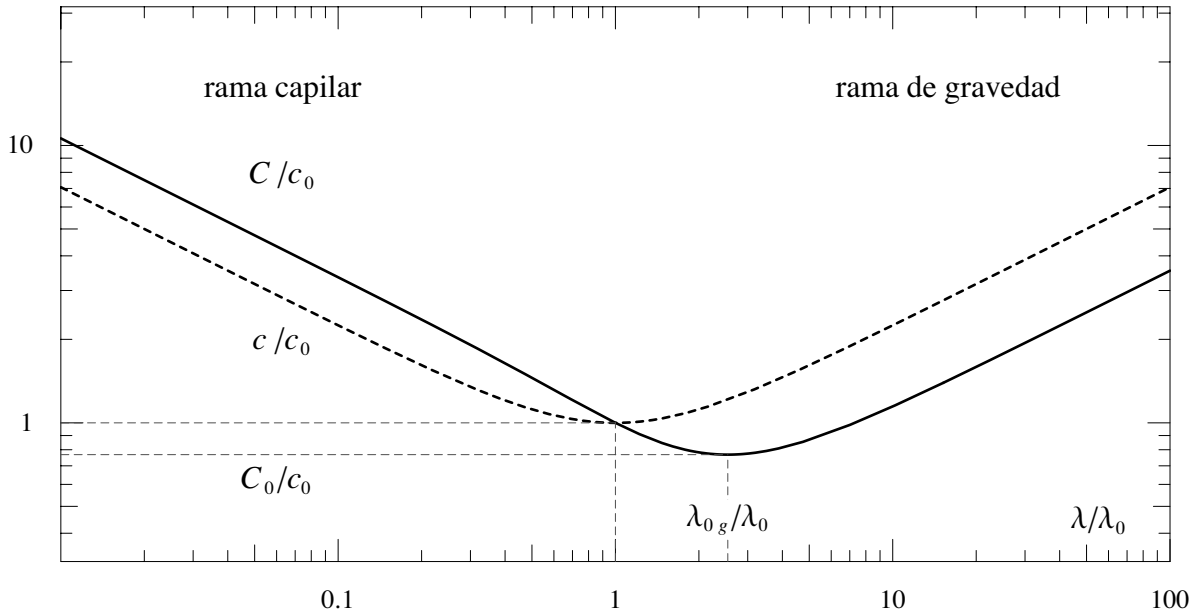


Fig. 9.3. Velocidad de fase (línea de trazos) y velocidad de grupo (línea llena) para las ondas de gravedad capilares en aguas profundas. Al usar escalas logarítmicas se aprecian mejor las regiones donde valen las fórmulas aproximadas para las ondas capilares puras (la región  $\lambda/\lambda_0 < 0.3$  en la cual  $c$  y  $C$  aparecen en el gráfico como rectas paralelas con pendiente  $-1/2$ ) y para ondas de gravedad puras (la región  $\lambda/\lambda_0 > 6$  donde las líneas son rectas paralelas con pendiente  $+1/2$ ). De acuerdo con lo que se puede apreciar en el gráfico, vale la pena aplicar las fórmulas exactas tan sólo en la zona de transición entre ambos regímenes, esto es, en el intervalo  $0.3 < \lambda/\lambda_0 < 6$  (es decir, entre 0.5 y 10 cm para el agua).

### Ondas superficiales en capas de profundidad finita

Veamos como se modifican los presentes resultados cuando la profundidad  $h$  de la capa líquida es finita. Lo único que cambia respecto del tratamiento anterior es que debemos agregar la condición de contorno en el fondo

$$(u_z)_{x=-h} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{x=-h} = 0 \quad (9.42)$$

Por lo tanto, al escribir la solución de la ecuación de Laplace (9.14) hay que conservar el término  $Be^{-kz}$  de la (9.16). Imponiendo entonces la condición (9.42) es fácil ver que resulta

$$\phi = A' \cosh[k(z+h)] \cos(kx - \omega t) \quad , \quad A' = 2Ae^{-kh} \quad (9.43)$$

A partir de la (9.43) es sencillo verificar que las trayectorias de las parcelas del fluido son ahora *elipses achatadas*. El achatamiento es tanto mayor cuanto menor es  $h/\lambda$ , y además crece con la profundidad, hasta que el semieje vertical se hace nulo en  $z = -h$  (pues allí  $u_z = 0$ ), de modo que en el fondo el movimiento del fluido es puramente horizontal.

Introduciendo la (9.43) en la condición de contorno en la superficie (9.32) resulta la siguiente relación de dispersión general:

$$\omega = \pm \sqrt{\left(gk + \frac{\gamma k^3}{\rho}\right) \tanh kh} \quad (9.44)$$

Examinaremos ahora diferentes casos.

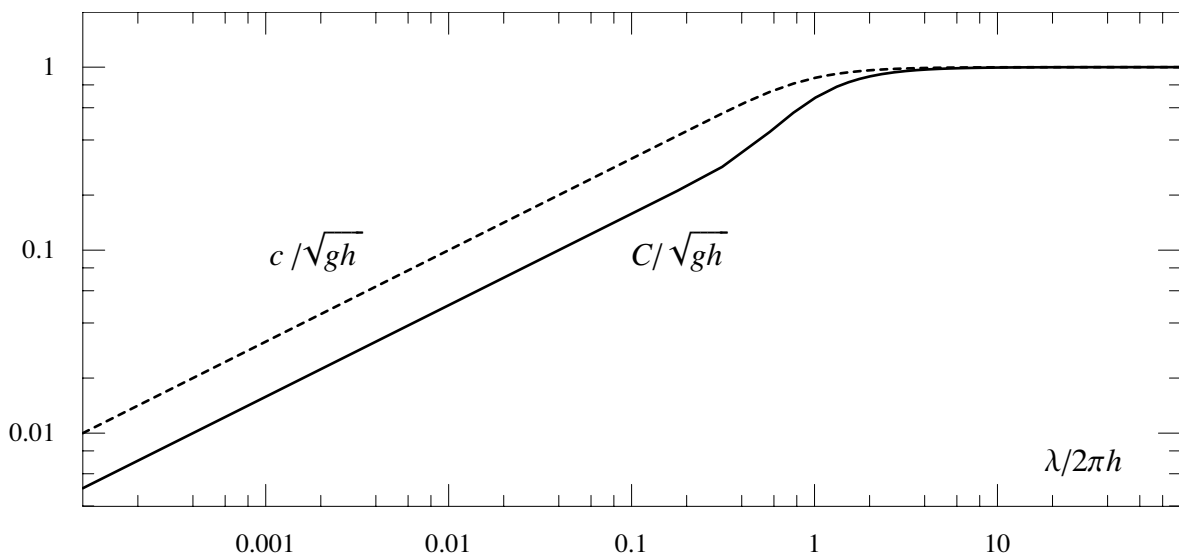


Fig. 9.4. Velocidad de fase (línea de trazos) y velocidad de grupo (línea llena) de las ondas de gravedad puras como función de la profundidad de la capa líquida. Al usar escalas logarítmicas se aprecian mejor las regiones donde valen las fórmulas aproximadas para aguas profundas (la región  $\lambda/2\pi h < 0.3$  en la cual  $c$  y  $C$  aparecen en el gráfico como rectas paralelas con pendiente 1/2) y aguas poco profundas ( $\lambda/2\pi h > 4$  donde las líneas son horizontales). De acuerdo con lo que se puede apreciar en el gráfico, vale la pena aplicar las fórmulas completas (9.46) tan sólo en la zona de transición ( $0.2 < \lambda/2\pi h < 4$ ) entre ambos regímenes, que apenas abarca algo más de una década.

### Ondas de gravedad puras

En el caso de ondas de gravedad puras ( $k^2 \ll \rho g/\gamma$ , o sea  $\lambda \gg \lambda_0$ ) obtenemos

$$\omega = \pm \sqrt{gk \tanh kh} \quad (9.45)$$

y es fácil verificar que la velocidad de fase y la velocidad de grupo de estas ondas son, respectivamente

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh} \quad , \quad C = \frac{1}{2} c \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (9.46)$$

El comportamiento de la velocidad de fase y la velocidad de grupo de las ondas de gravedad puras como función del cociente  $\lambda/h$  se puede apreciar en la Fig. 9.4. Cuando  $kh \gg 1$  (o sea  $\lambda \ll h$ ) se tiene  $\tanh kh \approx 1$  y recuperamos el caso de ondas de gravedad en aguas profundas ya estudiado anteriormente.

#### Ondas de gravedad puras en aguas poco profundas

Más novedoso es lo que ocurre cuando  $kh \ll 1$  ( $\lambda \gg h$ ). En este caso  $\tanh kh \approx kh$  de modo que

$$\omega = \pm k \sqrt{gh} \quad (9.47)$$

Por lo tanto las ondas de gravedad en aguas poco profundas *no son dispersivas*, pues

$$c = \sqrt{gh} = C \quad (9.48)$$

Debido a esto, un paquete de ondas de gravedad en aguas de poca profundidad se propaga sin cambio de forma.

#### Ondas capilares puras

Cuando  $k^2 \gg \rho g / \gamma$  ( $\lambda \ll \lambda_0$ ) domina el efecto de la tensión superficial, y la (9.44) se reduce a

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{\gamma k^3}{\rho} \tanh kh} \quad (9.49)$$

de modo que las velocidades de fase y de grupo de las ondas capilares resultan ser, respectivamente

$$c = \sqrt{\frac{\gamma k}{\rho} \tanh kh} \quad , \quad C = \frac{3}{2} c \left( 1 + \frac{2kh}{3 \sinh 2kh} \right) \quad (9.50)$$

Cuando  $kh \gg 1$  (o sea  $\lambda \ll h$ ) se tiene  $\tanh kh \approx 1$  y recuperamos el caso ya visto de las ondas capilares en aguas profundas (ecs. (9.35-37)). En cambio, cuando  $kh \ll 1$  resulta

$$\omega = \pm k^2 \sqrt{\frac{\gamma h}{\rho}} \quad (9.51)$$

y entonces la velocidad de fase y la velocidad de grupo son, respectivamente:

$$c = k \sqrt{\frac{\gamma h}{\rho}} \quad , \quad C = 2c \quad (9.52)$$

En consecuencia las ondas capilares presentan siempre dispersión anómala.

### ***Efecto de la viscosidad sobre las ondas superficiales***

Sobre una superficie libre no se ejercen esfuerzos tangenciales. Debido a la viscosidad esto implica que  $\partial u_x / \partial z + \partial u_z / \partial x = 0$  sobre la superficie. Los flujos ideales que hemos considerado no cumplen esta condición. Por lo tanto cerca de la superficie libre hay una capa límite en la cual la vorticidad no es nula, mientras que el resto del flujo es potencial, tal como lo hemos considerado hasta ahora. Dentro de esta capa límite las derivadas de la velocidad disminuyen rápidamente, pero es importante observar que (a diferencia de lo que ocurre cerca de una superficie sólida) esto no implica que el gradiente de la velocidad sea fuerte. En la mayoría de los casos de interés el número de Reynolds del flujo de una onda de gravedad es muy grande. En efecto,  $Re = u\lambda / \nu = ac / \nu$ . Para el agua, con  $c = \sqrt{g\lambda / 2\pi}$  y con el valor de  $\nu$  de la Tabla 7.1 resulta  $Re = 1135 a(\text{cm})[\lambda(\text{cm})]^{1/2}$ .

El principal efecto de la viscosidad es el de producir el amortiguamiento de las ondas. Sin embargo, dado que  $Re \gg 1$  para ondas de longitud de onda apreciable, este amortiguamiento es casi siempre muy pequeño. Se puede mostrar que el coeficiente de amortiguamiento, definido como  $\gamma = |da/dt| / a$ , donde  $a$  es la amplitud de la onda superficial vale

$$\gamma = 2\nu k^2 = 8\pi^2 \nu / \lambda^2 \quad (9.53)$$

Para agua resulta  $\gamma(\text{s}^{-1}) \approx 0.87 / \lambda^2(\text{cm}^2)$ . Así, por ejemplo, para un tren de ondas con  $\lambda = 10$  m que viaja con una velocidad de grupo de 2 m/s se obtiene  $\gamma \approx 10^{-6} \text{s}^{-1}$ . Es decir, el tren de ondas debe viajar durante  $10^6$  s (unos 11 días) durante los cuales recorre alrededor de 2000 km, antes de amortiguarse apreciablemente. Por lo tanto las olas generadas por los vientos en el océano se propagan por distancias enormes. Esto explica porqué llegan siempre olas a la costa, incluso cuando el viento está en calma: esas olas se originaron en lugares muy lejanos, y en un océano de las dimensiones del Atlántico siempre hay tormentas en alguna parte. Sin embargo el amortiguamiento viscoso es importante para las ondas capilares; en el agua, de acuerdo con la (9.53), para  $\lambda = 0.4$  cm resulta  $\gamma \approx 5.4 \text{s}^{-1}$ , por lo tanto la onda se amortigua en tan sólo 1/5 de segundo. Por este motivo las ondas capilares de longitud de onda muy corta son muy difíciles de observar. Las ondas capilares más largas, con  $\lambda \approx 1.6$  cm se amortiguan en unos 3 s.

### ***La relación de dispersión y la dispersión de trenes de ondas***

En todas las clases de ondas de superficie que hemos considerado encontramos que la frecuencia de oscilación depende de la longitud de onda. Esta es una propiedad general de los fenómenos ondulatorios, que se expresa matemáticamente por medio de la relación

$$\omega = \Omega(k) \quad (9.54)$$

donde la forma de la función  $\Omega$  depende de las características del fenómeno ondulatorio de que se trate<sup>3</sup>. Una relación del tipo (9.54) se denomina *relación de dispersión*, y es de fundamental

---

<sup>3</sup> La forma en que hemos escrito la (9.28) no es la más general posible ya que está limitada a propagación de ondas de pequeña amplitud y en una sola dimensión. Más en general,  $\omega$  es función del vector número de onda  $\mathbf{k}$  y también de la amplitud  $a$  de la perturbación y de otras propiedades de la misma como su polarización. Hay que tener presente, también, que en la relación de dispersión intervienen los parámetros del medio en que se propaga la onda (que no figuran explícitamente en la (9.28)), que determinan la respuesta del mismo a la perturbación del equilibrio,.

del fenómeno ondulatorio de que se trate, y analizar el comportamiento de trenes de ondas. Esto es lo que vamos a hacer ahora, comenzando por refinar las nociones de velocidad de fase y velocidad de grupo.

Para entender mejor estos conceptos es esencial tener presente que las soluciones elementales del tipo (9.17) o (9.28) que hemos considerado hasta ahora en este Capítulo, *no representan* las perturbaciones reales que se observan en la naturaleza y en los experimentos<sup>4</sup>. Son, ni más ni menos, un *artificio matemático* cuya utilidad consiste en que permiten describir las perturbaciones reales, gracias a la técnica de la integral de Fourier. Las perturbaciones reales (como las que observamos cuando arrojamos una piedra en un estanque) son siempre *trenes de ondas* de extensión espacial y temporal *finita*. Sin embargo, vamos a ver que a partir de las propiedades de propagación de las soluciones elementales, que están contenidas en la relación de dispersión, se puede describir el comportamiento de los trenes de onda.

El resultado fundamental que vamos a mostrar es el siguiente:

Después de transcurrido un intervalo de tiempo apreciable desde cuando ocurrió la perturbación que produjo un tren de ondas, y lejos del lugar donde se originó, el tren se puede describir mediante una expresión de la forma

$$\zeta(x,t) = a(x,t) \cos[k(x,t)x - \omega(x,t)t] \quad (9.55)$$

donde las funciones  $k(x,t)$  y  $\omega(x,t)$  están relacionadas entre sí por medio de la fórmula

$$\omega(x,t) = \Omega[k(x,t)] \quad (9.56)$$

en la cual  $\Omega$  es la *misma* función que en la (9.54).

La (9.55) describe una perturbación oscilante, que consiste de una sucesión de crestas y valles, cuya amplitud está modulada por el factor  $a(x,t)$ , que determina la región espacial y temporal donde está localizado el tren de ondas. En esa región, la longitud de onda (entendida como la distancia entre una cresta y la siguiente, o entre un valle y el siguiente para  $t$  fijo) está dada por

$$\lambda(x,t) = 2\pi / k(x,t) \quad (9.57)$$

y es diferente, en un instante dado  $t$ , en distintas posiciones  $x$ , y también, en una posición fija  $x$ , varía con  $t$  (ver las Figs. 9.5 y 9.6). Del mismo modo el período de la oscilación (entendido como el lapso entre un máximo del desplazamiento y el siguiente, en una posición fija  $x$ ) está dado por

$$T(x,t) = 2\pi / \omega(x,t) \quad (9.58)$$

y es diferente, en un instante dado  $t$ , en otras posiciones  $x$  y también, en la misma posición  $x$ , varía con  $t$ .

La expresión (9.55) es formalmente análoga a la solución elemental (9.28), pero con la diferencia fundamental que en la (9.55)  $a$ ,  $k$  y  $\omega$  no son constantes como en la (9.28), sino que son *funciones de la posición y del tiempo* que juegan el mismo rol que la amplitud, el número de onda y

---

<sup>4</sup> Estas soluciones elementales poseen varias características no físicas: existen para todo  $t$  y todo  $x$  entre  $-\infty$  y  $+\infty$ , y su energía es infinita. Es evidente por lo tanto que no representan perturbaciones reales.

la frecuencia angular de la solución elemental (9.28). Por lo tanto, la (9.55) representa un tren de ondas de *extensión finita y no uniforme*. Es también importante subrayar que (de acuerdo con la (9.56)) entre  $\omega(x,t)$  y  $k(x,t)$  vale la misma relación funcional (9.54) que se tiene para las soluciones elementales. Es decir, la relación de dispersión (9.54) vale *localmente* en el tren de ondas. Las (9.55) y (9.56) son los resultados fundamentales que nos interesa establecer y contienen la esencia del fenómeno de la dispersión. Aquí no vamos a entrar en detalles (que corresponden a un Curso sobre Ondas), pero vamos a presentar las ideas principales, sin mayor pretensión de rigor. Nuestro tratamiento es general (aunque limitado a propagación en una sola dimensión), de modo que los resultados se puedan aplicar no sólo a las ondas de superficie en líquidos, sino también a otras clases de ondas.

Para ello conviene utilizar notación compleja y escribir las soluciones elementales del tipo (9.28) en la forma

$$\zeta(x,t) = Ae^{i\kappa_x x - i\omega t} \quad (9.59)$$

donde se sobreentiende que para obtener las magnitudes físicas se debe tomar siempre la *parte real* de la correspondiente expresión matemática. En la (9.57)  $A$  es una *amplitud compleja* cuyo módulo es la amplitud  $a$  de la onda elemental (9.28) y cuya fase  $\alpha = \text{Arg}(a)$  es una constante que se suma al argumento del coseno que figura en la (9.28).

La *fase* de la onda elemental se define como  $\theta = \kappa_x x - \omega t + \alpha$ , y determina la posición en un ciclo desde una cresta, donde  $\text{Re}(\zeta)$  es máximo, hasta un valle, donde  $\text{Re}(\zeta)$  es mínimo, etc..

### Solución del problema de valores iniciales

Si la (9.59) es una solución elemental, entonces debido a la linealidad del problema, una superposición del tipo

$$\xi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa_x) e^{i\kappa_x x - i\omega t} d\kappa_x \quad (9.60)$$

donde  $F(\kappa_x)$  es una función arbitraria (con la limitación que la integral exista), es también una solución. La función  $F(\kappa_x)$  se puede elegir de modo de satisfacer las condiciones iniciales y de contorno del problema que nos interesa, siempre y cuando los datos sean suficientemente razonables como para permitir transformadas de Fourier.

Vamos a considerar problemas en que hay dos modos de la forma  $\omega = +\Omega(\kappa)$  y  $\omega = -\Omega(\kappa)$  con  $\kappa \equiv |\kappa_x|$  como ocurre con las relaciones de dispersión que se han visto hasta ahora. Entonces, para determinar la solución es necesario dar en  $t = 0$  dos<sup>5</sup> condiciones iniciales, por ejemplo

$$\xi(x,0) = \xi_0 \quad , \quad \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{t=0} = \xi'_0 \quad (9.61)$$

y la solución tiene la forma

---

<sup>5</sup> Si hubiera un solo modo, bastaría con una única condición inicial para determinar la solución. Si hubiera  $n$  modos, harían falta  $n$  condiciones.

$$\xi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_+(\kappa_x) e^{i\kappa_x x - i\Omega(\kappa)t} d\kappa_x + \int_{-\infty}^{\infty} F_-(\kappa_x) e^{i\kappa_x x + i\Omega(\kappa)t} d\kappa_x \quad (9.62)$$

donde el primer término del miembro derecho representa una superposición de ondas del modo +, y el segundo término es una superposición de ondas del modo -. Para determinar las funciones  $F_+$ ,  $F_-$  aplicamos las condiciones (9.61):

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} [F_+(\kappa_x) + F_-(\kappa_x)] e^{i\kappa_x x} d\kappa_x \\ \xi'_0 &= -i \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(\kappa) [F_+(\kappa_x) - F_-(\kappa_x)] e^{i\kappa_x x} d\kappa_x \end{aligned} \quad (9.63)$$

Ahora invertimos las (9.63) para obtener

$$\begin{aligned} F_+(\kappa_x) + F_-(\kappa_x) &= \Xi_0(\kappa_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_0 e^{-i\kappa_x x} dx \\ -i\Omega(\kappa) [F_+(\kappa_x) - F_-(\kappa_x)] &= \Xi'_0(\kappa_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi'_0 e^{-i\kappa_x x} dx \end{aligned} \quad (9.64)$$

y resolviendo este sistema de ecuaciones resulta

$$F_+(\kappa_x) = \frac{1}{2} \left[ \Xi_0(\kappa_x) + \frac{i\Xi'_0(\kappa_x)}{\Omega(\kappa)} \right], \quad F_-(\kappa_x) = \frac{1}{2} \left[ \Xi_0(\kappa_x) - \frac{i\Xi'_0(\kappa_x)}{\Omega(\kappa)} \right] \quad (9.65)$$

Puesto que  $\xi_0$  y  $\xi'_0$  son reales tendremos que  $\Xi_0(-\kappa_x) = \Xi_0^*(\kappa_x)$  y  $\Xi'_0(-\kappa_x) = \Xi'_0^*(\kappa_x)$  (con \* indicamos el conjugado complejo). Por lo tanto si  $\Omega(\kappa)$  es una función impar de  $\kappa_x$  resulta

$$F_+(-\kappa_x) = F_+^*(\kappa_x) \quad , \quad F_-(-\kappa_x) = F_-^*(\kappa_x) \quad (9.66)$$

y si  $\Omega(\kappa)$  es una función par de  $\kappa_x$  tenemos

$$F_+(-\kappa_x) = F_-^*(\kappa_x) \quad , \quad F_-(-\kappa_x) = F_+^*(\kappa_x) \quad (9.67)$$

de modo que en ambos casos la solución (9.62) es real, como debe ser pues condiciones iniciales reales deben conducir a soluciones reales puesto que las ecuaciones son reales.

### Comportamiento asintótico

Como acabamos de ver, las integrales de Fourier permiten obtener soluciones exactas del problema de valores iniciales (9.61), pero su significado no es fácil de interpretar. Las principales características de las ondas dispersivas se aprecian mejor si se considera el comportamiento *asintótico* de la superposición (9.62) para  $x, t$  grandes.

Consideremos primero el comportamiento asintótico de la integral típica

$$\xi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa_x) e^{i\kappa_x x - i\Omega(\kappa)t} d\kappa_x \quad (9.68)$$



para  $x$  y  $t$  grandes. El límite interesante es  $t \rightarrow \infty$  manteniendo  $x/t = v = \text{cte.}$ , pues una particular elección de la constante nos permite examinar las ondas que se propagan con la velocidad  $v$ . Con este propósito escribiremos la (9.68) en la forma

$$\xi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa_x) e^{-i v t} d\kappa_x \quad (9.69)$$

con

$$v(\kappa_x) = \Omega(\kappa) - \kappa_x \frac{x}{t} \quad (9.70)$$

Es importante tener presente que  $v = x/t$  se debe considerar un parámetro *fijo*, de modo que  $v$  depende sólo de  $\kappa_x$ . Podemos estudiar entonces la integral (9.69) con el método de la fase estacionaria<sup>6</sup>. La idea básica es que cuando  $t$  es grande, la principal contribución a la integral proviene del entorno de los puntos  $\kappa_x = k$  para los cuales la fase  $v$  del integrando permanece *estacionaria* al variar  $\kappa_x$ . En efecto, lejos de esos puntos, las contribuciones oscilan rápidamente al variar  $\kappa_x$  y su contribución neta es despreciable. La condición de fase estacionaria es:

$$v'(k) = \left. \frac{dv(\kappa_x)}{d\kappa_x} \right|_{\kappa_x=k} = \Omega'(k) - \frac{x}{t} = 0 \quad (9.71)$$

y dado el valor de  $v = x/t$  determina el correspondiente  $k$ .

Por consiguiente vamos a desarrollar en serie de Taylor  $F(\kappa_x)$  y  $v(\kappa_x)$  en el entorno del punto  $\kappa_x = k$  determinado por la (9.71). La contribución dominante proviene de los primeros términos de los desarrollos, de modo que (siempre y cuando  $v''(k) \neq 0$ ) escribiremos en forma aproximada

$$\begin{aligned} F(\kappa_x) &\cong F(k) \\ v(\kappa_x) &\cong v(k) + \frac{1}{2}(\kappa_x - k)^2 v''(k) \end{aligned} \quad (9.72)$$

y por lo tanto obtenemos

$$\xi(x, t) \cong F(k) e^{-i v(k) t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \frac{1}{2}(\kappa_x - k)^2 v''(k) t} d\kappa_x \quad (9.73)$$

La integral que queda en la (9.73) se puede calcular girando por un ángulo de  $(\pi/4)\text{Sign}[v''(k)]$  el camino de integración en el plano complejo  $\kappa_x$ , con lo cual se reduce a la integral real de error:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \frac{1}{2}(\kappa_x - k)^2 v''(k) t} d\kappa_x = e^{-i \frac{\pi}{4} \text{Sign}[v''(k)]} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} z^2 |v''(k) t|} dz = e^{-i \frac{\pi}{4} \text{Sign}[v''(k)]} \sqrt{\frac{2\pi}{|v''(k) t|}} \quad (9.74)$$

---

<sup>6</sup> El presente es precisamente el problema que motivó a Kelvin para desarrollar ese método. También se puede emplear el método de los descensos rápidos, que tiene la ventaja que permite apreciar mejor la bondad de las aproximaciones.

Resulta entonces, introduciendo (9.74) en (9.73):

$$\xi(x,t) \equiv F(k) \sqrt{\frac{2\pi}{|v''(k)|t}} e^{-iv(k)t - i\frac{\pi}{4}\text{Sign}[v''(k)]} \quad (9.75)$$

Si la relación de dispersión tiene más de una rama, puede haber más de un punto estacionario<sup>7</sup>  $\kappa_x = k$  que satisface la (9.71). En tal caso cada uno de ellos dará lugar a una contribución del tipo (9.75) y por lo tanto tendremos que

$$\xi(x,t) \equiv \sum_n F(k_n) \sqrt{\frac{2\pi}{|\Omega''(k_n)|t}} e^{ik_n x - i\Omega(k_n)t - i\frac{\pi}{4}\text{Sign}[\Omega''(k_n)]} \quad (9.76)$$

donde el subíndice  $n$  identifica la rama.

Cuando cada rama tiene dos modos  $\omega = +\Omega(\kappa)$  y  $\omega = -\Omega(\kappa)$  la solución del problema de valores iniciales tiene la forma (9.62). Consideraremos ahora el comportamiento asintótico de la (9.62) para  $x > 0$ . Vamos a suponer, además, que para cada rama  $C = \Omega'(\kappa)$  es monótona y positiva<sup>8</sup> para  $\kappa_x > 0$ .

Si  $\Omega(\kappa)$  es una función impar de  $\kappa_x$ , su derivada  $\Omega'(\kappa)$  es par y la condición (9.71) tiene dos raíces  $\pm k_n$  para cada rama. Las dos contribuciones, que provienen de la primera de las integrales en la (9.62), se pueden combinar pues por la (9.66) se cumple  $F_+(-k) = F_+^*(k)$ . Resulta:

$$\xi(x,t) \equiv 2 \text{Re} \left\{ \sum_n F(k_n) \sqrt{\frac{2\pi}{|\Omega''(k_n)|t}} e^{ik_n x - i\Omega(k_n)t - i\frac{\pi}{4}\text{Sign}[\Omega''(k_n)]} \right\}, \quad t \rightarrow \infty, \quad \frac{x}{t} > 0 \quad (9.77)$$

donde  $\text{Re}$  indica la parte real y las  $k_n(x,t)$  son la raíces positivas de la (9.71), definidas por

$$k_n(x,t) : \Omega'(k_n) = \frac{x}{t}, \quad k_n > 0, \quad \frac{x}{t} > 0 \quad (9.78)$$

Si en cambio  $\Omega(\kappa)$  es una función par de  $\kappa_x$ , su derivada  $\Omega'(\kappa)$  es impar y la condición (9.71) tiene para  $x > 0$  una sola raíz  $k_n$  para cada rama, que es positiva. Por lo tanto hay una sola contribución de la primera de las integrales en la (9.62). Pero en la segunda integral de la (9.62), los puntos de fase estacionaria satisfacen

$$\Omega'(\kappa) = -\frac{x}{t} \quad (9.79)$$

y entonces  $-k_n$  es solución de la (9.79) para  $x > 0$ . Por lo tanto, si  $k_n$  está definido por la (9.78), hay un punto estacionario  $\kappa_x = k_n$  en la primera integral de la (9.62) y un punto estacionario  $\kappa_x = -k_n$  en la segunda. Estas contribuciones se pueden nuevamente combinar puesto que por la (9.67) se cumple  $F_-(-k) = F_+^*(k)$ , y entonces también en este caso se obtiene la fórmula (9.77).

<sup>7</sup> Este es el caso de las ondas capilares de gravedad, donde en general hay dos puntos estacionarios: uno correspondiente a la rama de gravedad y el otro a la rama capilar.

<sup>8</sup> Este es el caso más frecuente, aunque existen casos de propagación en dos o tres dimensiones en que se presenta *dispersión negativa*, en los cuales el signo de alguna componente de la velocidad de grupo es opuesto al de la correspondiente componente de  $\kappa$ .

Antes de interpretar nuestros resultados conviene examinar brevemente la exactitud de la aproximación (9.77). Para estimarla es preciso calcular los términos siguientes de las series de Taylor para  $F(\kappa_x)$  y  $v(\kappa_x)$ . Para eso hay que continuar hasta el orden 2 en  $(\kappa_x - k)$  para  $F(\kappa_x)$  y hasta el orden 4 para  $v(\kappa_x)$ , debido a que la contribución a  $\xi$  de los términos de orden impar resulta idénticamente nula. No vamos a dar los detalles del cálculo pues es un tanto engorroso, pero vamos a dar el resultado. Cuando se tienen en cuenta esas correcciones, cada sumando de la (9.77) queda multiplicado por un factor de la forma

$$1 + \frac{i}{t |\Omega''|} \left( \frac{F''}{2F} - \frac{F'}{2F} \frac{\Omega'''}{\Omega''} + \frac{5}{24} \frac{\Omega''''^2}{\Omega''^2} - \frac{1}{8} \frac{\Omega^{iv}}{\Omega''} \right) = 1 + \frac{it^*}{t} \quad (9.80)$$

calculado en el correspondiente  $k_n$ . En general, la serie continúa con sucesivas potencias inversas de  $t$  con coeficientes que son funciones de  $k_n$ .

Ahora podemos precisar el significado de “ $t$  grande”. El factor de  $t^{-1}$  en la (9.80) es un tiempo característico  $t^*$  determinado por las escalas de tiempo que provienen de la relación de dispersión (los cocientes de las derivadas de  $\Omega$ ) y las escalas de tiempo que provienen de la condición inicial (los cocientes de las derivadas de  $F$ ). La condición es que  $t \gg t^*$ , de modo que el término correctivo de la (9.80) sea pequeño respecto de la unidad. En la práctica esto implica que el tren de ondas tiene que haber recorrido una distancia grande en comparación con las longitudes de onda de las ondas que lo componen y con la extensión espacial de la perturbación inicial<sup>9</sup>.

#### La velocidad de grupo y la propagación del número de onda

Vamos ahora a interpretar el significado de la expresión asintótica (9.77)-(9.78). Para mayor claridad, consideraremos la contribución al tren de ondas de una sola rama de la relación de dispersión. Por lo tanto omitiremos la suma de la (9.77) y el subíndice  $n$ .

En cada punto  $(x, t)$ , la (9.78) determina un “número de onda”  $k(x, t)$  y la relación de dispersión  $\omega = \Omega(k)$  determina una “frecuencia”  $\omega(x, t)$ . Podemos entonces definir una “fase”

$$\theta(x, t) \equiv kx - \Omega(k)t = xk(x, t) - t\omega(x, t) \quad (9.81)$$

y escribir la (9.77) en la forma

$$\xi = \text{Re}\{A(x, t)e^{i\theta(x, t)}\} \quad (9.82)$$

donde la amplitud compleja  $A(x, t)$  está dada por

$$A(x, t) = 2F_1(k) \sqrt{\frac{2\pi}{|\Omega''(k)|}} \frac{1}{t} e^{-i\frac{\pi}{4}\text{Sign}[\Omega''(k)]} \quad (9.83)$$

Como habíamos anticipado, la expresión (9.82) tiene la forma (9.55), y se asemeja a una solución elemental como la (9.28), pero  $A$ ,  $k$  y  $\omega$  no son constantes. Sin embargo, del mismo modo que la (9.28), la (9.82) también representa un tren de ondas oscilantes, con una fase  $\theta$  que describe las variaciones entre los máximos y los mínimos locales.

<sup>9</sup> En el caso del tren de ondas producido por una piedra que cae en el agua, el tren debe haber recorrido una distancia grande en comparación con la dimensión lineal de la piedra.

Resulta natural *generalizar* los conceptos de número de onda y de frecuencia para este caso no uniforme, definiéndolos como  $\partial\theta/\partial x$  y  $-\partial\theta/\partial t$ , respectivamente<sup>10</sup>. Esto es posible porque en el presente caso, a partir de la definición (9.81) tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta}{\partial x} &= k + [x - \Omega'(k)t] \frac{\partial k}{\partial x} = k(x, t) \\ \frac{\partial\theta}{\partial t} &= -\Omega(k) + [x - \Omega'(k)t] \frac{\partial k}{\partial t} = -\Omega(k) = \omega(x, t)\end{aligned}\tag{9.84}$$

pues la condición de fase estacionaria  $x/t = \Omega'(k)$  elimina los términos con  $\partial k/\partial x$  y  $\partial k/\partial t$  en las (9.84). Por lo tanto la magnitud  $k$ , que introdujimos como el valor particular del número de onda para el cual la fase es estacionaria en la integrales de Fourier que representan la solución, *coincide* con nuestra definición del *número de onda local* en el tren de ondas no uniforme que describe el comportamiento asintótico de la solución. Lo mismo ocurre para la correspondiente frecuencia. Además, *el número de onda local y la frecuencia local del tren de ondas no uniforme satisfacen la misma relación de dispersión que relaciona la frecuencia y el número de onda de las soluciones elementales* (9.28) o (9.59).

Debe quedar claro al lector que estas generalizaciones del número de onda y la frecuencia locales son útiles porque la no uniformidad del tren no es *demasiado* grande. Es cierto que podemos siempre seguir el procedimiento anterior e introducir una función de fase  $\theta$  y definir  $\theta_x$  como el número de onda (local), pero si la variación de  $\theta_x$  en una única oscilación fuese muy grande se perdería nuestra interpretación intuitiva. Pero en el presente caso  $k(x, t)$  es, *en efecto*, una función que varía lentamente. Esto se ve de la (9.78), pues de  $\Omega'[k(x, t)] = x/t$  y derivando respecto de  $x$  obtenemos  $\Omega''[k(x, t)]k_x = 1/t$ , luego

$$\frac{k_x}{k} = \frac{1}{k} \frac{1}{t\Omega''} = \frac{1}{x} \frac{\Omega'}{k\Omega''}\tag{9.85}$$

Análogamente, derivando respecto del tiempo se obtiene

$$\frac{k_t}{k} = \frac{1}{t} \frac{1}{k\Omega''}\tag{9.86}$$

En consecuencia, puesto que tanto  $x$  como  $t$  son grandes, las variaciones relativas de  $k$  con la posición y el tiempo resultan pequeñas. Por lo tanto  $k$  es una función *lentamente variable* de la posición y del tiempo, y lo mismo es cierto para  $\omega$ . Además, a partir de la (9.83) se puede ver que también  $A(x, t)$  es una función que varía lentamente con  $x$  y  $t$ .

Volvamos ahora a la (9.78), a partir de la cual se obtienen  $k$  y  $\omega$  como funciones de  $(x, t)$ , y a la (9.83) que determina  $A$ . Para interpretar el significado de la (9.78) nos podemos plantear la pregunta: ¿en qué lugar del espacio vamos a encontrar un cierto valor de  $k$ , digamos  $k = k_0$ ? La respuesta es, claramente: en el punto determinado por la ecuación

$$x = \Omega'(k_0)t\tag{9.87}$$

---

<sup>10</sup> Sería ciertamente engorroso (y no bien definido) contar el número de máximos por unidad de longitud, mientras que la derivada parcial  $\theta_x$  es inmediata y corresponde a la idea intuitiva de número de onda local. Lo mismo es cierto para la frecuencia local.

Es decir, un observador que se mueve con la velocidad  $\Omega'(k_0)$  ve siempre ondas con el número de onda  $k_0$  y frecuencia  $\omega_0 = \Omega(k_0)$ . La velocidad

$$C(x,t) = \Omega'(k) = \frac{d\omega}{dk} \quad (9.88)$$

es la *velocidad de grupo*, que es la velocidad importante para un “grupo” de ondas con una cierta distribución del número de onda. Nuestra interpretación de la (9.78) muestra que:

Los diferentes números de onda se propagan con la velocidad de grupo. Cualquier particular número de onda  $k_0$  se encuentra en el instante  $t$  en la posición  $x = \Omega'(k_0)t$ .

Por otra parte, cualquier valor particular  $\theta_0$  de la fase se propaga de acuerdo con la ecuación

$$\theta(x,t) = xk(x,t) - t\omega(x,t) = \theta_0 \quad (9.89)$$

Entonces la ecuación de movimiento de la fase es

$$\frac{dx}{dt}\theta_x + \theta_t = 0 \quad (9.90)$$

es decir

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\theta_t}{\theta_x} = \frac{\omega(x,t)}{k(x,t)} = c(x,t) \quad (9.91)$$

Por lo tanto, la *velocidad de fase* sigue siendo igual al cociente  $\omega/k$  igual que en el caso de las ondas elementales, aunque ahora se trata de la frecuencia y número de onda *locales*. La velocidad de fase es diferente de la velocidad de grupo. De resultas de ello un observador que se mueve siguiendo una particular cresta, se desplaza con la velocidad de fase local correspondiente a dicha cresta, por lo tanto ese observador notará que a medida que se desplaza varían el número de onda local y la frecuencia local: su cresta se irá distanciando de la que la precede (si la dispersión es *normal*), o acercando (si la dispersión es *anómala*). Por otra parte, un observador que se mueve con la velocidad de grupo (local) ve siempre el mismo número de onda local y la misma frecuencia local, pero las crestas se le irán adelantando (si la dispersión es *normal*), o se irán quedando atrás (si la dispersión es *anómala*). Veamos esto con un par de ejemplos.

### Dispersión de las ondas de gravedad puras en aguas profundas

Como ya sabemos, la relación de dispersión es  $\Omega = (gk)^{1/2}$ , luego la (9.78) nos da

$$\Omega'(k) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{x}{t} \quad \text{o sea} \quad k = \frac{gt^2}{4x^2} \quad (9.92)$$

y entonces

$$\omega = \sqrt{gk} = \frac{gt}{2x} \quad (9.93)$$

de donde resulta

$$\theta = kx - \omega t = -\frac{gt^2}{4x} \quad (9.94)$$

Por lo tanto, la trayectoria que sigue un determinado número de onda  $k$ , que como sabemos se desplaza con la velocidad de grupo es, de acuerdo con la segunda de las (9.92):

$$x = \sqrt{\frac{g}{4k}} t \quad (9.95)$$

y la trayectoria que sigue un determinado valor  $\theta$  de la fase, que se desplaza con la velocidad de fase es, de acuerdo con la (9.94):

$$x = \frac{gt^2}{4(-\theta)} \quad (9.96)$$

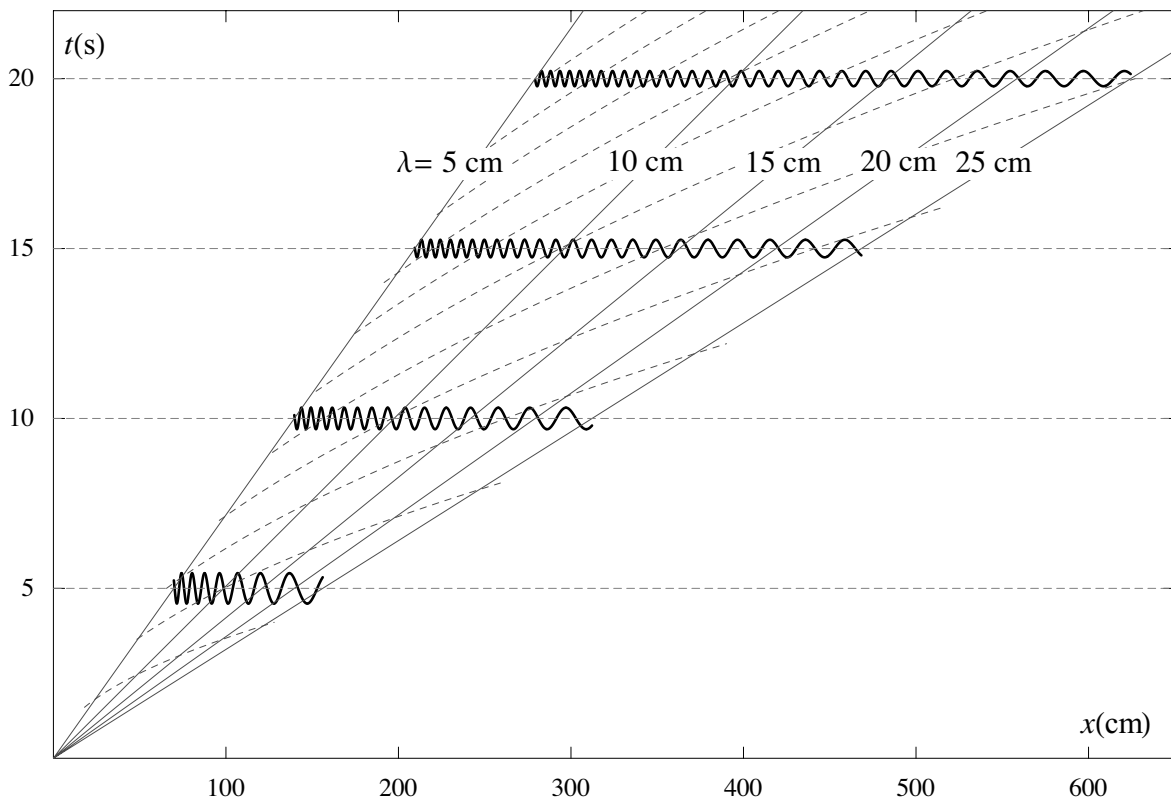


Fig. 9.5. Dispersión de un tren de ondas de gravedad puras en el agua. La perturbación se originó en  $t = 0$  en una pequeña región cerca de  $x = 0$ . La figura representa el aspecto del tren de ondas (calculado mediante las (9.92)-(9.96)) en cuatro instantes sucesivos. El tren es una superposición de ondas elementales con longitudes de onda entre 5 y 25 cm, y hemos supuesto que todas tienen la misma amplitud. Las líneas rectas grises representan las líneas de grupo, y en cada instante indican la posición donde se encuentra una dada longitud de onda; su pendiente es la correspondiente velocidad de grupo. Las líneas de trazo representan las líneas de fase constante, y muestran las trayectorias de las crestas y los valles del tren. Hemos dibujado una línea de fase cada 5 crestas. Las crestas y valles se adelantan al grupo porque la velocidad de fase es el doble de la velocidad de grupo.

En la Fig. 9.5 hemos representado las líneas horarias dadas por la (9.95) y (9.96) para mostrar como se produce la dispersión de un grupo de ondas.

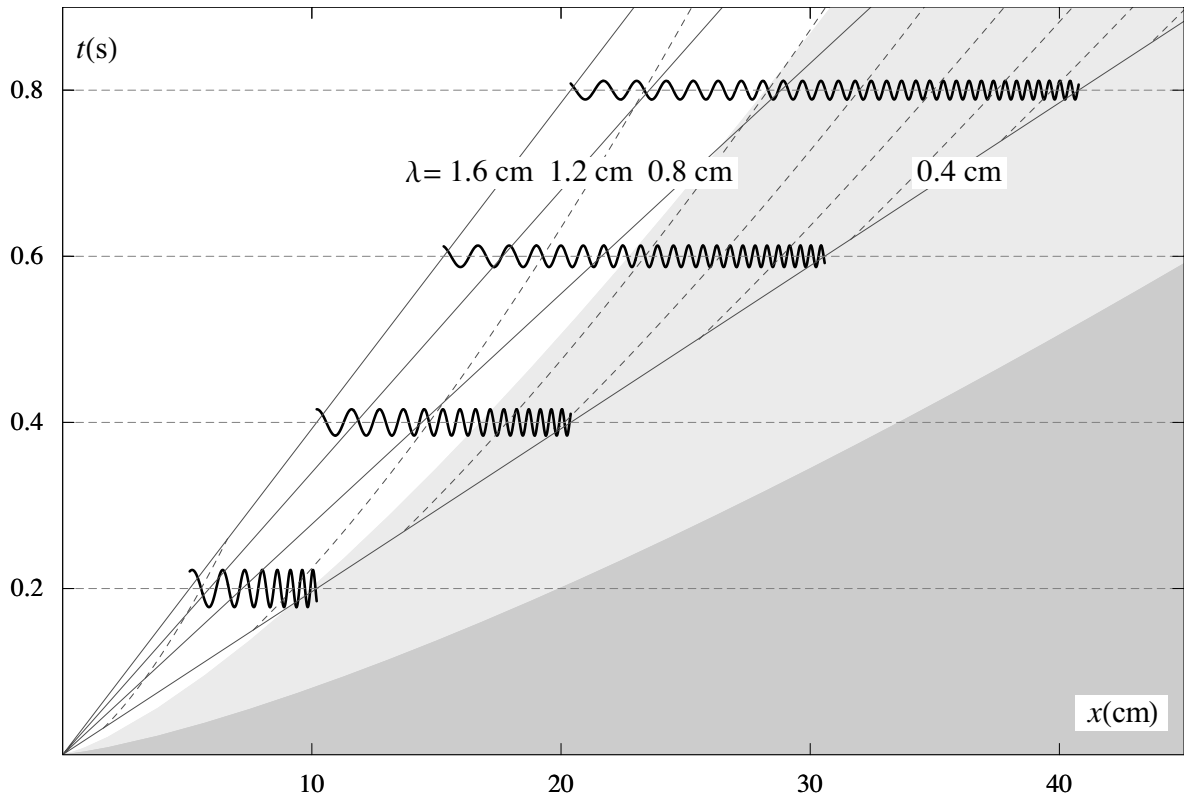


Fig. 9.6. Dispersión de un tren de ondas capilares puras en el agua. La perturbación se originó en  $t = 0$  en el entorno de  $x = 0$ . La figura representa el aspecto del tren de ondas (calculado mediante las (9.97)-(9.101)) en cuatro instantes sucesivos. Notar que las escalas son diferentes de las de la Fig. 9.5. El tren es una superposición de todas las longitudes de onda entre 0.4 y 1.6 cm, con igual amplitud. Las rectas grises representan las líneas de grupo y las líneas de trazo representan las líneas de fase constante. Hemos dibujado una línea de fase cada 5 crestas. Se puede apreciar que las crestas y valles se retrasan respecto del grupo, porque la velocidad de fase es menor que la velocidad de grupo. En las zonas con fondo gris las ondas están amortiguadas por efecto de la viscosidad. Se observa que a partir de 0.3 s las ondas cortas, que van a la cabeza del grupo, están fuertemente amortiguadas, motivo por el cual en la práctica no se observan.

### Dispersión de las ondas capilares puras en aguas profundas

Ahora la relación de dispersión es  $\Omega = (\gamma k^3 / \rho)^{1/2}$ , luego la (9.78) nos da

$$\Omega'(k) = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\gamma k}{\rho}} = \frac{x}{t} \quad \text{o sea} \quad k = \frac{4\rho x^2}{9\gamma t^2} \quad (9.97)$$

y entonces

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma k^3}{\rho}} = \frac{8}{27} \frac{\rho x^3}{\gamma t^3} \quad (9.98)$$

de donde resulta

$$\theta = kx - \omega t = \frac{4\rho x^3}{27\gamma t^2} \quad (9.99)$$

Por lo tanto, la trayectoria que sigue un determinado número de onda  $k$ , que como sabemos se desplaza con la velocidad de grupo es, de acuerdo con la segunda de las (9.97):

$$x = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\gamma k}{\rho}} t \quad (9.100)$$

y la trayectoria que sigue un determinado valor  $\theta$  de la fase, que se desplaza con la velocidad de fase es, de acuerdo con la (9.99):

$$x = 3 \left( \frac{\gamma \theta}{4\rho} \right)^{1/3} t^{2/3} \quad (9.101)$$

En la Fig. 9.6 se han representado las líneas horarias dadas por la (9.100) y (9.101) para mostrar como se produce la dispersión de un grupo de ondas.

#### La velocidad de grupo y la propagación de la amplitud

Un segundo papel importante de la velocidad de grupo se pone en evidencia si estudiamos la amplitud  $A(x,t)$  del tren de ondas. La forma de la (9.83) sugiere que la magnitud interesante es el cuadrado del módulo de  $A$ , que se relaciona con la energía de las ondas.

Consideremos entonces la integral de  $|A|^2$  entre dos puntos  $x_2 > x_1 \gg 0$ . Será

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} AA^* = 8\pi \int_{x_1}^{x_2} \frac{F_1(k)F_1^*(k)}{|\Omega''(k)|t} dx \quad (9.102)$$

El lector debe notar que en esta integral  $k$  está dado por la (9.78) y por lo tanto es una función de  $x$ . Puesto que  $k$ , y no  $x$ , es quien aparece como argumento de las funciones del integrando, es lógico cambiar la variable de integración, poniendo

$$x = \Omega'(k)t \quad , \quad dx = \Omega''(k)t dk \quad (9.103)$$

Por lo tanto, si  $\Omega''(k) > 0$  resulta<sup>11</sup>

$$Q = 8\pi \int_{k_1}^{k_2} F_1(k)F_1^*(k)dk \quad (9.104)$$

donde  $k_1$  y  $k_2$  se obtienen invirtiendo las ecuaciones

$$x_1 = \Omega'(k_1)t \quad , \quad x_2 = \Omega'(k_2)t \quad (9.105)$$

---

<sup>11</sup> En el caso opuesto se obtiene el mismo resultado, pero con los límites de integración invertidos.



Ahora bien, si mantenemos  $k_1$  y  $k_2$  fijos y variamos  $t$ ,  $Q(t)$  permanece constante. De acuerdo con las (9.105) en este caso los puntos  $x_1$  y  $x_2$  se mueven con la velocidad de grupo describiendo lo que podemos llamar *líneas de grupo*. Por lo tanto hemos demostrado que la cantidad de  $|A|^2$  contenida entre cualquier par de líneas de grupo permanece constante. En este sentido, podemos decir que  $|A|^2$  se propaga con la velocidad de grupo. Puesto que las líneas de grupo divergen con una separación proporcional a  $t$ , es natural que  $|A|$  disminuya con  $t^{-1/2}$ .

En el caso especial de un paquete de ondas para el cual la perturbación inicial está localizada en el espacio, y que contiene amplitud apreciable solamente para números de onda en el entorno de un cierto valor particular  $k^*$  (paquete cuasi monocromático), el tren de ondas está limitado en el espacio a la vecindad de la particular línea de grupo  $k^*$ , y el paquete se mueve como un todo con la particular velocidad de grupo  $\Omega'(k^*)$ . Las discusiones de la velocidad de grupo que se encuentran en los textos elementales se suelen limitar a este caso. Sin embargo, el lector notará que nuestros argumentos son más generales, y permiten tratar distribuciones espectrales generales sin limitaciones sobre el rango de números de onda, lo que permite poner en evidencia plenamente los efectos de la dispersión.

Los argumentos que hemos desarrollado en este Capítulo se pueden extender fácilmente al caso de propagación en más de una dimensión. Pero, lo que es más importante, se pueden también extender al caso de propagación en medios no uniformes (por ejemplo ondas de gravedad en aguas de profundidad variable) y no isótropos. Con oportunos replanteos, se pueden generalizar al caso de propagación no lineal de ondas, situación en la que no se puede emplear el análisis de Fourier. El lector interesado puede encontrar una excelente presentación de estos tópicos en el libro *Linear and Nonlinear Waves* de G. B. Whitham, que hemos citado en el Prólogo de estas notas.

Los resultados que hemos obtenido nos permiten interpretar los curiosos patrones de ondas que un observador perspicaz habrá seguramente notado alguna vez al contemplar la superficie de un espejo de agua, y que son consecuencia de la dispersión. Es interesante comentar algunos de ellos, cosa que haremos en las próximas Secciones.

### ***Patrones de ondas de superficie producidos por una fuente puntiforme instantánea***

Este es el caso de las ondas producidas cuando se arroja una piedra en un estanque, o cuando las gotas de lluvia caen sobre un espejo de aguas tranquilas<sup>12</sup>. Se trata en ambos casos de problemas de propagación en una dimensión (la dimensión radial), pero a diferencia de los casos que hemos tratado hasta ahora tienen simetría axial en lugar de cartesiana.

Cerca del comienzo del fenómeno la perturbación es muy complicada, pero al cabo de cierto tiempo, cuando la perturbación se ha propagado hasta distancias grandes en comparación con el tamaño de la porción de superficie afectada inicialmente y las ondas se han dispersado significa-

---

<sup>12</sup> Estos son los ejemplos clásicos que se citan en los textos elementales cuando se introduce el concepto de onda. Sin embargo los autores se guardan muy bien de explicar a sus lectores esos fenómenos tan familiares. Como estamos viendo ahora, la explicación dista de ser sencilla y está llena de sutilezas. Por eso los mencionan, pero después se olvidan de ellos, lo cual deja en el estudiante una justificada sensación de frustración. A juicio de quien escribe estas notas, sería deseable evitar aquellos ejemplos, si es que no se tiene la intención de presentar la correspondiente explicación, ni siquiera en la forma más elemental.

tivamente, se alcanza el régimen asintótico que hemos estudiado antes y se observa un tren de ondas no uniforme. Consideraremos solo el caso de propagación en aguas profundas<sup>13</sup>. Puesto que tenemos que considerar las ondas de gravedad capilares, la relación de dispersión apropiada es la (9.33):

$$\omega = \pm \sqrt{gk + \frac{\gamma k^3}{\rho}} = \pm \sqrt{gk} \sqrt{1 + (k/k_0)^2} \quad (9.106)$$

donde (ec. (9.35))  $k_0 = \sqrt{\rho g / \gamma} = 2\pi / \lambda_{0g} \cong 3.65 \text{ cm}^{-1}$  para agua a 15 °C.

A partir de (9.106) obtenemos las velocidades de fase y de grupo que hemos representado en la Fig. 9.3:

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}} \sqrt{1 + (k/k_0)^2} \quad , \quad C = \frac{1}{2} c \frac{1 + 3(k/k_0)^2}{1 + (k/k_0)^2} \quad (9.107)$$

En cualquier instante  $t$ , un particular valor de  $k$  se encuentra en una circunferencia de radio  $r = C(k)t$  y con centro en el punto donde se originó la perturbación en  $t = 0$ . Por lo tanto  $k(r, t)$  es la solución de

$$C(k) = \frac{r}{t} \quad (9.108)$$

Si observamos la Fig. 9.3 vemos que la velocidad de grupo tiene un valor mínimo  $C_0$  que ocurre para  $\lambda = \lambda_{0g} \cong 2\pi / k_{0g}$ ; para agua a 15 °C,  $\lambda_{0g} \cong 4.375 \text{ cm}$  y  $C_0 \cong 17.8 \text{ cm/s}$ .

Por consiguiente, si  $r/t > C_0$ , hay *dos* raíces reales  $k_g$  y  $k_s$  de la (9.108), una de las cuales está sobre la rama de gravedad y la otra sobre la rama capilar. Si en cambio  $r/t < C_0$  la (9.108) no tiene ninguna raíz real. Por lo tanto, dentro del círculo de radio  $r = C_0 t$  la superficie del agua está *en reposo*, mientras que fuera de ese círculo hay una superposición de dos perturbaciones, cada una de las cuales es un tren de ondas de la forma (9.55) (o, lo que es lo mismo, (9.82)). La forma exacta de la fase de cada uno de esos trenes no se puede dar mediante fórmulas sencillas por las razones que vamos a comentar ahora.

En primer lugar, la condición (9.108) lleva a un polinomio de grado 4 en  $k$ , y no hay expresiones simples de las raíces  $k_g$  y  $k_s$ . Por lo tanto no podemos obtener expresiones analíticas como las que obtuvimos antes para las ondas de gravedad puras y las ondas capilares puras. Sin embargo, se pueden aplicar las fórmulas aproximadas (9.92)-(9.96) y (9.97)-(9.101) para la rama de gravedad y la rama capilar, respectivamente, siempre y cuando no estemos demasiado cerca del círculo  $r = C_0 t$ . Por consiguiente las Figs. 9.5 y 9.6 dan una buena idea de la ubicación de las crestas y valles de esos trenes de onda, excepto cerca de  $r = C_0 t$  donde las fórmulas aproximadas no son válidas. Se debe tener presente, además, que al expandirse las ondas en círculos de radios crecientes, sufren una atenuación *geométrica* proporcional a  $r^{-1/2}$  (debido a que el flujo de energía de las mismas se distribuye sobre el perímetro  $2\pi r$  del frente de onda), además de la atenuación proveniente de la dispersión (que ya discutimos antes y trae el factor  $t^{-1/2}$  a la amplitud en la (9.83)).

<sup>13</sup> Esta aproximación es válida si el tamaño de la piedra, o de la gota de lluvia, es pequeño en comparación con la profundidad del espejo de agua.

En segundo lugar, el lector debe notar que la distribución de energía en el espectro de números de onda (esto es, la función  $F_1(k)$  en la (9.83)) está determinada por la perturbación inicial. Las ondas cuya longitud de onda es del mismo orden de magnitud que las dimensiones lineales del objeto que provocó la perturbación son las que tienen la mayor amplitud, y por consiguiente son las más vistosas en el patrón de ondas. Más específicamente, si el objeto tiene una dimensión lineal  $l$ , la longitud de onda dominante es  $\lambda \approx l/2$  y las circunferencias correspondientes a las crestas y valles principales están ubicadas alrededor de  $r = C(\pi/l)t$ . Por este motivo el patrón de ondas producido por las gotas de lluvia (cuyo tamaño es del orden del mm) está dominado por las ondas capilares, y por lo tanto tiene un comportamiento semejante al que se muestra en la Fig. 9.6, mientras que el que se obtiene por la caída de una piedra de regular tamaño está dominado por las ondas de gravedad y tiene un aspecto parecido al que se ve en la Fig. 9.5.

Por último debemos recordar que las ondas capilares de longitud de onda muy corta se atenúan muy rápidamente por efecto de la viscosidad. Por lo tanto estas ondas sólo se pueden observar en el patrón producido por la caída de un objeto muy pequeño, pues de otra forma ya habrán desaparecido para cuando se alcance el régimen asintótico.

### ***Patrones de ondas en corrientes estacionarias***

La dispersión de las ondas de superficie da lugar a complicados e interesantes patrones de ondas que todos hemos tenido ocasión de observar en ríos y arroyos cuando algún obstáculo se interpone al paso de la corriente (ramas de árboles caídos, la tanza de una línea de pescar, piedras en el fondo de un arroyo de escasa profundidad, etc.). Patrones análogos ocurren cuando un objeto se desplaza en la superficie de un espejo de agua tranquila como un lago o un estanque, y se pueden estudiar del mismo modo pues desde el referencial del objeto todo ocurre como si éste estuviera inmóvil en una corriente de agua. Particularmente vistosas son las estelas que dejan tras de sí las embarcaciones ya que, debido a que las ondas de gravedad tienen un amortiguamiento muy pequeño, se extienden a distancias muy grandes, y cuando el espejo de agua está en calma se pueden ver perfectamente aún muy lejos de la embarcación.

En todos estos casos (a diferencia del problema de la caída de una piedra o de una gota de lluvia) el obstáculo (o el objeto en movimiento) emite *continuamente* ondas de todas las longitudes de ondas. Si nos situamos *en el referencial del objeto*, a una distancia determinada del mismo el patrón de ondas que se puede observar consiste únicamente de aquellas ondas cuya fase es *independiente* del tiempo, ya que las demás ondas no cumplen la condición de fase estacionaria y por lo tanto sus contribuciones oscilan rápidamente y dan un resultado neto despreciable. Por este motivo los patrones están formados por *ondas estacionarias*, cuya frecuencia en el referencial del objeto es *nula*.

### **Patrones unidimensionales**

Para empezar vamos a considerar el patrón de ondas producidas por un obstáculo en una corriente estacionaria con velocidad  $u$  en la dirección  $x$ . Vamos a suponer que la extensión del obstáculo es muy grande en la dirección  $y$ , transversal a la corriente. Por lo tanto el patrón es unidimensional, al menos mientras consideremos lo que pasa a distancias pequeñas en relación con la dimensión transversal del obstáculo. Desde el referencial de la corriente, estas ondas se ven como las ondas producidas por un obstáculo móvil con velocidad  $-u$  en la misma dirección. Claramente, las únicas ondas que pueden ir a la misma velocidad que el obstáculo y entonces aparecer como estacionarias en el referencial del obstáculo, deben satisfacer

$$u_f(k) = -u \tag{9.109}$$

La velocidad de fase de las ondas de gravedad capilares tiene un mínimo  $c_0$  (ec. (9.41)), luego si

$$|u| < c_0 = \left( \frac{4\gamma g}{\rho} \right)^{1/4} = 23.2 \text{ cm/s para agua a } 15 \text{ C} \tag{9.110}$$

la ecuación (9.109) no tiene soluciones, y por lo tanto no hay ondas estacionarias. En este caso hay solamente perturbaciones localizadas cerca del obstáculo, que no contribuyen al patrón de onda asintótico. En cambio, si

$$|u| > c_0 \tag{9.111}$$

hay *dos* longitudes de onda (o números de onda) que satisfacen la (9.109): una de ellas,  $\lambda_g$ , perteneciente a la rama de gravedad ( $\lambda_g > \lambda_{0g}$ ) y la otra,  $\lambda_c$ , perteneciente a la rama capilar ( $\lambda_c < \lambda_{0g}$ , ver la Fig. 9.3).

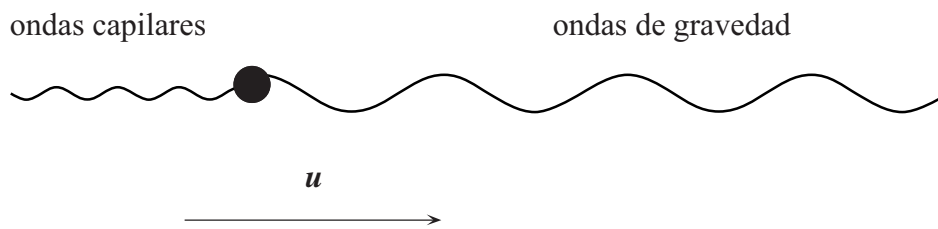


Fig. 9.7. Patrón de ondas unidimensional producido por un obstáculo cuya extensión en sentido transversal a la corriente es grande. El esquema es cualitativo y muestra que las ondas de la rama capilar se observan corriente arriba del obstáculo, mientras que las de la rama de gravedad se localizan corriente abajo.

Ahora bien,

$$C(\lambda_g) < c(\lambda_g) = |u_0| \quad \text{y} \quad C(\lambda_c) > c(\lambda_c) = |u_0| \tag{9.112}$$

y por lo tanto las ondas de gravedad de longitud  $\lambda_g$ , que tienen una velocidad de grupo menor que  $|u_0|$  aparecen *detrás* del obstáculo, mientras que las ondas capilares  $\lambda_c$ , que tienen velocidad de grupo mayor que  $|u_0|$  están *delante* del obstáculo (ver Fig. 9.7).

### La estela de un barco

Si el obstáculo tiene una extensión finita en la dirección  $y$ , se produce un patrón de ondas *bidimensional* sobre la superficie del agua y el análisis es más complicado. Se pueden presentar varios casos de interés, pero ahora estudiaremos sólo el problema del patrón de ondas producido por un objeto que se mueve en aguas de profundidad  $h \gg L$  ( $L$  es la longitud del objeto<sup>14</sup>), con

<sup>14</sup> Un barco que navega en el Río de la Plata no cumple la última condición, debido a la escasa profundidad del estuario.

una velocidad del orden de algunos m/s como ocurre típicamente en el caso de embarcaciones. En este caso la perturbación producida por el movimiento de la embarcación está contenida dentro de una porción de la superficie que se denomina *estela*, y consiste de ondas de gravedad<sup>15</sup> en aguas muy profundas; por lo tanto corresponde usar la relación de dispersión (9.18).

Antes de analizar el patrón de ondas dentro de la estela, vamos a deducir un resultado notable (obtenido por Lord Kelvin), de acuerdo al cual, independientemente de la velocidad del barco (siempre que sea constante) y de la forma de su casco, la estela que deja tras de sí abarca *siempre* un sector angular de abertura  $\alpha$  dada por

$$\alpha = 2\theta \quad , \quad \theta = \arcsen(1/3) \cong 19.5 \tag{9.113}$$

Este resultado se basa sólo en el hecho que en aguas profundas se cumple que  $C = c/2$ .

Para demostrar la (9.113) es suficiente considerar la sencilla construcción geométrica que se representa en la Fig. 9.8.

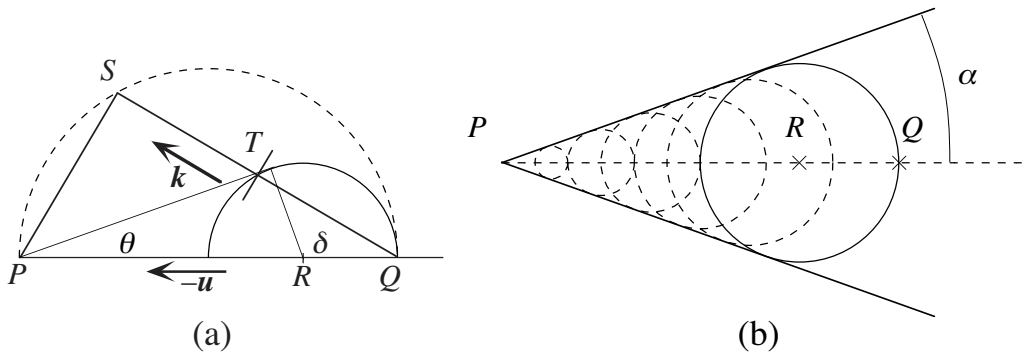


Fig. 9.8. Formación de la estela de un barco. (a) Construcción geométrica para determinar la posición de las ondas estacionarias cuyo vector de onda forma un ángulo  $\delta$  con respecto de la dirección del movimiento del barco. (b) Envolvente de la perturbación producida por el barco cuando pasó por diferentes posiciones al desplazarse desde  $Q$  hasta  $P$ .

Supongamos que el barco, cuya velocidad es  $-u$ , se ha movido de  $Q$  a  $P$  en el intervalo de tiempo  $t$ . Dentro del patrón de ondas hay, en principio, ondas con todos los valores posibles del vector de onda  $k$ , con diferente módulo y dirección. Consideremos las ondas cuyo vector de onda forma un ángulo  $\delta$  con la dirección de  $-u$ . Para que una determinada cresta de estas ondas (la cual, claramente, es perpendicular a  $k$ ) se mantenga en una posición estacionaria relativa al barco, se debe cumplir que

$$u \cos \delta = c(k) \tag{9.114}$$

Esta condición se ve más fácilmente desde el referencial del barco, en el cual la corriente con velocidad  $u$  fluye a los costados de un barco quieto; la velocidad de la corriente tiene una componente  $-u \cos \delta$  en la dirección de  $k$ , y la cresta de la onda se mueve (respecto del fluido) en la dirección de  $k$  con la velocidad de fase  $c(k)$ . Por lo tanto la veremos en reposo desde el referencial del barco si  $c(k) - u \cos \delta = 0$ . Ahora bien, para todos los puntos  $S$  de la semicircunferencia dibujada con línea de trazos en la Fig. 9.8a, se cumple que

<sup>15</sup> Las ondas capilares que tienen velocidad de fase de ese orden de magnitud se amortiguan muy rápidamente, de modo que el patrón de ondas capilares estacionarias es de todo punto de vista insignificante.

$$PQ \cos \delta = SQ \quad \text{luego} \quad ut \cos \delta = c(k)t \quad (9.115)$$

Por lo tanto los frentes de onda paralelos a  $PS$  se verán en reposo desde el barco si tienen una velocidad de fase que cumple la condición  $c(k)t = QS$ . Por consiguiente, la condición (9.114) determina para cada  $\delta$  el correspondiente valor  $k$  de las ondas estacionarias que ve un observador a bordo del barco.

Ahora bien, el lugar donde se verán esas ondas está determinado por la correspondiente velocidad grupo, que vale  $C(k) = c(k)/2$ . Por lo tanto el grupo de ondas que se produjeron cuando el barco pasó por  $Q$  habrá recorrido la distancia  $Ct = ct/2$ , de modo que cuando el barco está en  $P$  el grupo se encuentra en  $T$ , el punto medio de  $QS$ . Si consideramos ahora todas las posibles orientaciones de  $\mathbf{k}$  (es decir, si variamos  $\delta$ ), está claro que todas las ondas producidas en  $Q$  que pueden contribuir a un patrón estacionario se encuentran sobre una circunferencia de radio  $ut/4$  con centro en el punto  $R$ , situado a una distancia  $PR = (3/4)ut$  de  $P$ .

Finalmente, si consideramos las ondas producidas por el barco cuando pasó por todas las posiciones intermedias  $Q', Q'', Q''' \dots$  entre  $Q$  y  $P$ , y repetimos el razonamiento anterior para cada una de ellas obtendremos como resultado el patrón de circunferencias de la Fig. 9.8b. Por la construcción de la Fig. 9.8a, cada una de esas circunferencias tiene un radio igual a un tercio de la distancia de su centro a  $P$ . Por lo tanto las circunferencias llenan un sector angular cuya abertura  $\alpha$  está dada precisamente por la (9.113).

Se puede observar que la construcción de la Fig. 9.8b es la misma que permite determinar la abertura del cono de Mach en un flujo supersónico. De acuerdo con esta analogía, el ángulo  $\alpha$  dado por la (9.113) corresponde a un flujo supersónico con número de Mach igual a 3.

Dentro del sector angular que hemos encontrado hay un complicado patrón de crestas y valles (estacionario si se lo mira desde el barco) que todos nosotros habremos tenido ocasión de observar alguna vez. Es interesante mostrar cómo se pueden calcular los detalles de ese patrón. Para esto (a diferencia de la deducción anterior) conviene emplear el referencial del barco, desde el cual se observa un patrón de ondas estacionario en una corriente cuya velocidad es  $\mathbf{u} = -u\mathbf{e}_x$ . La geometría del problema se indica en la Fig. 9.9. El patrón de ondas que ve el observador tiene la forma general

$$\zeta(x, y, t) = A(x, y, t) \cos[\theta(x, y, t)] \quad (9.116)$$

donde la fase  $\theta(x, y, t)$  es

$$\theta(x, y, t) = k_x x + k_y y - Wt + \theta_0 \quad (9.117)$$

En la (9.117)

$$W(k_x, k_y) = \omega(k_x, k_y) - k_x u \quad (9.118)$$

es la frecuencia que se mide desde el referencial del observador, que es diferente a la frecuencia  $\omega(k_x, k_y)$  vista desde el referencial del agua debido al corrimiento Doppler (debe quedar claro que en estas fórmulas  $k_x$  y  $k_y$ , y por lo tanto  $\omega$ , son funciones de  $x, y, t$ ). La función  $\omega(k_x, k_y)$  es, naturalmente, la relación de dispersión de las ondas de que se trate, en este caso, las ondas de gravedad en aguas profundas (ec. (9.18)).

Las componentes de la velocidad de grupo<sup>16</sup> en el referencial del observador son

$$C_x = \frac{\partial W(k_x, k_y)}{\partial k_x} = W_{k_x}(k_x, k_y) \quad , \quad C_y = \frac{\partial W(k_x, k_y)}{\partial k_y} = W_{k_y}(k_x, k_y) \quad (9.119)$$

El lugar donde se encuentra un cierto estado de perturbación (por ejemplo, una dada cresta, o valle) está determinada por la condición

$$\theta = k_x x + k_y y - Wt + \theta_0 = \text{cte.} \quad (9.120)$$

Ahora bien, las ondas que el observador ve como *estacionarias* satisfacen la condición

$$W(k_x, k_y) = \omega(k_x, k_y) - k_x u = 0 \quad (9.121)$$

Usando esta condición podemos entonces escribir la (9.119) en la forma

$$k_x x + k_y y = \Theta \quad (9.122)$$

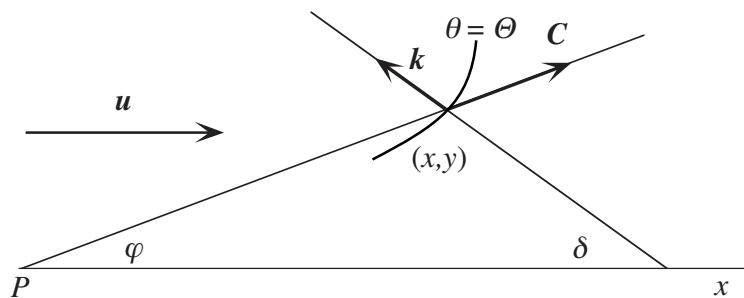


Fig. 9.9. Líneas de igual fase en un patrón de ondas estacionarias bidimensional: dada la condición de fase estacionaria, queda identificada la dirección del vector de onda ( $\delta$ ) que es perpendicular a la línea  $\theta = \Theta$ , la dirección de la velocidad de grupo ( $\varphi$ ) determina en que dirección está la línea buscada, el valor de la fase ( $\Theta$ ) nos dice a que distancia de  $P$  se encuentra.

En un instante dado  $t$ , estas ondas se encuentran en la posición  $(x, y)$ . Puesto que se originaron en la posición del observador (el origen de coordenadas), y han viajado con la velocidad de grupo, se debe cumplir que

$$\frac{y}{x} = \frac{W_{k_y}(k_x, k_y)}{W_{k_x}(k_x, k_y)} \quad (9.123)$$

Entonces, si eliminamos  $k_x$  y  $k_y$  entre las tres ecuaciones (9.121)-(9.123), se llega a una relación de la forma  $f(x, y, \Theta, u, \dots) = 0$  (los ... indican los parámetros constantes que figuran en la relación de dispersión de nuestras ondas), que nos permite determinar, asignando el valor de  $\Theta$ , los lugares de los puntos de igual fase (por ejemplo, las crestas y los valles) del patrón de ondas. La

<sup>16</sup> La velocidad de la corriente introduce una anisotropía en la propagación de las ondas vistas desde el referencial del barco. De resultas de ello  $C$  no tiene la misma dirección de  $k$ .

solución del problema se basa entonces en aplicar las tres condiciones que determinan el patrón: la condición de estacionariedad (9.121), la condición de fase constante (9.122) y la condición (9.123) que expresa que la posición de las ondas está determinada por la velocidad de grupo.

El procedimiento que hemos descrito es conceptualmente claro, pero no es el más conveniente para llegar al resultado. En la práctica es mejor expresar las ecuaciones de las líneas de fase constante en forma paramétrica, en términos del ángulo  $\delta$  entre el vector de onda y el eje  $x$ . No vamos a dar aquí los detalles, puesto que se pueden encontrar en el libro de Whitham ya citado.

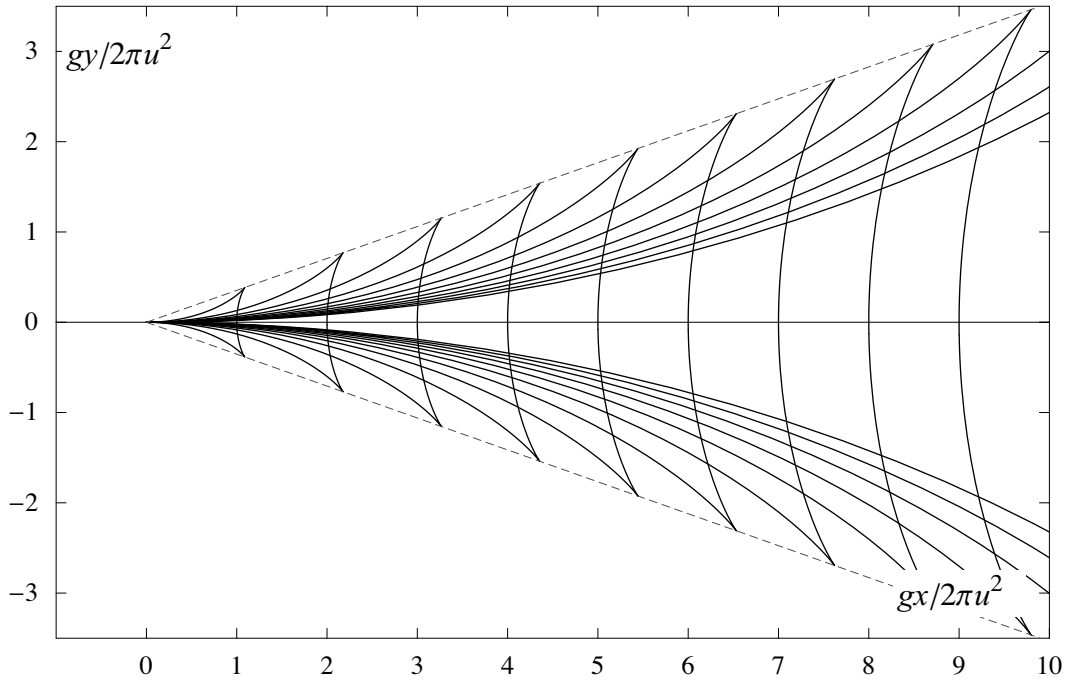


Fig. 9.10. Patrón de ondas en la estela de una embarcación. Se puede apreciar que el patrón de ondas está contenido en el sector angular indicado con la línea de puntos, que se obtuvo mediante la construcción de la Fig. 9.8.

El cálculo correspondiente al caso de las ondas de gravedad puras en aguas profundas es sencillo pero para abreviar nos limitaremos a mencionar los resultados. La ecuación de las líneas de fase constante se expresa en forma paramétrica como

$$x = \frac{u^2 \Theta}{2g} \cos \delta (3 - \cos 2\delta) \quad , \quad y = \frac{u^2 \Theta}{g} \sin \delta \cos^2 \delta \quad , \quad -\pi/2 \leq \delta \leq \pi/2 \quad (9.124)$$

En la Fig. 9.10 se muestran las líneas de fase constante para  $\Theta = 2n\pi$  ( $n = 1, 2, \dots, 12$ ). Por supuesto el patrón se extiende indefinidamente, pero por razones prácticas hemos dibujado solamente las primeras 12 crestas.

La relación entre los ángulos  $\varphi$  y  $\delta$  está dada por

$$\tan \varphi = \frac{\tan \delta}{1 + 2 \tan^2 \delta} \quad (9.125)$$

A partir de la (9.125) es fácil verificar que la envolvente del patrón de ondas es precisamente el sector angular (9.113) que determinamos antes.



La (9.124) muestra que el patrón es *autosemejante* y escala como  $u^2/g$ . Por lo tanto la Fig. 9.10 es universal y se puede usar para todo valor de la velocidad del barco, siempre y cuando se pueda suponer que las ondas son de gravedad pura (de la Fig. 9.3 se ve que esto es cierto si  $u > 3c_0 \approx 50$  cm/s para el agua) y las aguas se puedan considerar profundas (lo cual requiere  $h > 2\pi u^2/g$ ). La distancia entre sucesivas crestas (esto es, la longitud de onda local en el patrón) es proporcional a  $u^2/g$ . Sobre el eje  $x$  ( $\delta = 0$ ) esta distancia vale  $2\pi u^2/g$ , lo cual no es sorprendente pues esta es precisamente la longitud de onda cuya velocidad de fase es igual a  $u$ , como vimos al discutir el caso del patrón unidimensional producido por un obstáculo de extensión grande en sentido transversal a la corriente.

### ***Patrón de ondas capilares alrededor de una línea de pesca***

Si se pesca con una caña en un arroyo cuya corriente es más rápida que el valor  $c_0$  dado por la (9.111), alrededor del punto en que la tanza entra en el agua se puede observar (además del patrón de ondas de gravedad) un patrón estacionario de ondas capilares. Podemos calcular los detalles de este patrón aplicando los mismos conceptos que usamos para calcular el patrón de ondas en la estela de un barco, con la salvedad que en este caso la función  $\omega(k_x, k_y)$  que aparece en la (9.118) es la relación de dispersión de las ondas de las ondas de gravedad capilares en aguas profundas. Para simplificar el cálculo vamos a usar primero la expresión aproximada (9.36) que vale para las ondas capilares puras, lo cual estará bien si la velocidad de la corriente no es demasiado baja (de la Fig. 9.3 se ve que esto requiere<sup>17</sup>  $u > 3c_0 \approx 50$  cm/s).

El cálculo se hace del mismo modo que antes y para abreviar daremos directamente los resultados.

La ecuación de las líneas de fase constante se expresa en forma paramétrica como

$$x = \frac{\Theta\gamma}{\rho u^2} \frac{1}{\cos \delta} \left( 3 - \frac{2}{\cos^2 \delta} \right), \quad y = \frac{\Theta\gamma}{\rho u^2} \frac{3 \sin \delta}{\cos^2 \delta} \cos^2 \delta, \quad \pi/2 \leq \delta \leq 3\pi/2 \quad (9.126)$$

En la Fig. 9.11 se muestran las líneas de fase constante para  $\Theta = 2n\pi$  ( $n = 1, 2, \dots, 10$ ). En principio, el patrón se extiende indefinidamente delante del punto en que la tanza entra en el agua, pero debido al fuerte amortiguamiento de las ondas capilares se pueden observar solamente las primeras crestas.

La relación entre los ángulos  $\varphi$  y  $\delta$  está dada por

$$\tan \varphi = \frac{3 \cos \delta \sin \delta}{2 - 3 \cos^2 \delta} \quad (9.127)$$

Se puede observar que en este caso además de ondas estacionarias corriente arriba del obstáculo, el patrón contiene ondas situadas corriente abajo y a los costados del mismo.

La (9.126) muestra que tal como en el caso del patrón de ondas de gravedad pura de la Fig. 9.10, el patrón de ondas capilares puras es *autosemejante* pero su escala  $\gamma/\rho u^2$  es *inversamente* proporcional al cuadrado de la velocidad. La distancia entre sucesivas crestas (esto es, la longitud de onda local en el patrón) es proporcional a  $\gamma/\rho u^2$ . Sobre el eje  $x$  ( $\delta = 0$ ) esta distancia vale  $2\pi\gamma/\rho u^2$ , que es la longitud de la onda capilar pura cuya velocidad de fase es igual a  $u$ , como vimos al discutir el caso del patrón unidimensional producido por un obstáculo de extensión

<sup>17</sup> En este caso el patrón de ondas de gravedad que hay corriente abajo es del tipo que se muestra en la Fig. 9.10.

grande en sentido transversal a la corriente. Esto muestra que el patrón se puede observar solamente si  $u$  no es muy grande, ya que para velocidades grandes las ondas capilares tienen longitud de onda muy corta y son fuertemente amortiguadas (de la (9.53) se puede ver que  $\gamma \sim \lambda^{-2} \sim u^4$ ).

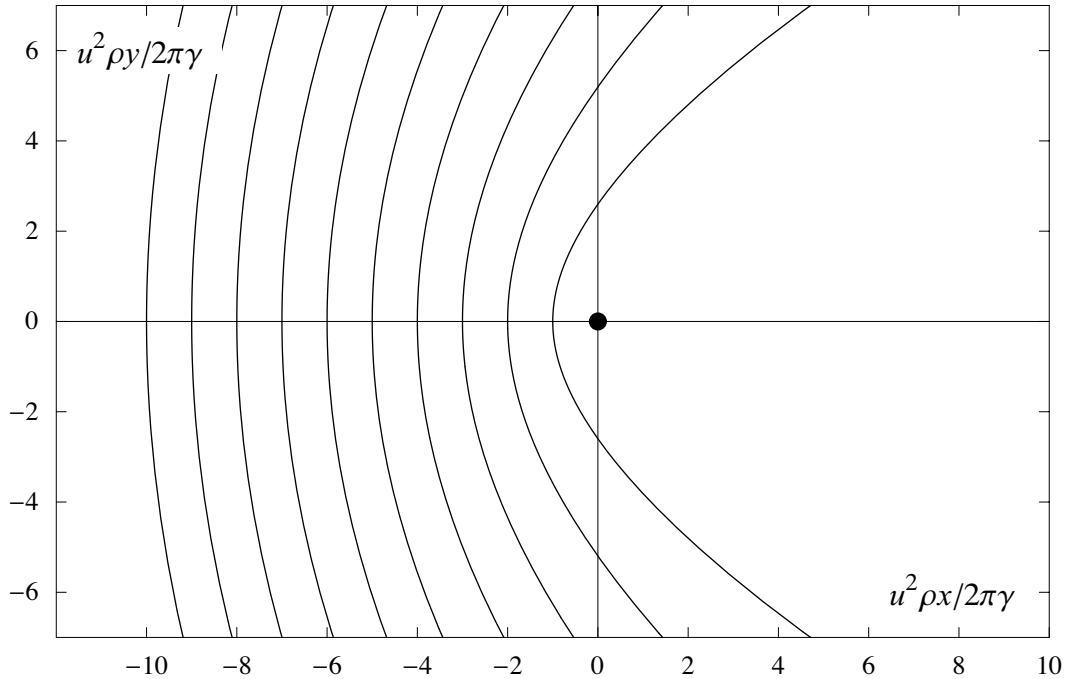


Fig. 9.11. Patrón de ondas capilares alrededor de una línea de pescar. Se puede ver que el patrón se extiende también corriente abajo a los costados del obstáculo.

Si la velocidad de la corriente es baja ( $c_0 < u < 3c_0$ ) las aproximaciones que hicimos para calcular los patrones de las ondas capilares y de gravedad no son válidas, y es preciso usar la relación de dispersión (9.33) de las ondas de gravedad capilares. La rama de gravedad y la rama capilar se deben tratar por separado, y cada una de ellas da lugar a un patrón de ondas estacionarias. El cálculo se hace del mismo modo que en los casos anteriores y no encierra mayores dificultades, pero las fórmulas que se obtienen son sumamente complicadas y no las vamos a presentar. Además, debido a que ahora hay *dos* escalas naturales en el problema ( $u^2/g$  para la rama de gravedad y  $\gamma/\rho u^2$  para la rama capilar) el patrón *no es autosemejante*. Por lo tanto se debe repetir el cálculo para cada valor de  $u$ . En la Fig. 9.12 se muestra el resultado para  $u = 28$  cm/s. Es interesante comparar este patrón con los de las figuras 9.10 y 9.11 que corresponden a ondas de gravedad y capilares *puras*. Los patrones de las ondas capilares no son muy diferentes, pero los de la rama de gravedad presentan una llamativa diferencia. En efecto, las ondas de gravedad de la Fig. 9.12 no están contenidas dentro del sector angular típico de la estela de un barco, como en la Fig. 9.10. Esto se debe a que las ondas de la rama de gravedad de la Fig. 9.12 no cumplen la condición  $C = c/2$ , como se puede apreciar de la Fig. 9.3. Como ya dijimos antes, para que valga la aproximación de ondas de gravedad *puras*, la velocidad de la corriente debe ser de por lo menos 60 cm/s.

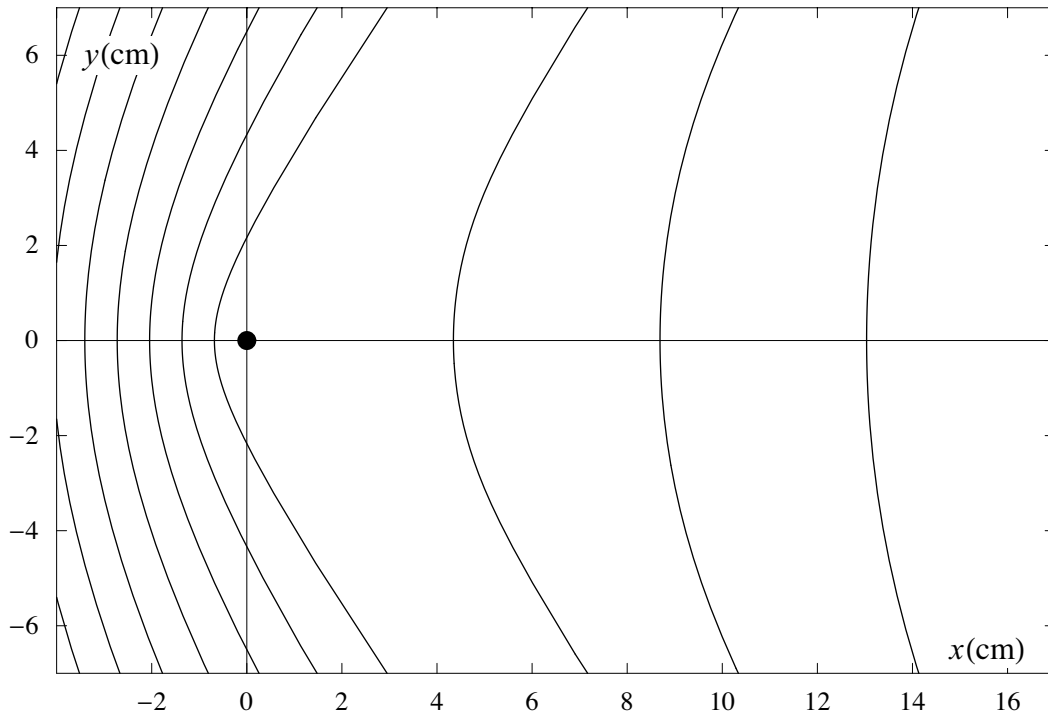


Fig. 9.12. Patrón de ondas estacionarias producido por una línea de pescar en una corriente de 28 cm/s (un 20% mayor que  $c_0$ ). Las escalas son en cm. Las ondas de la rama capilar son aquellas cuyas crestas pasan a la izquierda de la línea (corriente arriba) y tienen longitud de onda más pequeña (0.68 cm sobre la línea  $y = 0$ ). Las ondas de la rama de gravedad se encuentran a la derecha (corriente abajo) y su longitud de onda es más larga (4.33 cm sobre la línea  $y = 0$ ). Notar la diferencia entre este patrón y el patrón de la Fig. 9.10 correspondiente a ondas de gravedad puras.

Es bastante sencillo producir este tipo de patrones en una bañera o en la pileta de la cocina perturbando la superficie del agua mediante un trozo de alambre, la punta de un cuchillo u otro objeto semejante, que hay que procurar mover en línea recta y con velocidad uniforme. De esta forma se pueden verificar cualitativamente los resultados de la teoría. Para una verificación cuantitativa es mejor usar un obstáculo fijo en una corriente adecuada, lo cual no es tan sencillo de lograr con recursos caseros y lejos de corrientes de agua naturales.

### ***Arrastre por emisión de ondas***

El patrón de ondas de superficie estacionarias que se produce debido a la presencia de un obstáculo en una corriente, o cuando un barco u otro objeto se desplaza sobre la superficie de un espejo de agua (o debajo de la superficie, pero a poca profundidad) *transporta energía* al infinito. Esto se traduce en una fuerza de *arrastre*, que el fluido ejerce sobre el objeto. Como el nombre lo indica, esta fuerza tiende a arrastrar con la corriente un obstáculo fijo y a frenar el avance de una embarcación. El cálculo teórico de esta fuerza, que se denomina *arrastre por emisión de ondas* (“wave drag” en inglés) es complicado, debido a las propiedades dispersivas de las ondas de superficie, que hacen que el patrón de ondas sea tan complejo como acabamos de ver. Por lo tanto no lo vamos a desarrollar aquí. Pero debido a la gran importancia práctica de este tema para la hidrodinámica de las embarcaciones no queremos concluir este Capítulo sin hacer por lo menos algunos comentarios.

La forma del casco de una embarcación está determinada por una serie de compromisos entre diferentes requerimientos que en parte se contraponen. La economía y simplicidad de construcción favorecen la forma de un paralelepípedo. La estabilidad transversal favorece cascos anchos. Para que el casco tenga una adecuada resistencia a la flexión en sentido longitudinal conviene que sea profundo. Todos estos factores influyen sobre la elección de la forma, pero frecuentemente el factor más importante es la interacción dinámica del casco con el agua. Las interacciones que determinan la resistencia que opone el agua al movimiento de la embarcación, y que por lo tanto determinan la potencia de los motores, suelen requerir el mayor cuidado por parte del arquitecto naval.

El arrastre total que sufre una embarcación tiene cuatro componentes: (1) la fricción entre el agua y la superficie del casco, (2) el arrastre por emisión de ondas, (3) las pérdidas de energía debido a la formación y desprendimiento de remolinos por parte del casco y sus apéndices (por ej. el timón) y (4) la resistencia que el aire ejerce sobre las partes que están por encima de la línea de flotación.

La fuerza de fricción  $F_a$  entre el agua y el casco (o sea, el arrastre propiamente dicho) está dada, como sabemos, por  $F_a = C_a \rho S u^2$  donde  $\rho$  es la densidad del agua,  $S$  la superficie del casco en contacto con el agua,  $u$  la velocidad de la embarcación y  $C_a$  es el coeficiente de arrastre. Se la puede disminuir reduciendo  $S$ , pero en la práctica no es mucho lo que se puede lograr en este sentido en vista de los demás requerimientos constructivos. El coeficiente de arrastre depende del número de Reynolds del flujo, y no es un factor que el constructor pueda controlar, pues la longitud y la velocidad de la embarcación suelen estar dictados por otras consideraciones.

Las componentes (3) y (4) del arrastre total no son en general de gran importancia.

Esto deja al arrastre por emisión de ondas como un factor *muy importante* a tener en cuenta en el diseño, debido fundamentalmente a que la energía que se pierde por causa de la emisión aumenta rápidamente con la velocidad, al punto que se llega pronto a una *velocidad límite* que no se puede superar, ya que para hacerlo sería necesaria una planta motriz de tamaño y costo impracticables<sup>18</sup>.

Esto se puede entender mediante un sencillo argumento cualitativo. Recordemos que la escala del patrón de ondas de la estela es  $2\pi u^2 / g$ . De resultas de esto, si una embarcación cuya longitud es  $L$  se desplaza con una velocidad

$$u_L = \sqrt{gL/2\pi} \quad \text{o sea} \quad u_L (\text{m/s}) \approx 1.3\sqrt{L(\text{m})} \quad (9.128)$$

la distancia entre las crestas de las ondas que produce es igual a la longitud de la embarcación. Cuando eso ocurre, en la práctica *el barco viaja dentro del valle del sistema de ondas por él mismo creado*. Si el barco se desplazara con una velocidad mayor que  $u_L$ , la distancia entre las crestas sería *mayor* que  $L$ , lo que implica que nuestro barco estaría tratando de *ascender por la ladera del valle* hacia la primera cresta. Cuanto mayor es  $u$ , tanto más empinada resulta la cuesta

---

<sup>18</sup> El movimiento de un barco también puede dar lugar a la emisión de ondas de otra clase, además de las ondas de superficie que estamos considerando. Cuando el agua presenta estratificaciones de densidad, veremos en el Capítulo 10 que se pueden propagar en su seno *ondas internas de gravedad*. La emisión de estas ondas por parte del barco produce un arrastre adicional, que en determinadas circunstancias puede ser muy importante. Esta es la causa del fenómeno que se denomina “aguas muertas”, que ocurre (por ejemplo) cuando hay una capa de agua dulce sobre el agua salada del mar.

a remontar. Por lo tanto se llega al resultado que para lograr una velocidad significativamente mayor que  $u_L$  es preciso instalar en el barco motores de enorme potencia, cosa que resulta impracticable. Por esto es que ningún barco navega a velocidades mayores de unos 40 nudos.

Las embarcaciones pequeñas pueden superar esta limitación gracias a que viajan *planeando* sobre la superficie con casi todo el casco fuera del agua (como ocurre con las lanchas de carrera), pero esto, lógicamente, es impracticable para un buque de gran tamaño.

Una característica importante del patrón de ondas producidas por una embarcación es que las ondas se producen en diferentes partes del casco. Por de pronto, siempre hay por lo menos dos sistemas de ondas: uno generado por la proa y otro por la popa. Además, toda angulosidad que hubiera a lo largo del casco también produce su propio sistema de ondas. Estos diferentes sistemas se superponen, y bajo determinadas condiciones pueden interferir destructivamente entre sí, con lo cual *disminuye* el arrastre total por emisión de ondas. Uno de los objetivos más importantes de la hidrodinámica naval es precisamente el diseño de formas de casco que optimizan este efecto beneficioso. Un resultado valioso en esta materia es el *bulbo sumergido* que muchos barcos tienen en la proa, cuya función es precisamente la de producir un sistema de ondas que tiende a cancelar las ondas producidas por la proa.